E. Lifshitz e L. Pitaevskij

# Fisica teorica

## Tomo 9

# Fisica statistica

## Parte seconda

Editori Riuniti Edizioni Mir

Nuova biblioteca di cultura

*Serie scientifica*

Lev D. Landau Evgenij M. Lifšits

# Fisica teorica 9

Editori Riuniti Edizioni Mir

Evgenij M. Lifšits Lev P. Pitaevskij

# Fisica statistica

Parte seconda

## Teoria dello stato condensato

Editori Riuniti Edizioni Mir

II edizione: settembre 1997
Titolo originale: *Teorija kondensirovannogo sostojanija*
© Copyright by Nauka, 1978
Traduzione di Aleksandr Machov
© Copyright by Edizioni Mir, Mosca
© Copyright by Editori Riuniti, 1981
via Tomacelli, 146 – 00186 Roma
ISBN 88-359-4386-8

# Indice

*Prefazione* . . . . . 9
*Alcune notazioni* . . . . . 12

CAPITOLO I. LIQUIDO DI FERMI NORMALE

§ 1. *Eccitazioni elementari nel liquido di Fermi quantistico* . . . . . 13
§ 2. *Interazione delle quasi-particelle* . . . . . 21
§ 3. *Suscettività magnetica del liquido di Fermi* . . . . . 26
§ 4. *Suono nullo* . . . . . 28
§ 5. *Onde di spin nel liquido di Fermi* . . . . . 35
§ 6. *Gas di Fermi quasi-perfetto degenere con repulsione fra le particelle* 37

CAPITOLO II. FUNZIONI DI GREEN DEL SISTEMA DI FERMI PER $T = 0$

§ 7. *Funzione di Green di un sistema macroscopico* . . . . . 46
§ 8. *Determinazione dello spettro energetico mediante la funzione di Green* 53
§ 9. *Funzione di Green di un gas di Fermi perfetto* . . . . . 58
§ 10. *Distribuzione degli impulsi delle particelle del liquido di Fermi* 61
§ 11. *Calcolo delle grandezze termodinamiche in base alla funzione di Green* 62
§ 12. *Operatori* $\Psi$ *nella rappresentazione dell'interazione* . . . . . 63
§ 13. *Tecnica dei diagrammi per il sistema di Fermi* . . . . . 68
§ 14. *Autofunzione energetica* . . . . . 77
§ 15. *Funzione di Green a due componenti* . . . . . 80
§ 16. *Legame fra la funzione di vertice e l'ampiezza di diffusione delle quasi-particelle* . . . . . 85
§ 17. *Funzione di vertice per piccole trasmissioni dell'impulso* . . . . 88
§ 18. *Legame fra la funzione di vertice e la funzione di interazione delle quasi-particelle* . . . . . 95
§ 19. *Le identità per le derivate della funzione di Green* . . . . . 98
§ 20. *Deduzione della relazione esistente fra l'impulso limite e la densità* 103
§ 21. *Funzione di Green per un gas di Fermi quasi-perfetto* . . . . . 105

CAPITOLO III. SUPERFLUIDITÀ

§ 22. *Eccitazioni elementari nel liquido di Bose quantistico* . . . . . 113
§ 23. *Superfluidità* . . . . . 117
§ 24. *Fononi nel liquido* . . . . . 124

§ 25. *Gas di Bose quasi-perfetto degenere* . . . . . 128
§ 26. *Funzione d'onda del condensato* . . . . . 134
§ 27. *Dipendenza della densità del condensato dalla temperatura* . . . 138
§ 28. *Comportamento della densità superfluida in prossimità del λ-punto* 142
§ 29. *Linee di vortice quantizzate* . . . . . 143
§ 30. *Linea di vortice in un gas di Bose quasi-perfetto* . . . . . 150
§ 31. *Funzioni di Green del liquido di Bose* . . . . . 152
§ 32. *Tecnica dei diagrammi per il liquido di Bose* . . . . . 159
§ 33. *Funzioni autoenergetiche* . . . . . 162
§ 34. *Disintegrazione delle quasi-particelle* . . . . . 167
§ 35. *Proprietà dello spettro in prossimità del suo punto finale* . . . . 172

## CAPITOLO IV. FUNZIONI DI GREEN A TEMPERATURE FINITE

§ 36. *Funzioni di Green a temperature finite* . . . . . 179
§ 37. *Funzioni di Green termiche* . . . . . 185
§ 38. *Tecnica dei diagrammi per le funzioni di Green termiche* . . . . 188

## CAPITOLO V. SUPERCONDUTTIVITÀ

§ 39. *Gas di Fermi superfluido. Spettro energetico* . . . . . 193
§ 40. *Gas di Fermi superfluido. Proprietà termodinamiche* . . . . . 200
§ 41. *Funzioni di Green di un gas di Fermi superfluido* . . . . . 205
§ 42. *Funzioni di Green termiche di un gas di Fermi superfluido* . . . 212
§ 43. *Superconduttività dei metalli* . . . . . 214
§ 44. *Corrente superconduttrice* . . . . . 216
§ 45. *Equazione di Ginzburg-Landau* . . . . . 222
§ 46. *Tensione superficiale sulla frontiera fra le fasi superconduttrice e normale* . . . . . 230
§ 47. *Due specie di superconduttori* . . . . . 236
§ 48. *Struttura dello stato misto* . . . . . 240
§ 49. *Suscettività diamagnetica sopra il punto di transizione* . . . . . 248
§ 50. *Effetto Josephson* . . . . . 252
§ 51. *Legame fra la corrente e il campo magnetico nel superconduttore* 256
§ 52. *Profondità di penetrazione del campo magnetico nel superconduttore* 264
§ 53. *Leghe superconduttrici* . . . . . 266
§ 54. *Effetto Cooper per momenti orbitali non nulli di una coppia* . . . 269

## CAPITOLO VI. ELETTRONI IN UN RETICOLO CRISTALLINO

§ 55. *Elettrone in un campo periodico* . . . . . 274
§ 56. *Influenza di un campo esterno sul moto dell'elettrone nel reticolo* 284
§ 57. *Traiettorie quasi-classiche* . . . . . 289
§ 58. *Livelli energetici quasi-classici* . . . . . 294
§ 59. *Tensore delle masse efficaci dell'elettrone nel reticolo* . . . . . 297
§ 60. *Simmetria degli stati elettronici nel reticolo in un campo magnetico* 302
§ 61. *Spettro elettronico dei metalli normali* . . . . . 307
§ 62. *Funzione di Green degli elettroni nel metallo* . . . . . 312
§ 63. *Effetto di Haas-Van Alphen* . . . . . 317
§ 64. *Interazione elettrone-fonone* . . . . . 325
§ 65. *Influenza dell'interazione elettrone-fonone sullo spettro elettronico nel metallo* . . . . . 328
§ 66. *Spettro elettronico dei dielettrici solidi* . . . . . 333
§ 67. *Elettroni e buche nei semiconduttori* . . . . . 337
§ 68. *Spettro elettronico in prossimità di un punto di degenerazione* . . . 339

## CAPITOLO VII. MAGNETISMO

§ 69. *Equazione del moto del momento magnetico in un ferromagnete* . 345
§ 70. *Magnoni in un ferromagnete. Spettro* . . . . . 352
§ 71. *Magnoni in un ferromagnete. Grandezze termodinamiche* . . . . 357
§ 72. *Operatore hamiltoniano di spin* . . . . . 363
§ 73. *Interazione dei magnoni* . . . . . 370
§ 74. *Magnoni in un antiferromagnete* . . . . . 375

## CAPITOLO VIII. FLUTTUAZIONI ELETTROMAGNETICHE

§ 75. *Funzione di Green del fotone in un mezzo* . . . . . 380
§ 76. *Fluttuazioni del campo elettromagnetico* . . . . . 386
§ 77. *Fluttuazioni elettromagnetiche in un mezzo illimitato* . . . . . 388
§ 78. *Fluttuazioni di corrente nei circuiti lineari* . . . . . 394
§ 79. *Funzione termica di Green per il fotone in un mezzo* . . . . . 396
§ 80. *Tensore degli sforzi per le forze di Van der Waals* . . . . . 401
§ 81. *Forze di interazione molecolari fra solidi. Formula generale* . . . 409
§ 82. *Forze di interazione molecolari fra solidi. Casi limite* . . . . . 414
§ 83. *Andamento asintotico della funzione di correlazione in un liquido* 419
§ 84. *Espressione operatoriale per la costante dielettrica* . . . . . 423
§ 85. *Plasma degenere* . . . . . 426

## CAPITOLO IX. FLUTTUAZIONI IDRODINAMICHE

§ 86. *Fattore di forma dinamico dei liquidi* . . . . . 435
§ 87. *Regole delle somme per il fattore di forma* . . . . . 440
§ 88. *Fluttuazioni idrodinamiche* . . . . . 446
§ 89. *Fluttuazioni idrodinamiche in un mezzo illimitato* . . . . . 450
§ 90. *Espressioni operatoriali per i coefficienti cinetici* . . . . . 456
§ 91. *Fattore di forma dinamico del liquido di Fermi* . . . . . 459

*Indice analitico* . . . . . 463

# Prefazione

*Per caratterizzare brevemente il contenuto di questo IX volume del Corso di fisica teorica presentato al lettore, possiamo dire che esso è dedicato alla teoria quantistica dello stato condensato della materia. Il libro inizia con un'esposizione particolareggiata della teoria dei liquidi quantistici: liquido di Bose e liquido di Fermi. Questa teoria, creata da L. D. Landau subito dopo le scoperte sperimentali di P. L. Kapitsa, rappresenta attualmente un settore a sé stante in fisica teorica. La sua importanza è dovuta non tanto agli interessanti fenomeni verificatisi negli isotopi liquidi dell'elio, quanto al fatto che le rappresentazioni del liquido quantistico e del suo spettro costituiscono effettivamente la base della descrizione quantistica dei corpi macroscopici.*

*Per una comprensione approfondita delle proprietà dei metalli, ad esempio, è necessario considerarvi gli elettroni come liquido di Fermi. Tuttavia le proprietà del liquido elettronico sono rese complicate dall'esistenza del reticolo cristallino, pertanto lo studio preliminare del caso più semplice di liquido omogeneo e isotropo è un passo necessario per la costruzione di una teoria. Allo stesso modo, è impossibile capire chiaramente la superconduttività dei metalli, che si può considerare come superfluidità del liquido elettronico, senza acquisire preliminarmente una conoscenza della teoria elementare della superfluidità del liquido di Bose.*

*Il meccanismo delle funzioni di Green è parte integrante dell'apparato matematico della fisica statistica moderna. Ciò è legato non soltanto alla comodità che la tecnica dei diagrammi presenta per il calcolo delle funzioni di Green. Soprattutto il fatto è che le funzioni di Green definiscono direttamente lo spettro di eccitazioni elementari del corpo e rappresentano, quindi, quel linguaggio che permette in modo più naturale di descrivere le proprietà di queste eccitazioni. Questa è la ragione per cui nel presente volume si dà un'attenzione notevole alle*

*questioni metodologiche, ossia alla teoria delle funzioni di Green dei corpi macroscopici. Sebbene le idee fondamentali siano le stesse per tutti i sistemi, la tecnica dei diagrammi ha forma concreta a seconda dei casi in esame. A questo proposito sembra naturale sviluppare questi metodi sull'esempio degli stessi liquidi quantistici isotropi, in cui l'essenza stessa del metodo si rivela in forma pura, senza complicazioni dovute alla disomogeneità spaziale, all'esistenza di più specie di particelle ecc.*

*Per ragioni analoghe trattiamo qui la teoria microscopica della superconduttività partendo da un modello semplice di gas di Fermi isotropo con interazione debole, a prescindere da complicazioni legate all'esistenza del reticolo cristallino e all'interazione coulombiana.*

*Quanto ai capitoli dedicati agli elettroni nel reticolo cristallino e alla teoria del magnetismo, vogliamo sottolineare ancora una volta che il presente libro fa parte del Corso di fisica teorica e non pretende in nessun modo di sostituire il corso di teoria dei solidi. Ciò premesso, qui sono considerate questioni di carattere generale e trascurate quelle concrete, che richiedono l'uso di dati sperimentali concreti e metodi di calcolo non aventi ancora una base teorica ben chiara. Notiamo anche che il presente libro non tratta le proprietà cinetiche dei solidi, che ci proponiamo di considerare nel prossimo, conclusivo volume del Corso.*

*Infine, in questo libro sono esposte anche la teoria delle fluttuazioni elettromagnetiche nella materia e la teoria delle fluttuazioni idrodinamiche. Inizialmente la prima teoria faceva parte dell'VIII volume. La sua attuale inclusione nel presente libro è dovuta alla necessità di applicare le funzioni di Green, ciò che consente di conferire a tutta la teoria una forma più semplice e comoda per l'uso. Inoltre, ci è sembrato naturale trattare le fluttuazioni elettromagnetiche ed idrodinamiche in un solo volume.*

*L. D. Landau è assente fra i veri autori di questo libro. Ma il lettore potrà notare facilmente quante volte il suo nome viene citato nel libro; la maggior parte dei risultati descritti appartengono a Landau personalmente o sono stati ottenuti in collaborazione con i suoi allievi. Il pluriennale contatto diretto con lui ci dà tutte le ragioni di sperare che siamo riusciti ad esprimere correttamente il suo parere su questi problemi, tenendo ovviamente conto di quanto di nuovo è stato apportato negli ultimi quindici anni trascorsi dal giorno in cui è cessata tragicamente la sua attività scientifica.*

*Vogliamo ringraziare A. F. Andreev, I. E. Dzjaloŝinskij e I. M. Lifŝits per le consultazioni continue sulle questioni trattate in questo volume. Abbiamo tratto tante cose utili dal noto libro di A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov e I. E. Dzjaloŝinskij, uno dei primi lavori nella letteratura fisica dedicato ai metodi nuovi in fisica statistica. Infine, siamo grati a L. P. Gorkov e Ju. L. Klimontovič per la lettura del manoscritto e le utili osservazioni.*

Mosca, aprile 1977

E. M. Lifŝits,
L. P. Pitaevskij

# Alcune notazioni

Gli indici vettoriali sono designati con le lettere minuscole dell'alfabeto latino: $i$, $k$, . . ., e gli indici degli spin con quelle dell'alfabeto greco: $\alpha$, $\beta$, . . . Con tutti gli indici ripetuti due volte è sottintesa la somma
I « quadrivettori » (si veda la nota alla pag. 72) sono indicati con lettere maiuscole: $X$, $P$, . . .
Elemento di volume: $dV$ o $d^3x$
Il limite allorché una grandezza tende a zero da destra o da sinistra: $+0$ o $-0$
L'accento circonflesso sopra una lettera indica un operatore
Operatore hamiltoniano: $\hat{H}$, $\hat{H}' = \hat{H} - \mu\hat{N}$
Operatore di perturbazioni: $\hat{V}$
Operatori $\psi$ nella rappresentazione di Schrödinger: $\hat{\psi}$, $\hat{\psi}^+$; nella rappresentazione di Heisenberg: $\hat{\Psi}$, $\hat{\Psi}^+$; nella rappresentazione di Matsubara: $\Psi^M$, $\hat{\bar{\Psi}}^M$
Funzioni di Green: $G$, $D$
Funzioni di Green termiche: $\mathcal{G}$, $\mathcal{D}$
Le grandezze termodinamiche sono designate come nel volume V, fra cui: temperatura $T$, volume $V$, pressione $P$, potenziale chimico $\mu$
Intensità e induzione del campo magnetico: **H** e **B**; campo magnetico esterno: $\mathfrak{H}$

I rimandi a paragrafi e formule degli altri volumi del presente Corso sono indicati mediante i numeri relativi ai volumi stessi: I (*Meccanica*, 1975); II (*Teoria dei campi*, 1975); III (*Meccanica quantistica non relativistica*, 1976); IV (*Meccanica quantistica relativistica*, 1977); V (*Fisica statistica*, parte prima, 1977); VI (*Meccanica dei mezzi continui*, di prossima pubblicazione); VIII (*Elettrodinamica dei mezzi continui*, di prossima pubblicazione).

Capitolo I

# LIQUIDO DI FERMI NORMALE

## § 1. *Eccitazioni elementari nel liquido di Fermi quantistico*

Le proprietà macroscopiche dei liquidi vengono determinate dagli effetti quantistici per temperature tanto basse, che la lunghezza d'onda di de Broglie, che corrisponde al movimento termico degli atomi nel liquido, diventa commensurabile con le distanze interatomiche. La teoria di questi liquidi quantistici presenta notevole interesse di principio, anche se in natura esistono soltanto due sostanze di questo tipo, che si possono considerare liquidi dell'elio ($He^3$ e $He^4$) a temperature di $\sim$1-2 K. Tutte le altre sostanze si solidificano molto prima che in esse gli effetti quantistici diventino considerevoli. A questo proposito ricordiamo che, in accordo con la meccanica classica, tutti i corpi dovrebbero essere solidi allo zero assoluto (vedi V, § 64); per quanto riguarda l'elio, grazie all'interazione particolarmente debole fra i suoi atomi, esso resta liquido fino a temperature al di sotto delle quali entrano in vigore fenomeni quantistici e la solidificazione non è più necessaria.

Per calcolare le grandezze termodinamiche di un corpo macroscopico, occorre conoscere lo spettro dei suoi livelli energetici. È ovvio che nel caso di sistemi di particelle fortemente interagenti, quale è di fatto il liquido quantistico, si deve parlare proprio dei livelli corrispondenti agli stati stazionari quantomeccanici dell'intero liquido e non agli stati di singoli atomi. Calcolando le somme statistiche nel dominio delle temperature sufficientemente basse, è necessario tener conto soltanto di livelli debolmente eccitati dell'energia del liquido, ossia dei livelli disposti non troppo sopra quello principale.

Per tutta la teoria ha un'importanza fondamentale il seguente fatto. Ogni stato debolmente eccitato di un corpo macroscopico può essere considerato in meccanica quantistica come un insieme di *eccitazioni elementari*. Queste eccitazioni elementari si comportano come *quasi-particelle* che si muovono nel volume occupato dal corpo in questione e posseggono certe energie $\varepsilon$ ed impulsi $\mathbf{p}$. La forma

della dipendenza funzionale $\varepsilon$ (**p**) o, come si dice anche, la *legge della dispersione* delle eccitazioni elementari, serve come caratteristica importante per lo spettro energetico del corpo. Sottolineiamo ancora una volta che la nozione di eccitazione elementare compare come metodo di descrizione quantomeccanica del movimento di tutti gli atomi del corpo e che le quasi-particelle non si possono identificare assolutamente con singoli atomi e molecole.

Esistono diversi tipi di spettri energetici, in linea di massima, per i liquidi quantistici. A seconda del tipo di spettro il liquido avrà anche delle proprietà macroscopiche completamente diverse. Iniziamo lo studio dal liquido avente uno spettro che si potrebbe chiamare spettro *di tipo Fermi*. La teoria di questo liquido di Fermi è stata creata da *L. D. Landau* (1956-58); gli appartengono anche i risultati che verranno descritti nei §§ 1-4 [1]).

Lo spettro energetico del liquido quantistico di tipo Fermi è costruito analogamente, in un certo senso, allo spettro di un gas di Fermi perfetto (con particelle a spin 1/2). Lo stato fondamentale di quest'ultimo corrisponde al riempimento con particelle di tutti gli stati all'interno della *sfera di Fermi*, ossia della sfera nello spazio degli impulsi di raggio $p_F$, legato alla densità del gas $N/V$ (il numero di particelle per unità di volume) dalla formula

$$\frac{N}{V} = 2\,\frac{4\pi p_F^3}{3\,(2\pi\hbar)^3} = \frac{p_F^3}{3\pi^2\hbar^3} \tag{1,1}$$

(vedi V, § 57). Gli stati eccitati del gas compaiono allorché le particelle passano dagli stati della sfera riempita ad altri stati con $p > p_F$.

È ovvio che nei liquidi non esistono stati quantistici per singole particelle. Tuttavia il punto di partenza per la costruzione dello spettro per il liquido di Fermi consiste nella seguente proposizione: la classificazione dei livelli energetici resta invariata per « inclusione » graduale dell'interazione fra gli atomi, cioè passando dal gas al liquido. In questa classificazione sono le eccitazioni elementari (quasi-particelle) a fungere da particelle del gas; il loro numero coincide con il numero di atomi, e queste eccitazioni sono rette dalla statistica di Fermi.

Notiamo subito che, evidentemente, soltanto un liquido di particelle a spin semintero può avere lo spettro di questo tipo, vale a dire che lo stato di un sistema di bosoni (particelle a spin intero) non può essere descritto nei termini delle quasi-particelle regolate dalla statistica di Fermi. Al tempo stesso si deve sottolineare che lo spettro di questo tipo non può servire come proprietà universale per

---

[1]) Dobbiamo precisare, a scanso di ogni equivoco, che qui si tratta del liquido di Fermi non superfluido (o, come si dice, *normale*). Tale è l'isotopo liquido $He^3$ (con una riserva che verrà menzionata nella nota alla pag. 273).

tutti i liquidi quantistici. Il tipo di spettro dipende anche dalla natura concreta dell'interazione fra gli atomi. Quest'ultima circostanza deriva immediatamente dal semplice ragionamento seguente: se l'interazione fosse tale che gli atomi tendano ad accoppiarsi, otterremmo al limite un liquido molecolare composto di particelle (molecole) a spin intero, per il quale lo spettro in esame sarebbe impossibile a priori.

Ciascuna delle quasi-particelle ha un impulso **p** (torneremo ancora sulla questione della validità di questa affermazione). Ammettiamo che $n$ (**p**) sia la funzione di distribuzione degli impulsi delle quasi-particelle, normalizzata dalla condizione

$$\int n\, d\tau = \frac{N}{V}, \qquad d\tau = \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$$

(questa condizione verrà precisata più avanti). Il suddetto principio di classificazione parte dall'ipotesi che questa funzione così assegnata definisca univocamente l'energia $E$ del liquido e che lo stato fondamentale corrisponda alla funzione di distribuzione, in cui sono occupati tutti gli stati all'interno della sfera di Fermi di raggio $p_F$, legato alla densità del liquido mediante la stessa formula (1,1), del gas perfetto.

È importante sottolineare che l'energia completa $E$ del liquido non si riduce affatto alla somma delle energie $\varepsilon$ delle quasi-particelle. In altre parole, $E$ rappresenta un funzionale della funzione di distribuzione, che non si riduce all'integrale $\int n\varepsilon\, d\tau$ (come si verifica per un gas perfetto, quando le quasi-particelle coincidono con le particelle vere e proprie e non interagiscono le une con le altre). Poiché $E$ è esattamente il concetto primario, sorge la questione della determinazione dell'energia delle quasi-particelle tenendo conto dell'interazione tra esse.

Consideriamo a tal fine la variazione di $E$ per una variazione indefinitamente piccola della funzione di distribuzione. Essa va definita, evidentemente, dall'integrale di un'espressione che è lineare rispetto alla variazione $\delta n$, cioè avente la forma

$$\frac{\delta E}{V} = \int \varepsilon\,(p)\, \delta n\, d\tau.$$

La grandezza $\varepsilon$ rappresenta la derivata variazionale dell'energia $E$ rispetto alla funzione di distribuzione. Essa corrisponde alla variazione dell'energia del sistema quando si aggiunge una quasi-particella di impulso **p**, ed è questa grandezza che funge da hamiltoniana della quasi-particella nel campo delle altre particelle. Essa è anche un funzionale della funzione di distribuzione, vale a dire che la forma della funzione $\varepsilon$ (**p**) dipende dalla distribuzione di tutte le particelle nel liquido.

Notiamo a questo proposito che l'eccitazione elementare nel tipo di spettro considerato si può interpretare, in un certo senso, come atomo nel campo autoconcordato degli altri atomi. Tuttavia, non si può intendere questa autoconcordanza nel senso proprio della meccanica quantistica. La sua natura qui è più profonda; l'operatore hamiltoniano dell'atomo tiene conto dell'influenza delle particelle circostanti non soltanto sull'energia potenziale, ma cambia anche la dipendenza dell'operatore dell'energia cinetica dall'operatore dell'impulso.

Finora abbiamo trascurato l'esistenza di spin nelle quasi-particelle. Essendo lo spin una grandezza quantomeccanica, non si può esaminarlo in termini classici, per cui dobbiamo considerare la funzione di distribuzione come una matrice statistica nei confronti dello spin. Quanto all'energia $\varepsilon$ dell'eccitazione elementare, nel caso generale essa rappresenta non soltanto una funzione dell'impulso, ma anche un operatore rispetto alle variabili di spin, che può essere espresso in funzione dell'operatore di spin $\mathbf{s}$ della quasi-particella. In un liquido isotropo e omogeneo (che non si trova in un campo magnetico e non è ferromagnetico) l'operatore $\hat{\mathbf{s}}$ può figurare anch'esso nella funzione scalare $\varepsilon$ soltanto sotto forma di scalari $\hat{\mathbf{s}}^2$ o $(\hat{\mathbf{s}}\mathbf{p})^2$; l'espressione $\mathbf{sp}$ è impossibile in quanto rappresenta uno pseudoscalare, data la natura assiale del vettore di spin. Il quadrato $\hat{\mathbf{s}}^2$ vale $s(s+1)$, e per lo spin $s = 1/2$ lo scalare $(\hat{\mathbf{s}}\mathbf{p})^2 = p^2/4$ si riduce anch'esso a una costante indipendente da $\hat{\mathbf{s}}$. Di conseguenza, in questo caso l'energia della quasi-particella non dipende affatto dall'operatore di spin, vale a dire che tutti i livelli energetici delle quasi-particelle sono doppiamente degeneri.

L'affermazione secondo la quale le quasi-particelle posseggono spin esprime l'esistenza di questa degenerazione. In questo senso si può affermare che lo spin delle quasi-particelle nel tipo di spettro considerato vale sempre 1/2, a prescindere dal valore dello spin delle particelle vere e proprie del liquido. Infatti, per ogni spin $s$ diverso da 1/2, i termini della forma $(\hat{\mathbf{s}}\mathbf{p})^2$ condurrebbero alla scissione dei livelli $(2s+1)$-upli degeneri in $(2s+1)/2$ livelli doppiamente degeneri. In altre parole, compaiono i $(2s+1)/2$ rami distinti della funzione $\varepsilon(\mathbf{p})$ ognuno dei quali corrisponde alle « quasi-particelle di spin 1/2 ».

Come è stato già detto, se si tiene conto dello spin delle quasi-particelle la funzione di distribuzione diventa matrice o operatore $\hat{n}(\mathbf{p})$ rispetto alle variabili di spin. Questo operatore si scrive in forma esplicita come matrice hermitiana statistica $n_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$, dove $\alpha$ e $\beta$ sono gli indici matriciali di spin suscettibili di assumere i due valori $\pm 1/2$. Gli elementi diagonali della matrice determinano il numero di quasi-particelle in determinati stati di spin. Perciò dobbiamo ora scrivere la condizione di normalizzazione della funzione

di distribuzione delle quasi-particelle nella forma

$$\mathrm{Tr}\int \hat{n}\, d\tau \equiv \int n_{\alpha\alpha}\, d\tau = \frac{N}{V}, \quad d\tau = \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \tag{1,2}$$

(il simbolo Tr significa che la traccia della matrice viene calcolata rispetto agli indici di spin) [1].

Nel caso generale l'energia $\hat{\varepsilon}$ della quasi-particella è anch'essa un operatore, ossia una matrice nelle variabili di spin. Occorre scriverne la definizione come segue:

$$\frac{\delta E}{V} = \mathrm{Tr}\int \hat{\varepsilon}\delta\hat{n}\, d\tau \equiv \int \varepsilon_{\alpha\beta}\delta n_{\beta\alpha}\, d\tau. \tag{1,3}$$

Se fra la funzione di distribuzione e l'energia non esiste dipendenza di spin, cioè se $n_{\alpha\beta}$ ed $\varepsilon_{\alpha\beta}$ si riducono alla matrice unitaria

$$n_{\alpha\beta} = n\delta_{\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon\delta_{\alpha\beta}, \tag{1,4}$$

allora il calcolo della traccia nelle formule (1,2-3) si riduce semplicemente alla moltiplicazione per 2:

$$2\int n\, d\tau = \frac{N}{V}, \quad \frac{\delta E}{V} = 2\int \varepsilon\, \delta n\, d\tau. \tag{1,5}$$

È facile vedere che, in equilibrio statistico, la funzione di distribuzione delle quasi-particelle ha la forma della distribuzione di Fermi, dove la grandezza $\hat{\varepsilon}$, definita dalla (1,3), funge da energia. Infatti, in virtù della coincidenza fra le proprietà di classificazione dei livelli energetici del liquido e del gas di Fermi perfetto l'entropia $S$ del liquido viene definita dalla stessa espressione combinatoria

$$\frac{S}{V} = -\mathrm{Tr}\int \{\hat{n}\ln\hat{n} - (1-\hat{n})\ln(1-\hat{n})\}\, d\tau, \tag{1,6}$$

come nel caso del gas (vedi V, § 55). Facendo variare questa espressione per le condizioni complementari di costanza del numero totale di particelle e dell'energia totale

$$\frac{\delta N}{V} = \mathrm{Tr}\int \delta\hat{n}\, d\tau = 0, \quad \frac{\delta E}{V} = \mathrm{Tr}\int \hat{\varepsilon}\delta\hat{n}\, d\tau = 0,$$

otteniamo la distribuzione richiesta

$$\hat{n} = [e^{(\hat{\varepsilon}-\mu)/T} + 1]^{-1}, \tag{1,7}$$

dove $\mu$ è il potenziale chimico del liquido.

Quando l'energia delle quasi-particelle è indipendente dallo spin, la formula (1,7) esprime la stessa relazione esistente fra le grandezze $n$ ed $\varepsilon$:

$$n = [e^{(\varepsilon-\mu/T)} + 1]^{-1}. \tag{1,8}$$

---

[1]) Qui e dappertutto più avanti con indici ripetuti due volte è intesa, come al solito, la somma.

Per la temperatura $T = 0$ il potenziale chimico coincide con l'energia limite sulla superficie della sfera di Fermi:

$$\mu \mid_{T=0} = \varepsilon_F \equiv \varepsilon (p_F). \tag{1,9}$$

Sottolineiamo che, malgrado l'analogia formale fra l'espressione (1,8) e la distribuzione di Fermi ordinaria, essa non è identica a quest'ultima: poiché $\varepsilon$ è essa stessa funzionale di $n$, la formula (1,8) rappresenta, a rigore, una definizione complicata implicita di $n$.

Torniamo all'ipotesi che a ciascuna quasi-particella possa essere attribuito un certo impulso. La condizione di validità di questa ipotesi richiede che l'indeterminazione dell'impulso (dovuta alla lunghezza finita del cammino libero della quasi-particella) sia piccola non soltanto rispetto al valore dell'impulso stesso, ma anche rispetto alla larghezza $\Delta p$ del « dominio smussato » della distribuzione, cioè del dominio in cui essa differisce essenzialmente dalla funzione « a gradini » [1])

$$\theta (\mathbf{p}) \equiv \theta (p) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad p < p_F, \\ 0 & \text{per} \quad p > p_F. \end{cases} \tag{1,10}$$

Si vede facilmente che questa condizione viene soddisfatta se la distribuzione $n$ (**p**) differisce dalla (1,10) soltanto in un piccolo dominio in prossimità della superficie della sfera di Fermi. In effetti, in virtù del principio di Pauli, soltanto le quasi-particelle si possono diffondere reciprocamente nel dominio smussato della distribuzione; inoltre, in seguito alla diffusione esse devono passare agli stati liberi dello stesso dominio. Pertanto la probabilità d'urto è proporzionale al quadrato della larghezza di questo dominio. Ciò premesso, l'indeterminazione dell'energia e, quindi, quella dell'impulso della quasi-particella sono proporzionali anch'esse a $(\Delta p)^2$. Ne risulta con chiarezza che, per $\Delta p$ sufficientemente piccola, l'indeterminazione dell'impulso sarà piccola non soltanto rispetto a $p_F$, ma anche rispetto a $\Delta p$.

Quindi, il metodo descritto è valido soltanto per stati eccitati del liquido tali che siano definiti da una funzione di distribuzione delle quasi-particelle che differisce da un « gradino » soltanto in un dominio ristretto in prossimità della superficie di Fermi. In particolare, per le distribuzioni termodinamiche di equilibrio sono ammissibili unicamente temperature sufficientemente basse. La larghezza (rispetto all'energia) del dominio smussato della distribuzione di equilibrio è dell'ordine di grandezza di $T$. Quanto all'indeterminazione quantistica dell'energia della quasi-particella, legata agli

---

[1]) Notiamo per il seguito che la derivata

$$\theta' (p) = -\delta (p - p_F).$$

Infatti, ambedue i membri di questa uguaglianza danno lo stesso risultato (unità) integrando su qualsiasi intervallo $p$ contenente il punto $p = p_F$.

urti, essa è dell'ordine di grandezza di $\hbar/\tau$, dove $\tau$ è il tempo del cammino libero della quasi-particella. Pertanto la condizione di applicabilità della teoria è

$$\hbar/\tau \ll T. \tag{1,11}$$

Inoltre, in accordo con quanto detto sopra, il tempo $\tau$ è inversamente proporzionale al quadrato della larghezza del dominio smussato, cioè

$$\tau \backsim T^{-2},$$

cosicché la condizione (1,11) si verifica a priori per $T \to 0$. Per un liquido ad interazione non debole fra le particelle, tutti i parametri energetici coincidono, in ordine di grandezza, con l'energia ai contorni $\varepsilon_F$; in questo senso la condizione (1,11) è equivalente alla condizione $T \ll |\varepsilon_F|$ [1]).

Per le distribuzioni vicine alla distribuzione « a gradini » (a quella per $T = 0$), si può sostituire, in prima approssimazione, al funzionale $\varepsilon$ il suo valore calcolato per $n(\mathbf{p}) = \theta(p)$. Allora $\varepsilon$ diventa una certa funzione del valore dell'impulso e la formula (1,7) si trasforma in distribuzione di Fermi ordinaria.

In questo caso, in prossimità della superficie della sfera di Fermi, dove e soltanto dove la funzione $\varepsilon(\mathbf{p})$ può avere un significato fisico, la si può sviluppare in potenze della differenza $p - p_F$. Abbiamo così

$$\varepsilon - \varepsilon_F \approx v_F (p - p_F), \tag{1,12}$$

dove

$$\mathbf{v}_F = \left.\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}}\right|_{p=p_F} \tag{1,13}$$

è la « velocità » delle quasi-particelle sulla superficie di Fermi. Nel caso di un gas di Fermi perfetto, dove le quasi-particelle sono identiche alle particelle vere e proprie, abbiamo $\varepsilon = p^2/2m$ in modo che $v_F = p_F/m$. Per analogia si può introdurre per il liquido di Fermi la grandezza

$$m^* = p_F/v_F \tag{1,14}$$

e chiamarla *massa efficace* della quasi-particella; questa grandezza è positiva (vedi la fine del § 2).

Nei termini delle grandezze così introdotte si può scrivere la condizione di applicabilità della teoria come $T \ll v_F p_F$; inoltre di significato reale godono unicamente le quasi-particelle di impulso $p$ per cui $|p - p_F| \ll p_F$. Sottolineiamo ancora una volta quest'ultima circostanza e notiamo che essa conferisce un particolare carattere

---

[1]) Tuttavia, per $He^3$ liquido il dominio di applicabilità quantitativa della teoria è di fatto limitato, come lo mostra l'esperienza, a temperature $T \lesssim 0{,}1$ K (mentre $|\varepsilon_F| \approx 2{,}5$ K).

non banale alla relazione (1,1) fra $p_F$ e la densità del liquido in quanto la sua deduzione evidente (per il gas di Fermi) è basata sulla rappresentazione delle particelle negli stati che riempiono tutta la sfera di Fermi e non soltanto l'intorno della sua superficie [1]).

La massa efficace determina, in particolare, l'entropia $S$ e il calore specifico $C$ del liquido alle basse temperature. Queste grandezze sono date dalla stessa formula che per un gas perfetto (vedi V, § 58), nella quale occorre sostituire soltanto la massa $m$ della particella con la massa efficace $m^*$:

$$S = C = V\gamma T, \quad \gamma = \frac{m^* p_F}{3\hbar^3} = \left(\frac{\pi}{3}\right)^{2/3} \frac{m^*}{\hbar^2} \left(\frac{N}{V}\right)^{1/3} \tag{1,15}$$

(data la dipendenza lineare da $T$, le grandezze $S$ e $C$ coincidono). In effetti, l'espressione (1,6) dell'entropia mediante la funzione di distribuzione è identica per il liquido e per il gas, e per il calcolo dell'integrale che vi figura è essenziale unicamente il dominio degli impulsi in prossimità di $p_F$, dove le funzioni di distribuzione delle quasi-particelle nel liquido e delle particelle nel gas sono date dalla stessa espressione (1,8) [2]).

Prima di passare allo sviluppo ulteriore della teoria, facciamo la seguente osservazione. Sebbene il metodo descritto di introduzione della nozione di quasi-particella nel liquido di Fermi, in analogia completa con le particelle del gas, sia il più comodo per la costruzione sistematica della teoria, il quadro fisico legato a questo metodo presenta il seguente difetto: in esso figura la sfera di Fermi riempita delle quasi-particelle non osservabile. Si potrebbe eliminare questo difetto con una formulazione, in cui le eccitazioni elementari compaiono soltanto per $T \neq 0$. In questo quadro sarebbero le quasi-particelle all'esterno della sfera di Fermi e le « buche » all'interno di quest'ultima a fungere da eccitazioni elementari; è sufficiente attribuire alle prime (con un'approssimazione corrispondente alla formula (1,12)) l'energia $\varepsilon = v_F(p - p_F)$ e alle seconde $\varepsilon = v_F(p_F - p)$. La distribuzione statistica delle une e delle altre è data dalla formula della distribuzione di Fermi di potenziale chimico nullo (in accordo con il fatto che, in questo caso, il numero di eccitazioni elementari non è costante e viene determinato esso stesso dalla temperatura [3]))

$$n = [e^{\varepsilon/T} + 1]^{-1}. \tag{1,16}$$

---

[1]) La dimostrazione della relazione (1,1) richiede di applicare metodi matematici più complicati e verrà data più avanti, al § 20.

[2]) Per $He^3$ liquido (a pressione nulla) si ha $p_F/\hbar = 0{,}8 \cdot 10^8$ cm$^{-1}$; $m^* = 3{,}1\, m\,(He^3)$; $p_F$ viene definito in base alla densità del liquido e $m^*$ al calore specifico.

[3]) Ricordiamo (cfr. V, § 63) che in questo caso il numero di quasi-particelle $N_{qp}$ viene determinato dalla condizione di equilibrio termodinamico, ossia dall'energia libera minima $F$ quale funzione di $N_{qp}$ per temperatura

In questo quadro le eccitazioni elementari compaiono o scompaiono soltanto in coppie in modo che il numero completo di eccitazioni ad impulsi $p > p_F$ e $p < p_F$ è sempre lo stesso.

Notiamo anche che per questa definizione delle eccitazioni elementari la loro energia è necessariamente positiva; ciò rappresenta l'eccesso dell'energia del livello eccitato sull'energia del livello normale del sistema. Quanto all'energia delle quasi-particelle, definita in accordo con la formula (1,3), essa può essere sia positiva sia negativa.

Per di più, a temperàtura e pressione nulle la grandezza $\varepsilon_F = \mu$ è negativa a priori per il liquido e, quindi, i valori di $\varepsilon$ vicini a $\varepsilon_F$ sono anch'essi negativi. Ciò risulta con chiarezza dal fatto che per $T = 0$ e $P = 0$ il valore di $-\mu$ coincide con una grandezza positiva, ossia con il valore limite del calore di evaporazione del liquido, riferito a una sola particella.

## § 2. *Interazione delle quasi-particelle*

Poiché l'energia delle quasi-particelle è un funzionale della funzione della loro distribuzione, essa cambia al variare di questa funzione. La variazione dell'energia per un piccolo scarto $\delta n$ della funzione di distribuzione dal « gradino » (1,10) deve avere la forma

$$\delta\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) = \int f_{\alpha\gamma,\,\beta\delta}(\mathbf{p},\,\mathbf{p}')\,\delta n_{\delta\gamma}(\mathbf{p}')\,d\tau' \qquad (2,1)$$

ossia, più simbolicamente,

$$\delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{p}) = \mathrm{Tr}'\int \hat{f}(\mathbf{p},\,\mathbf{p}')\,\delta\hat{n}(\mathbf{p}')\,d\tau',$$

dove Tr′ significa che la traccia viene calcolata rispetto alla coppia di indici di spin corrispondenti all'impulso $\mathbf{p}'$. La funzione $\hat{f}$ si può chiamare *funzione di interazione* delle quasi-particelle (per il gas di Fermi $\hat{f} \equiv 0$). Per sua definizione questa funzione rappresenta la derivata seconda variazionale rispetto all'energia totale $E$ e, perciò, è simmetrica rispetto alle variabili $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$ e alle rispettive coppie di indici di spin:

$$f_{\alpha\gamma,\,\beta\delta}(\mathbf{p},\,\mathbf{p}') = f_{\gamma\alpha,\,\delta\beta}(\mathbf{p}',\,\mathbf{p}). \qquad (2,2)$$

Se si tiene conto della variazione (2,1), allora l'energia delle quasi-particelle in prossimità della superficie della sfera di Fermi sarà data dalla somma

$$\hat{\varepsilon}(\mathbf{p}) - \varepsilon_F = v_F(p - p_F) + \mathrm{Tr}'\int \hat{f}(\mathbf{p},\,\mathbf{p}')\,\delta\hat{n}(\mathbf{p}')\,d\tau'. \qquad (2,3)$$

---

e volume dati: $(\partial F/\partial N_{\mathrm{qp}})_{T,V} = 0$; ma questa derivata è appunto il « potenziale chimico delle quasi-particelle » (non confonderlo con il potenziale chimico $\mu$ del liquido, definito dalla derivata rispetto a $F$ e dal numero di particelle vere $N$).

In particolare, nel caso in cui le distribuzioni mantengano l'equilibrio termodinamico, il secondo termine nella formula (2,3) esprime la dipendenza dell'energia delle quasi-particelle dalla temperatura. Lo scarto $\delta\hat{n}'$ è sensibilmente diverso da zero soltanto in una banda ristretta di valori di $\mathbf{p}'$ in prossimità della superficie della sfera di Fermi; nella stessa banda si trovano gli impulsi $\mathbf{p}$ delle quasi-particelle reali. Perciò si può sostituire la funzione $\hat{f}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ nelle formule (2,1) e (2,3) con i suoi valori su questa stessa superficie, ponendo cioè $p = p' = p_F$ in modo tale che $\hat{f}$ dipenda unicamente dai versi dei vettori $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}'$.

La dipendenza spinoriale della funzione $\hat{f}$ è dovuta sia agli effetti relativistici (interazione spin-spin e spin-orbitale) sia all'interazione di scambio. Quest'ultima circostanza è più essenziale. Tenendone conto, la funzione di interazione delle quasi-particelle ha la forma (sulla superficie di Fermi)

$$\frac{p_F m^*}{\pi^2\hbar^3}\hat{f}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = F(\vartheta) + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}' G(\vartheta), \tag{2,4}$$

dove $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma}'$ sono matrici di Pauli agenti sui rispettivi indici di spin (cioè corrispondenti alle variabili $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}'$), e $F$ e $G$ due funzioni dell'angolo $\vartheta$ fra $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}'$ [1]). La forma di questa espressione è legata alla proprietà caratteristica dell'interazione di scambio: essa non dipende dall'orientazione del momento totale del sistema nello spazio, perciò gli operatori di due spin vi possono figurare sotto forma di prodotto scalare. Le funzioni $F$ e $G$, definite in base alla formula (2,4), sono adimensionali. Il fattore introdotto a tal fine nel primo membro della (2,4) rappresenta il numero di stati della quasi-particella sulla superficie di Fermi, riferito all'intervallo unitario di energie:

$$\nu(\varepsilon_F) = \frac{2d\tau}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=\varepsilon_F} = \frac{2\cdot 4\pi p_F^2}{(2\pi\hbar)^3}\left(\frac{dp}{d\varepsilon}\right)_{p_F}$$

ossia

$$\nu_F = \frac{p_F^2}{\pi^2\hbar^3 v_F} = \frac{p_F m^*}{\pi^2\hbar^3}. \tag{2,5}$$

Poiché la traccia delle matrici di Pauli è nulla, il secondo termine nella (2,4) scompare dopo il calcolo di Tr′, in modo che Tr′ $\hat{f}$ non dipende più neanche da $\boldsymbol{\sigma}$. In realtà questa indipendenza si verifica anche tenendo conto dell'interazione spin-orbitale e spin-spin. Infatti, la funzione scalare Tr′ $\hat{f}$ potrebbe contenere l'operatore di spin soltanto sotto forma di prodotto $\hat{\mathbf{s}}\,[\mathbf{p}\mathbf{p}']$ di due vettori assiali

---

[1]) In forma matriciale esplicita:

$$\frac{p_F m^*}{\pi^2\hbar^3} f_{\alpha\gamma,\,\beta\delta} = F\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + G\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\delta}. \tag{2,4a}$$

$\hat{s}$ e [pp'] (quanto alle espressioni quadratiche nelle componenti di $\hat{s}$, esse si possono trascurare in quanto per lo spin 1/2 si riducono a termini lineari in $\hat{s}$ e non contenenti $\hat{s}$). Ma questo prodotto non è invariante rispetto all'inversione del tempo e perciò non può essere associato alla grandezza invariante $\mathrm{Tr}'\, f$.

Introduciamo la notazione

$$f_{\alpha\gamma,\,\beta\gamma}(\mathbf{p},\,\mathbf{p}') = \delta_{\alpha\beta} f(\mathbf{p},\,\mathbf{p}'), \qquad f = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{Tr}'\,\hat{f} \tag{2,6}$$

che sarà molto comoda per il seguito. Dall'espressione (2,4) abbiamo

$$\frac{p_F m^*}{\pi^2 \hbar^3} f(\vartheta) = 2F(\vartheta). \tag{2,7}$$

La funzione di interazione delle quasi-particelle soddisfa una relazione integrale derivante dal principio di relatività di Galileo. La conseguenza diretta di questo principio è la coincidenza fra l'impulso dell'unità di volume del liquido e la densità del flusso della sua massa. La velocità della quasi-particella è $\partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$, cosicché il flusso delle quasi-particelle viene dato dall'integrale

$$\mathrm{Tr}\int \hat{n}\,\frac{\partial\hat{\varepsilon}}{\partial\mathbf{p}}\,d\tau.$$

Poiché il numero di quasi-particelle nel liquido coincide con il numero di particelle vere, ne segue che il trasporto totale di massa da parte delle quasi-particelle si ottiene moltiplicando il flusso del loro numero per la massa $m$ di una particella vera. Otteniamo così la seguente uguaglianza:

$$\mathrm{Tr}\int \mathbf{p}\hat{n}\,d\tau = \mathrm{Tr}\int m\,\frac{\partial\hat{\varepsilon}}{\partial\mathbf{p}}\,\hat{n}\,d\tau. \tag{2,8}$$

Ponendo $n_{\alpha\beta} = n\delta_{\alpha\beta}$ ed $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon\delta_{\alpha\beta}$, facciamo variare ambedue i membri della (2,8). Utilizzando la (2,1) e tenendo conto della notazione di $f$ nella (2,6), otteniamo

$$\int \mathbf{p}\delta n\,d\tau = m\int \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}}\,\delta n\,d\tau + m\int \frac{\partial f(\mathbf{p},\,\mathbf{p}')}{\partial\mathbf{p}}\,n\delta n'\,d\tau\,d\tau' =$$
$$= m\int \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}}\,\delta n\,d\tau - m\int f(\mathbf{p},\,\mathbf{p}')\,\frac{\partial n'}{\partial\mathbf{p}'}\,\delta n\,d\tau\,d\tau',$$

dove $n' \equiv n(\mathbf{p}')$ (nel secondo integrale è stato effettuato il cambiamento di variabili ed eseguita l'integrazione per parti). Essendo $\delta n$ arbitrario, ne deriva la relazione richiesta

$$\frac{\mathbf{p}}{m} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}} - \int f(\mathbf{p},\,\mathbf{p}')\,\frac{\partial n(\mathbf{p}')}{\partial\mathbf{p}'}\,d\tau'. \tag{2,9}$$

Per la funzione a gradini

$$n(\mathbf{p}') = \theta(p')$$

la derivata $\partial n'/\partial \mathbf{p}'$ si riduce alla funzione $\delta$

$$\frac{\partial \theta(p)}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{\mathbf{p}}{p}\,\delta(p - p_F). \tag{2,10}$$

Portando nella (2,9) la funzione $\varepsilon(\mathbf{p})$ della (1,12), in seguito sostituendo ovunque all'impulso $\mathbf{p} = p\mathbf{n}$ il valore $\mathbf{p}_F = p_F\mathbf{n}$ sulla superficie di Fermi e moltiplicando per $\mathbf{p}_F$ ambedue i membri dell'uguaglianza, otteniamo la seguente relazione fra la massa $m$ delle particelle vere e proprie e la massa efficace delle quasi-particelle:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m^*} + \frac{p_F}{(2\pi\hbar)^3}\int f(\vartheta)\cos\vartheta\, do', \tag{2,11}$$

dove $do'$ è l'elemento dell'angolo solido nella direzione $\mathbf{p}'$. Sostituendovi a $f(\vartheta)$ l'espressione (2,7), questa uguaglianza diventa

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \overline{F(\vartheta)\cos\vartheta}, \tag{2,12}$$

dove il tratto orizzontale significa che si prende la media secondo le direzioni (cioè integrazione in $do'/4\pi = \operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta/2$).

Calcoliamo ancora la compressibilità del liquido di Fermi (allo zero assoluto), cioè la grandezza $u^2 = \partial P/\partial\rho$ [1]). La densità del liquido vale $\rho = m\,N/V$, cosicché

$$u^2 = -\frac{V^2}{mN}\frac{\partial P}{\partial V}.$$

Per calcolare questa derivata, è comodo esprimerla in funzione della derivata rispetto al potenziale chimico. Osservando che quest'ultimo dipende da $N$ e $V$ soltanto nella forma del rapporto $N/V$ e, inoltre, che per $T =$ costante $= 0$ il differenziale vale $d\mu = V\,dP/N$, abbiamo

$$\frac{\partial\mu}{\partial N} = -\frac{V}{N}\frac{\partial\mu}{\partial V} = -\frac{V^2}{N^2}\frac{\partial P}{\partial V},$$

in modo che

$$u^2 = \frac{N}{m}\frac{\partial\mu}{\partial N}. \tag{2,13}$$

Poiché $\mu = \varepsilon_F$ per $T = 0$, la variazione $\delta\mu$ al variare del numero di particelle di $\delta N$ vale

$$\delta\mu = \int f(\mathbf{p}_F, \mathbf{p}')\,\delta n'\, d\tau' + \frac{\partial\varepsilon_F}{\partial p_F}\,\delta p_F. \tag{2,14}$$

Il primo termine in questa espressione fornisce la variazione della grandezza $\varepsilon(p_F)$ dovuta alla variazione della funzione di distribu-

---

[1]) Per $T = 0$ anche $S = 0$, in modo che non è necessario distinguere la compressibilità isotermica da quella adiabatica. La grandezza $u$ è definita come la nota espressione della velocità del suono nel liquido. Tuttavia, si deve tener presente che per $T = 0$, in generale, il suono normale non può propagarsi nel liquido di Fermi; vedi § 4.

zione. Il secondo termine, invece, è legato al fatto che la variazione del numero totale di particelle cambia anche il valore dell'impulso limite: in base alla (1,1) abbiamo $\delta N = Vp_F^2\delta p_F/\pi^2\hbar^3$. Siccome $\delta n'$ è sensibilmente diverso da zero soltanto per $p' \approx p_F$, allora, sostituendo nell'integrale la funzione $f$ con il suo valore sulla superficie di Fermi, possiamo scrivere

$$\int f\delta n'\, d\tau' \approx \frac{1}{2}\int f\, do' \int \delta n' \frac{2d\tau'}{4\pi} = \frac{1}{2}\, 4\pi\bar{f}\, \frac{\delta N}{4\pi V}.$$

Sostituendo questa espressione nella (2,14) e introducendo $m^*$ in base a $\partial\varepsilon_F/\partial p_F = p_F/m^*$, otteniamo

$$\frac{\partial\mu}{\partial N} = \frac{\bar{f}}{2V} + \frac{\pi^2\hbar^3}{p_F m^* V}. \tag{2,15}$$

Infine, ricavando $1/m^*$ dalla (2,11) e di nuovo tenendo conto della (1,1), abbiamo

$$u^2 = \frac{p_F^2}{3m^2} + \frac{1}{3m}\left(\frac{p_F}{2\pi\hbar}\right)^3 \int f(\vartheta)\,(1-\cos\vartheta)\, do'. \tag{2,16}$$

Partendo dalla funzione $f(\vartheta)$ nella (2,7) e utilizzando la (2,12), possiamo ridurre questa espressione alla forma

$$u^2 = \frac{p_F^2}{3mm^*}\,(1 + \overline{F(\vartheta)}). \tag{2,17}$$

La funzione $\hat{f}$ deve verificare certe condizioni che derivano da quella di stabilità dello stato fondamentale del liquido. A quest'ultima corrisponde il riempimento di tutti gli stati delle quasi-particelle all'interno della sfera di Fermi, mentre l'energia di questo stato deve essere minima rispetto a qualsiasi piccola deformazione della sfera. Senza ripetere tutti i calcoli, ne diamo soltanto il risultato finale [1]. È comodo formularlo sviluppando le funzioni $F(\vartheta)$ e $G(\vartheta)$ della (2,4) in polinomi di Legendre, cioè rappresentando queste funzioni come segue:

$$\begin{aligned} F(\vartheta) &= \sum_l (2l+1)\, F_l P_l(\cos\vartheta), \\ G(\vartheta) &= \sum_l (2l+1)\, G_l P_l(\cos\vartheta) \end{aligned} \tag{2,18}$$

(esse coincidono con le medie dei prodotti $FP_l$ e $GP_l$ per questa definizione dei coefficienti $F_l$ e $G_l$). Allora la condizione di stabilità si scrive sotto forma di disuguaglianze

$$F_l + 1 > 0, \tag{2,19}$$

$$G_l + 1 > 0. \tag{2,20}$$

[1]) Vedi *I. Ja. Pomerančuk*, ŽETF 35, 524 (1958).

Il confronto della condizione (2,19) per $l = 1$ con l'espressione (2,12) per la massa efficace mostra che quest'ultima è positiva. Quanto alla condizione (2,19) per $l = 0$, essa garantisce la positività dell'espressione (2,17) [1]).

## § 3. *Suscettività magnetica del liquido di Fermi*

Una quasi-particella a spin diverso da zero è fornita, in generale, anche di momento magnetico. Per lo spin 1/2 l'operatore di questo momento ha la forma $\beta\sigma$ (la proiezione sull'asse $z$ del momento magnetico vale $\pm\beta$). La costante $2\beta/\hbar$, che definisce il rapporto fra il momento magnetico della quasi-particella e quello meccanico $(\hbar/2)$, coincide con il valore della stessa costante per le particelle vere; è evidente che il valore di questo rapporto resta invariato qualsiasi sia il modo di sommare gli spin delle particelle per ottenere lo spin delle quasi-particelle.

L'esistenza del momento magnetico delle quasi-particelle conduce, a sua volta, al paramagnetismo del liquido. Calcoliamo la suscettività magnetica corrispondente.

L'operatore dell'energia complementare acquisita dalla quasi-particella « libera » in un campo magnetico $\mathbf{H}$ sarebbe $-\beta\sigma\mathbf{H}$. Ma per il liquido di Fermi occorre tener conto del fatto che per l'interazione delle quasi-particelle l'energia di ciascuna di esse cambierà anche per variazione della funzione di distribuzione nel campo magnetico. Pertanto, calcolando la suscettività magnetica, si deve scrivere l'operatore di variazione dell'energia della quasi-particella nella forma

$$\delta\hat{\varepsilon} = -\beta\sigma\mathbf{H} + \mathrm{Tr}' \int \hat{f}\delta\hat{n}'\, d\tau', \tag{3,1}$$

Quanto alla variazione della funzione di distribuzione, essa stessa si esprime in funzione di $\delta\hat{\varepsilon}$ in base a $\delta\hat{n} = (\partial n/\partial\varepsilon)\,\delta\hat{\varepsilon}$ [2]); in tal modo per $\delta\hat{\varepsilon}$ otteniamo l'equazione

$$\delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{p}) = -\beta\sigma\mathbf{H} + \mathrm{Tr}' \int \hat{f}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\, \frac{dn'}{d\varepsilon'}\, \delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{p}')\, d\tau'. \tag{3,2}$$

---

[1]) Per $l = 1$ è anche valida la disuguaglianza $F_1 > G_1$. Per la sua deduzione vedi *A. J. Legget*, Ann. of Phys. **46**, 76, 1968.

[2]) Calcolando l'aggiunta $\delta n$ dipendente dal campo, si può trascurare la variazione del potenziale chimico. La variazione della grandezza macroscopica $\mu$ nel liquido isotropo non può essere che quadratica rispetto al campo $\mathbf{H}$ (rappresentando una grandezza infinitesima per il calcolo della suscettività), mentre $\delta\hat{\varepsilon}$ è un infinitesimo del primo ordine rispetto al campo. Notiamo anche che, data la piccolezza della suscettività magnetica del liquido, qui si può fare a meno della distinzione fra l'intensità e l'induzione del campo nel liquido.

Più avanti avremo bisogno della soluzione di questa equazione soltanto sulla superficie della sfera di Fermi. Cerchiamola nella forma

$$\delta\hat{\varepsilon} = -\frac{\beta}{2} g\sigma\mathbf{H}, \tag{3,3}$$

dove $g$ è una costante. Nel caso della funzione a gradini $n(\mathbf{p}') = \theta(p')$ abbiamo

$$\frac{dn'}{d\varepsilon'} = -\delta(\varepsilon' - \varepsilon_F),$$

cosicché l'integrazione in $dp' = d\varepsilon'/v_F$ si riduce al calcolo dell'espressione integranda sulla superficie di Fermi. Sostituendovi la funzione $\hat{f}$ della (2,4) e osservando che per le matrici di Pauli

$$\mathrm{Tr}\,\sigma = 0, \quad \mathrm{Tr}'(\sigma\sigma')\sigma' = \frac{1}{3}\sigma\,\mathrm{Tr}'\,\sigma'\sigma' = 2\sigma,$$

troviamo che $g = 2 - g\overline{G(\vartheta)}$, ossia

$$g = \frac{2}{1+\overline{G(\vartheta)}}, \tag{3,4}$$

dove il tratto orizzontale significa di nuovo (così come nella (2,12)) la media secondo le direzioni.

La suscettività $\chi$ viene determinata dall'espressione per il momento magnetico dell'unità di volume del liquido:

$$\chi\mathbf{H} = \beta\,\mathrm{Tr}\int \sigma\,\delta\hat{n}\,d\tau = \beta\,\mathrm{Tr}\int \sigma\delta\hat{\varepsilon}\,\frac{\partial n}{\partial\varepsilon}\,d\tau$$

ossia, dopo l'integrazione con la funzione a gradini $n(\mathbf{p})$,

$$\chi\mathbf{H} = -\beta\,\frac{p_F m^*}{2\pi^2\hbar^3}\,\mathrm{Tr}\,\sigma\delta\hat{\varepsilon}(p_F).$$

Infine, sostituendovi le (3,3-4) e osservando che $\mathrm{Tr}\,(\sigma\mathbf{H})\,\sigma = 2\mathbf{H}$, otteniamo

$$\chi = \frac{\beta^2 p_F m^*}{\pi^2\hbar^3(1+\overline{G})} = \frac{3\gamma\beta^2}{\pi^2(1+\overline{G})}, \tag{3,5}$$

dove $\gamma$ è il coefficiente che figura nella legge lineare del calore specifico (1,15). L'espressione $\chi = 3\gamma\beta^2/\pi^2$ è la suscettività del gas di Fermi degenere composto di particelle a momento magnetico $\beta$ (vedi V, la formula (59,5)). Quanto al fattore $(1+\overline{G})^{-1}$, esso esprime la distinzione fra il liquido di Fermi e il gas di Fermi [1]).

Notiamo che la condizione di stabilità (2,20) con $l = 0$ coincide con la condizione $\chi > 0$.

---

[1]) Per $He^3$ si ha $\overline{G} \approx -2/3$.

## § 4. *Suono nullo*

Gli stati di non equilibrio del liquido di Fermi vengono descritti dalle funzioni di distribuzione delle quasi-particelle che dipendono non soltanto dagli impulsi, ma anche dalle coordinate e dal tempo. Queste funzioni $\hat{n}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ soddisfano un'equazione cinetica della forma

$$\frac{d\hat{n}}{dt} = \mathrm{St}\,\hat{n}, \tag{4,1}$$

dove St $\hat{n}$ è il cosiddetto integrale degli urti, che determina la variazione del numero di quasi-particelle in un dato elemento di volume di fase, variazione condizionata dagli urti reciproci fra le quasi-particelle [1]).

La derivata totale rispetto al tempo nell'espressione (4,1) tiene conto sia della dipendenza esplicita di $\hat{n}$ da $t$, che di quella implicita dovuta alla variazione delle coordinate, dell'impulso e delle variabili di spin della quasi-particella in accordo con le sue equazioni di moto. La specificità del liquido di Fermi sta nel fatto che, oltre a $\hat{n}$, anche $\hat{\varepsilon}$ dipende dalle coordinate in un liquido non omogeneo, in quanto l'energia della quasi-particella rappresenta un funzionale della funzione di distribuzione.

Per le distribuzioni $\hat{n}$ che differiscono poco da quella di equilibrio $n_0$ scriviamo

$$\hat{n}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = n_0(\mathbf{p}) + \delta\hat{n}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t). \tag{4,2}$$

In questo caso l'energia della quasi-particella vale $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 + \delta\hat{\varepsilon}$, dove $\varepsilon_0$ è l'energia corrispondente alla distribuzione d'equilibrio, e $\delta\hat{\varepsilon}$ è data dall'espressione (2,1) in modo che

$$\frac{\partial\hat{\varepsilon}}{\partial\mathbf{r}} = \frac{\partial\delta\hat{\varepsilon}}{\partial\mathbf{r}} = \mathrm{Tr}' \int \hat{f}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{\partial\delta\hat{n}(\mathbf{p}')}{\partial\mathbf{r}}\, d\tau'. \tag{4,3}$$

In assenza di campo magnetico esterno, $\varepsilon_0$ e $n_0$ non dipendono dallo spin.

La dipendenza esplicita di $\hat{n}$ dal tempo $d\hat{n}/dt$ è rappresentata dal termine

$$\frac{\partial\hat{n}}{\partial t} = \frac{\partial\delta\hat{n}}{\partial t}.$$

---

[1]) Il contenuto del presente paragrafo richiede la conoscenza del concetto di equazione cinetica e, in questo senso, esce dai limiti del volume. Tuttavia senza equazione cinetica (e senza le sue applicazioni in questo paragrafo e in quelli successivi) la formulazione della teoria del liquido di Fermi sarebbe non sufficientemente completa. Qui avremo bisogno soltanto dell'equazione senza integrale degli urti; le questioni relative alla forma concreta dell'integrale degli urti verranno studiate in un altro volume, dedicato alla cinetica fisica.

Quanto alla dipendenza in funzione delle coordinate e dell'impulso, essa corrisponde ai termini

$$\frac{\partial \hat{n}}{\partial \mathbf{r}} \dot{\hat{\mathbf{r}}} + \frac{\partial \hat{n}}{\partial \mathbf{p}} \dot{\hat{\mathbf{p}}}.$$

L'energia della quasi-particella $\hat{\varepsilon}$ svolge il ruolo di hamiltoniana. In virtù delle equazioni di Hamilton abbiamo

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}} = \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\hat{\mathbf{p}}} = -\frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \mathbf{r}}.$$

Pertanto otteniamo, a meno di termini superiori a quelli del primo ordine in $\delta\hat{n}$,

$$\frac{\partial \delta\hat{n}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \delta\hat{\varepsilon}}{\partial \mathbf{r}}.$$

Infine, la variazione nel tempo della funzione $\hat{n}$ quale operatore delle variabili di spin è data, in accordo con le regole generali della meccanica quantistica, dal commutatore

$$\frac{i}{\hbar} \{\hat{\varepsilon}, \hat{n}\}. \tag{4,4}$$

Tuttavia, per $n_0$ ed $\varepsilon_0$ indipendenti dallo spin, in questo commutatore non esistono termini del primo ordine in $\delta\hat{n}$.

Riunendo i termini suindicati, otteniamo l'equazione

$$\frac{\partial \delta\hat{n}}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \delta\hat{n}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \delta\hat{\varepsilon}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} = \mathrm{St}\, \hat{n}. \tag{4,5}$$

Prima di iniziare l'uso dell'equazione cinetica, soffermiamoci sulle condizioni per la sua applicabilità. Nell'utilizzare le equazioni classiche (in coordinate ed impulso) abbiamo supposto allo stesso tempo quasi-classico il movimento delle quasi-particelle; questa supposizione si trova essenzialmente già alla base della stessa descrizione del liquido mediante una funzione di distribuzione dipendente contemporaneamente dalle coordinate e dagli impulsi delle quasi-particelle. La condizione di quasi-classicità sta nel fatto che la lunghezza d'onda di de Broglie delle quasi-particelle $\hbar/p_F$ è piccola rispetto alla lunghezza caratteristica $L$, sulla quale la funzione $n$ varia essenzialmente. Introducendo, al posto di $L$, il « vettore d'onda » di non omogeneità $k \sim 1/L$, scriviamo questa condizione nella forma [1])

$$\hbar k \ll p_F. \tag{4,6}$$

La frequenza $\omega$ di variazione della funzione di distribuzione, che viene stabilita per un dato $k$, è dell'ordine di grandezza di $\omega \sim v_F k$

[1]) Secondo la definizione (1,1) $\hbar/p_F$ è dell'ordine di grandezza delle distanze interatomiche, cosicché la condizione (4,6) è molto debole.

e soddisfa automaticamente la condizione

$$\hbar\omega \ll \varepsilon_F. \tag{4,7}$$

Quanto alla relazione esistente fra $\hbar\omega$ e la temperatura $T$, essa può essere qualsiasi. Se $\hbar\omega \gg T$, allora è la grandezza $\hbar\omega$ a fungere da larghezza del dominio smussato della funzione di distribuzione; quindi, la (4,7) è una condizione necessaria di applicabilità di tutta la teoria; essa garantisce che l'indeterminazione quantistica dell'energia della quasi-particella (legata agli urti reciproci) sia piccola rispetto a $\hbar\omega$.

Applichiamo ora l'equazione cinetica all'analisi dei movimenti vibratori del liquido di Fermi.

A temperature basse, ma diverse da zero, nel liquido di Fermi si producono urti reciproci delle quasi-particelle; fra l'altro, il tempo del loro cammino libero è $\tau \backsim T^{-2}$. Il carattere delle onde di propagazione nel liquido dipende essenzialmente dal valore del prodotto $\omega\tau$.

Se $\omega\tau \ll 1$ (ciò che equivale di fatto alla condizione che la lunghezza del cammino $l$ della quasi-particella sia piccola rispetto alla lunghezza d'onda $\lambda$), gli urti fanno in tempo a stabilire l'equilibrio termodinamico in ogni elemento di volume del liquido (piccolo rispetto a $\lambda$). Quindi, qui abbiamo a che fare con le onde sonore idrodinamiche ordinarie che si propagano alla velocità $u = \sqrt{\partial P/\partial\rho}$. L'assorbimento di onde sonore per $\omega\tau \ll 1$ è piccolo, ma all'aumentare di $\omega\tau$ cresce fino a diventare molto forte per $\omega\tau \sim 1$, quando la propagazione di onde sonore è impossibile [1]).

All'aumentare ulteriore di $\omega\tau$, quando già $\omega\tau \gg 1$, nel liquido di Fermi di nuovo è possibile la propagazione di onde che, tuttavia, sono di altra natura fisica. In queste vibrazioni gli urti delle quasi-particelle non giocano più nessun ruolo e l'equilibrio termodinamico non si riesce a stabilire in ogni elemento di volume. Questo processo può essere supposto come verificantesi alla temperatura dello zero assoluto. Queste onde sono dette *suono nullo*.

In accordo con quanto detto sopra, per $\omega\tau \gg 1$ si può omettere l'integrale degli urti nell'equazione cinetica; allora

$$\frac{\partial\delta\hat{n}}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial\delta\hat{n}}{\partial\mathbf{r}} - \frac{\partial n_0}{\partial\mathbf{p}}\frac{\partial\delta\hat{\varepsilon}}{\partial\mathbf{r}} = 0, \tag{4,8}$$

dove $\mathbf{v} = \partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$ è la velocità delle quasi-particelle, calcolata in base all'energia non perturbata $\varepsilon$ ($\mathbf{v} = v_F\mathbf{n}$, dove $\mathbf{n}$ è il vettore unità nella direzione $\mathbf{p}$); qui e più avanti omettiamo l'indice 0 di $\varepsilon$.

---

[1]) Per $\omega\tau \ll 1$ il coefficiente di assorbimento del suono vale $\gamma \sim \omega^2\eta/\rho u^3$, dove $\eta$ è la viscosità del liquido. Per l'ordine di grandezza abbiamo $u \sim v_F$, $\eta/\rho \sim v_F l \sim v_F^2\tau$, dove $v_F$ è la velocità delle quasi-particelle (indipendente dalla temperatura), in modo che $\eta \backsim T^{-2}$ (*I. Ja. Pomerančuk*, 1950). In questo caso $\gamma u/\omega \sim \omega\tau \backsim \omega/T^2$.

Per $T = 0$ la funzione di distribuzione d'equilibrio $n_0$ è rappresentata dalla funzione a gradini $\theta(p)$, che si interrompe in prossimità dell'impulso limite $p = p_F$. La sua derivata è

$$\frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} = -\mathbf{n}\delta(p - p_F) = -\mathbf{v}\delta(\varepsilon - \varepsilon_F).$$

Supponendo che nell'onda la dipendenza di $\delta\hat{n}$ dal tempo e dalle coordinate sia data dal fattore $\exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]$, cercheremo la soluzione dell'equazione cinetica nella forma

$$\delta\hat{n} = \delta(\varepsilon - \varepsilon_F)\,\hat{\nu}(\mathbf{n})\,e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}. \tag{4,9}$$

Allora l'equazione (4,8) con $\partial\delta\hat{\varepsilon}/\partial\mathbf{r}$ dalla (4,3) diventa

$$(\omega - v_F\mathbf{nk})\,\hat{\nu}(\mathbf{n}) = \mathbf{nk}\frac{p_F^2}{(2\pi\hbar)^3}\,\mathrm{Tr}'\int \hat{f}(\mathbf{n}, \mathbf{n}')\,\hat{\nu}(\mathbf{n}')\,do', \tag{4,10}$$

dove $\mathbf{n}$ e $\mathbf{n}'$ sono due vettori unità nelle direzioni di $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}'$, mentre l'integrazione va eseguita rispetto alle direzioni $\mathbf{n}'$.

Consideriamo le vibrazioni (suono nullo) che non incidono sulle caratteristiche di spin del liquido. Ciò significa che non soltanto la funzione di distribuzione d'equilibrio, ma anche la sua « perturbazione » $\delta n$ è indipendente dalle variabili di spin. La variazione della funzione di distribuzione per vibrazioni in quest'onda si riduce alla deformazione della superficie limite di Fermi (una sfera nella distribuzione imperturbata) che resta intanto come frontiera netta fra gli stati riempiti e non delle quasi-particelle. Quanto alla funzione $\nu(\mathbf{n})$, essa rappresenta il valore della traslazione (in unità di energia) di questa superficie in una data direzione $\mathbf{n}$.

Poiché la funzione $\nu(\mathbf{n}')$ è indipendente dalle variabili di spin, l'operazione $\mathrm{Tr}'$ nella (4,10) viene applicata unicamente alla funzione $\hat{f}$. Scrivendo quest'ultima nella forma (2,4), vremo $\mathrm{Tr}'\,\hat{f} = (2\pi^2\hbar^3/p_F m^*)\,F(\vartheta)$. Quindi, l'operatore $\sigma$ non figura più nell'equazione che ora assume la forma

$$(\omega - \mathbf{kv})\,\nu(\mathbf{n}) = \mathbf{kv}\int F(\vartheta)\,\nu(\mathbf{n}')\,\frac{do'}{4\pi}. \tag{4,11}$$

Consideriamo la direzione $\mathbf{k}$ come asse polare e supponiamo che gli angoli $\theta$, $\varphi$ definiscano la direzione $\mathbf{n}$. Introducendo anche la velocità di propagazione dell'onda $u_0 = \omega/k$ e la notazione $s = u_0/v_F$, scriviamo infine l'equazione ottenuta nella forma

$$(s - \cos\theta)\,\nu(\theta, \varphi) = \cos\theta\int F(\vartheta)\,\nu(\theta', \varphi')\,\frac{do'}{4\pi}. \tag{4,12}$$

Questa equazione integrale definisce, in principio, la velocità di propagazione delle onde e la funzione $\nu(\mathbf{n}')$ in esse. Notiamo subito che nel caso di vibrazioni che non si smorzano (le uniche che qui ci interessano), il valore di $s$ deve essere superiore a 1, vale a

dire che si deve avere

$$u_0 > v_F. \tag{4,13}$$

L'origine di questa disuguaglianza diventa chiara se riscriviamo l'espressione (4,12) nella forma

$$\tilde{\nu}(\theta, \varphi) = \cos\theta \int F(\vartheta) \frac{\tilde{\nu}(\theta', \varphi')}{s - \cos\theta'} \frac{do'}{4\pi},$$

dove al posto di $\nu$ è stata introdotta un'altra funzione incognita $\tilde{\nu} = (s - \cos\theta)\,\nu$. Per $s = \omega/kv_F < 1$, l'espressione integranda ha un polo nel punto $\cos\theta' = s$; affinché l'integrale abbia senso, si deve aggirare questo polo secondo una determinata regola nel piano della variabile complessa $\cos\theta'$. Con questo aggiramento l'integrale ottiene una parte immaginaria, per cui la frequenza $\omega$ acquista anch'essa una parte immaginaria (per un dato $k$ reale), il che significa lo smorzamento dell'onda. Il significato fisico dell'uguaglianza $\cos\theta = u_0/v_F$ (corrispondente al polo) esprime la condizione di radiazione di Čerenkov delle onde di suono nullo da parte delle quasi-particelle [1]).

A titolo di esempio consideriamo il caso in cui la funzione $F(\vartheta)$ si riduca a una costante (che indichiamo con $F_0$). L'integrale a secondo membro dell'equazione (4,12) non dipende, in questo caso, dagli angoli $\theta$, $\varphi$. Perciò la funzione cercata $\nu$ ha la forma

$$\nu = \text{costante} \cdot \frac{\cos\theta}{s - \cos\theta}. \tag{4,14}$$

Quindi, la superficie di Fermi acquista la forma di una superficie di rotazione protesa in avanti nella direzione di propagazione dell'onda e schiacciata in direzione opposta. Questa anisotropia significa che gli stati del liquido in ogni elemento del suo volume sono privi di equilibrio: in equilibrio tutte le proprietà del liquido devono essere isotrope e, quindi, la superficie di Fermi deve essere sferica. A titolo di paragone indichiamo che a un'onda acustica ordinaria corrisponde una superficie di Fermi sferica di raggio oscillante (l'impulso limite $p_F$ oscilla con la densità del liquido), spostata come un tutt'uno di una grandezza legata alla velocità del liquido nell'onda; la funzione corrispondente $\nu$ ha la forma $\nu = \delta p_F + \text{costante} \cdot \cos\theta$.

---

[1]) Questo meccanismo di smorzamento, detto smorzamento di Landau, verrà studiato in dettaglio nel volume X in relazione a vibrazioni del plasma. La regola di aggiramento del polo nell'integrale viene stabilita mediante la sostituzione di $\omega$ con $\omega + i0$ (cioè $s \to s + i0$). Il significato di questa sostituzione sta nel garantire che le perturbazioni siano finite in tutti gli istanti precedenti (compreso quello per $t \to -\infty$).

Per definire la velocità di propagazione dell'onda di suono nullo $u_0$, effettuiamo la sostituzione della (4,14) nella (4,12) e otteniamo

$$F_0 \int_0^\pi \frac{\cos\theta}{s-\cos\theta} \frac{2\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta}{4\pi} = 1.$$

Dopo l'integrazione otteniamo un'equazione che definisce implicitamente la velocità $u_0$ in base a una data grandezza $F_0$:

$$\frac{s}{2} \ln \frac{s+1}{s-1} - 1 = \frac{1}{F_0}. \tag{4,15}$$

La funzione a primo membro dell'equazione decresce, restando sempre positiva, da $\infty$ a 0 al variare di $s$ da 1 a $\infty$. Ne segue che le onde considerate possono esistere soltanto per $F_0 > 0$. Sottolineiamo che la possibilità di propagazione del suono nullo dipende quindi dalle proprietà di interazione delle quasi-particelle nel liquido di Fermi.

Per $F_0 \to 0$ stabiliamo in base alla (4,15) che $s$ tende a 1 secondo la legge

$$s - 1 \approx \frac{2}{e^2} e^{-2/F_0}. \tag{4,16}$$

Questo caso ha un significato più generale della formula (4,15), nella quale è supposto che $F$ = costante $\equiv F_0$. Esso corrisponde al suono nullo in un gas di Fermi quasi-perfetto, qualunque sia la forma della funzione $F(\vartheta)$. Infatti, a un gas quasi-perfetto corrisponde una funzione $F(\vartheta)$ piccola in valore assoluto. Si vede dall'equazione (4,12) che in questo caso $s$ si avvicina a 1 e la funzione $\nu$ differisce sensibilmente da zero soltanto per piccoli angoli $\theta$. Ciò premesso, considerando soltanto il dominio dei piccoli angoli, si possono sostituire alla funzione $F(\vartheta)$ nell'integrale a secondo membro della (4,12) i suoi valori per $\vartheta = 0$ (per $\theta = 0$ e $\theta' = 0$ anche $\vartheta = 0$). Come risultato, noi torniamo di nuovo alle formule (4,14) e (4,16), dove la costante $F_0$ è sostituita con $F(0)$ [1]). Notiamo che in un gas debolmente non perfetto la velocità del suono nullo supera di $\sqrt{3}$ volte la velocità del suono normale. Abbiamo infatti per la prima velocità $u_0 \approx v_F$, e per la seconda dalla formula (2,17) (trascurandovi $\overline{F}$ e ponendo $m^* \approx m$) ricaviamo $u^2 \approx p_F^2/3m^{*2} = v_F^2/3$.

Nel caso generale di dipendenza arbitraria di $F(\vartheta)$ la soluzione dell'equazione (4,12) è non univoca. Essa ammette, in principio, l'esistenza di tipi diversi di suono nullo, i quali differiscono per la dipendenza angolare delle loro ampiezze $\nu(\theta, \varphi)$ e si propagano a

---

[1]) Le vibrazioni corrispondenti al suono nullo in un gas di Fermi debolmente non perfetto sono state studiate originariamente da *Ju. L. Klimontovci* e *V. P. Silin* (1952).

velocità diverse. In questo caso, accanto a soluzioni simmetrico-assiali $\nu(\theta)$, possono esistere ugualmente soluzioni asimmetriche in cui $\nu$ contiene i fattori azimutali $e^{\pm im\varphi}$, dove $m$ sono degli interi (vedi il problema). Notiamo che per tutte le soluzioni di questo tipo l'integrale $\int \nu \, do = 0$, ossia il volume contenuto all'interno della sfera di Fermi, resta invariato; ciò significa che le vibrazioni si producono senza variazione della densità del liquido.

La possibilità di propagazione di onde nel liquido di Fermi allo zero assoluto significa che il suo spettro energetico può contenere un ramo corrispondente alle eccitazioni elementari di impulso $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ e di energia $\varepsilon = \hbar\omega = u_0 p$ e rappresentante « quanti del suono nullo ». Il fatto che il suono nullo (con un $\mathbf{k}$ dato qualsiasi) possa avere un'intensità arbitraria (piccola) significa, nei termini delle eccitazioni elementari, che queste ultime possono riempire tutti gli stati quantistici in un numero qualsiasi; in altre parole, esse sono regolate dalla statistica di Bose e formano, come si dice, il *ramo di Bose* dello spettro del liquido di Fermi. Sottolineiamo, tuttavia, che nei limiti della teoria di Landau sarebbe sbagliato introdurre termini additivi corrispondenti a questo ramo nelle grandezze termodinamiche del liquido di Fermi, in quanto queste ultime contengono potenze più elevate della temperatura ($T^3$ del calore specifico) che non le prime correzioni alla teoria approssimata in questione.

La questione inerente all'assorbimento del suono nullo richiede che siano studiati gli urti di quasi-particelle, ed esce fuori dal contenuto del presente volume.

## PROBLEMA

Trovare la velocità di propagazione di onde asimmetriche del suono nullo per $F = F_0 + F_1 \cos\vartheta$.

*Soluzione.* Per

$$F = F_0 + F_1 (\cos\theta \cos\theta' + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta' \cos(\varphi - \varphi'))$$

possono esistere delle soluzioni con $\nu \backsim e^{\pm i\varphi}$. Ponendo infatti $\nu = f(\theta)\, e^{i\varphi}$, sostituendo questa espressione nella (4,12) e integrando in $d\varphi'$, otteniamo

$$(s - \cos\theta)\, f = \frac{F_1}{4} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \int_0^\pi \operatorname{sen}^2\theta' f(\theta')\, d\theta'.$$

Di qui

$$\nu = \text{costante} \cdot \frac{\operatorname{sen}\theta \cos\theta}{s - \cos\theta}\, e^{i\varphi}.$$

Portando di nuovo questa espressione nell'equazione considerata, otteniamo la relazione

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta}{s - \cos \theta} d\theta = \frac{4}{F_1},$$

che determina la dipendenza della velocità di propagazione da $F_1$. L'integrale a primo membro dell'uguaglianza rappresenta una funzione di $s$ decrescente monotonamente. Pertanto il suo più grande valore si ottiene per $s = 1$. Calcolando l'integrale per $s = 1$, troviamo che la propagazione di un'onda asimmetrica del tipo in esame è possibile per $F_1 > 6$ [1]).

## § 5. *Onde di spin nel liquido di Fermi*

Oltre alle soluzioni $\nu$ (**n**) indipendenti dallo spin, che abbiamo studiato al paragrafo precedente, l'equazione (4,10) ammette anche soluzioni della forma

$$\hat{\nu} = \sigma \mu (\mathbf{n}), \tag{5,1}$$

nelle quali la variazione della funzione di distribuzione delle quasi-particelle dipende dalla proiezione del loro spin. Perciò queste onde si possono chiamare *onde di spin.*

Sostituendo la (5,1) nella (4,10), considerando di nuovo la funzione $\hat{f}$ nella forma (2,4) e osservando che $\mathrm{Tr}' \sigma' (\sigma\sigma') = 2\sigma$, otteniamo (dopo aver diviso per $\sigma$)

$$(s - \cos \theta) \mu (\theta, \varphi) = \cos \theta \int G (\vartheta) \mu (\theta', \varphi') \frac{do'}{4\pi}. \tag{5,2}$$

Così, per ogni componente del vettore $\mu$ si ottiene un'equazione che differisce dalla (4,12) soltanto per la sostituzione di $F$ con $G$. Perciò tutti i calcoli eseguiti nel § 4 si possono applicare anche alle onde di spin [2]).

Onde di spin di altro tipo si possono propagare nel liquido di Fermi in presenza di campo magnetico (*V. P. Silin*, 1958). Ci limiteremo qui allo studio di vibrazioni con $\mathbf{k} = 0$ in cui $\delta\hat{n}$ non dipende dalle coordinate.

In presenza di campo magnetico **H**, le vibrazioni già « imperturbate » dell'energia delle quasi-particelle e la loro funzione di distribuzione dipendono dallo spin. Queste dipendenze sono interconnesse

---

[1]) Per $He^3$ liquido si possono calcolare $F_0$ e $F_1$ mediante le formule (2,12) e (2,17) a partire dai noti valori di $m^*$ e $u^2$: $F_0 = 10{,}8$ e $F_1 = 6{,}3$ (a pressione nulla).

[2]) Per $He^3$ liquido si ha $G_0 = \overline{G(\vartheta)} < 0$ (vedi la nota alla pag. 27). Perciò la propagazione di onde del dato tipo è impossibile in questo liquido.

e vengono espresse dalle formule (cfr. § 3)

$$\hat{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0(\mathbf{p}) - \beta_1 \sigma \mathbf{H}, \quad \beta_1 = \beta/(1+\bar{G}), \tag{5,3}$$

$$\hat{n}_0 = n_0(\mathbf{p}) - \frac{dn_0}{d\varepsilon}\beta_1 \sigma \mathbf{H} = n_0(\mathbf{p}) + \delta(\varepsilon - \varepsilon_F)\beta_1 \sigma \mathbf{H}, \tag{5,4}$$

dove $\varepsilon_0(\mathbf{p})$ è l'energia in assenza di campo; l'indice 0 ricorda di nuovo che queste espressioni si riferiscono al liquido in equilibrio.

Cerchiamo di nuovo la piccola parte variabile della funzione di distribuzione nell'onda nella forma

$$\delta\hat{n} = \delta(\varepsilon - \varepsilon_F)\sigma\mu(\mathbf{n})\, e^{-i\omega t}.$$

La variazione corrispondente dell'energia della quasi-particella è

$$\delta\hat{\varepsilon} = \sigma \int \mu(\mathbf{n}')\, G(\vartheta) \frac{do'}{4\pi} \cdot e^{-i\omega t}.$$

Ora, nell'equazione cinetica si deve tener conto del termine (4,4) a commutatore $\{\hat{\varepsilon}, \hat{n}\}$; per le distribuzioni indipendenti dalle coordinate questa equazione diventa

$$\frac{\partial \delta\hat{n}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}\{\hat{\varepsilon}, \hat{n}\} = 0. \tag{5,5}$$

Abbiamo, a meno di termini lineari in $\delta\hat{n}$,

$$\{\hat{\varepsilon}, \hat{n}\} = -\beta_1 \{\sigma\mathbf{H}, \delta\hat{n}\} + \beta_1 \delta(\varepsilon - \varepsilon_F)\{\delta\hat{\varepsilon}, \sigma\mathbf{H}\}.$$

I commutatori che qui figurano vengono determinati dalla formula

$$\{\sigma\mathbf{a}, \sigma\mathbf{b}\} = 2i\sigma\,[\mathbf{ab}],$$

dove **a** e **b** sono due vettori arbitrari (vedi III, la formula (55,10)); come risultato, l'equazione cinetica si riduce alla forma

$$i\omega\mu(\mathbf{n}) = \frac{2\beta_1}{\hbar}[\mathbf{H}\rho(\mathbf{n})], \tag{5,6}$$

dove si è posto

$$\rho(\mathbf{n}) = \mu(\mathbf{n}) + \int \mu(\mathbf{n}')\, G(\vartheta) \frac{do'}{4\pi}. \tag{5,7}$$

Nel caso generale la soluzione dell'equazione (5,6) può essere sviluppata in serie di funzioni sferiche $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ (ad asse polare lungo **H**). Ogni termine dello sviluppo rappresenta un tipo di vibrazioni di frequenza propria $\omega_{lm}$.

Alla prima di queste frequenze, $\omega_{00}$, corrispondono vibrazioni con $\mu$ = costante; in questo caso $\rho = \mu(1 + \bar{G})$ e l'equazione (5,6) si riduce alla forma

$$i\omega_{00}\mu = \frac{2\beta}{\hbar}[\mathbf{H}\mu];$$

le vibrazioni sono trasversali rispetto al campo ($\mu \perp \mathbf{H}$). Riscrivendo l'equazione in componenti (nel piano perpendicolare a **H**) e for-

mando il determinante di questo sistema, troviamo la frequenza

$$\omega_{00} = 2\beta H/\hbar. \tag{5,8}$$

Ricordiamo che $\beta$ è il momento magnetico della particella (vera) del liquido. Così, la frequenza $\omega_{00}$ risulta essere per niente dipendente dalle proprietà specifiche del liquido. Quanto ai valori di tutte le altre frequenze $\omega_{lm}$, essi dipendono dalla forma concreta della funzione $G(\vartheta)$.

## § 6. *Gas di Fermi quasi-perfetto degenere con repulsione fra le particelle*

La questione sulle proprietà termodinamiche di un gas « quasi-perfetto » degenere non ha significato fisico diretto, in quanto i gas realmente esistenti nella natura si condensano a temperature prossime allo zero assoluto. Cionondimeno, questa questione presenta un interesse metodologico rilevante per cui è opportuno studiarla per un modello di gas immaginato le cui particelle interagiscono in modo tale da escluderne la condensazione.

La condizione per cui un gas sia debolmente non perfetto consiste nella piccolezza del raggio d'azione $r_0$ delle forze molecolari rispetto alla distanza media fra le particelle $l \sim (V/N)^{1/3}$. Accanto alla condizione $r_0 \ll l$, sussiste ugualmente la disuguaglianza

$$pr_0/\hbar \ll 1 \tag{6,1}$$

per gli impulsi $p$ delle particelle. Infatti, per un gas di Fermi degenere l'impulso limite $p_F$ è dato dalla formula (1,1) in base alla quale $p_F/\hbar \sim (N/V)^{1/3} \ll 1/r_0$.

Considereremo qui soltanto l'interazione a due a due fra le particelle e, per semplicità, supporremo che questa interazione $U(r)$ sia indipendente dagli spin delle particelle. Il nostro scopo sta nel calcolare i primi termini dello sviluppo delle grandezze termodinamiche in potenze del rapporto $r_0/l$ applicando la teoria quantomeccanica delle perturbazioni. La difficoltà è dovuta al fatto che, per un aumento rapido dell'energia di interazione fra le particelle alle piccole distanze, la teoria delle perturbazioni (detta anche approssimazione di Born) è in realtà inapplicabile agli urti tra esse. Tuttavia, si può superare questa difficoltà nel seguente modo.

Nel caso limite degli urti « lenti » (quali essi sono per la condizione (6,1)), l'ampiezza della diffusione reciproca di particelle di massa $m$ tende a un limite costante $-a$, il quale è dato, nell'approssimazione di Born, dalla seguente espressione (vedi III, la formula (126,13)):

$$-a = -\frac{m}{4\pi\hbar^2} U_0, \quad U_0 = \int U(r)\, d^3x; \tag{6,2}$$

inoltre, questo limite corrisponde allo stato $s$ di una coppia di particelle (a spin 1/2); la costante $a$ è detta *lunghezza di diffusione* [1]). Poiché questa grandezza definisce completamente le proprietà degli urti, essa deve anche definire le proprietà termodinamiche del gas.

Ne deriva la possibilità di applicazione del seguente procedimento (detto *rinormalizzazione*). Formalmente sostituiamo all'energia vera e propria $U(r)$ un'altra funzione con lo stesso valore di $a$, la quale però consente l'applicazione della teoria delle perturbazioni. Finora (cioè fino a questa approssimazione) il risultato finale dei calcoli contiene $U$ soltanto sotto forma di ampiezza di diffusione, e questo risultato coincide con quello che sarebbe stato ottenuto grazie all'interazione vera e propria.

In generale, il raggio d'azione dell'interazione vera coincide in ordine di grandezza con la lunghezza di diffusione $a$. Per il campo virtuale $U(r)$, introdotto come concetto ausiliario, la condizione di applicabilità dell'approssimazione di Born significa che $a \ll r_0$. Il piccolo parametro vero dello sviluppo della teoria è rappresentato, ovviamente, dalla grandezza $ap_F/\hbar$.

Più avanti avremo bisogno del legame esistente fra $U_0$ ed $a$ non soltanto in prima approssimazione di Born (la formula (6,2)), ma anche in seconda. Per determinare questo legame ricordiamo quanto segue: se la probabilità di una transizione del sistema sotto l'influsso di una perturbazione costante $\hat{V}$ è determinata, in prima approssimazione, dall'elemento matriciale $V_{00}$, allora, in seconda approssimazione, $V_{00}$ viene sostituito con

$$V_{00} + \sum_n{}' \frac{V_{0n}V_{n0}}{E_0 - E_n},$$

dove la somma viene eseguita per gli stati ($n \neq 0$) del sistema imperturbato (vedi III, § 43). Nel caso dato si tratta del sistema di due particelle collidenti quando la perturbazione è rappresentata dalla loro interazione $U(r)$. Gli elementi matriciali della perturbazione per transizioni con variazione degli impulsi delle particelle $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2 \to \mathbf{p}_1'$, $\mathbf{p}_2'$ (inoltre, $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2'$) valgono

$$\langle \mathbf{p}_1'\alpha_1, \mathbf{p}_2'\alpha_2 | U | \mathbf{p}_1\alpha_1, \mathbf{p}_2\alpha_2 \rangle = \frac{1}{V} \int U(r)\, e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar}\, d^3x, \qquad (6,3)$$

dove $\mathbf{p} = \mathbf{p}_2' - \mathbf{p}_2 = -(\mathbf{p}_1' - \mathbf{p}_1)$; essendo indipendente l'interazione dagli spin, le proiezioni degli spin delle particelle (indicate con $\alpha_1$ e $\alpha_2$) non cambiano per urto. Di $V_{00}$ serve l'elemento matri-

---

[1]) L'espressione (6,2) non tiene conto dell'identità quantomeccanica delle particelle. Nel caso limite di urti lenti fra particelle identiche a spin 1/2, la diffusione si produce soltanto per spin antiparalleli; inoltre, la sezione differenziale di diffusione nell'angolo solido $do$ (in un sistema a centro d'inerzia) vale $d\sigma = 4a^2\, do$, mentre la sezione completa si ottiene integrando $d\sigma$ sulla semisfera: $\sigma = 8\pi a^2$ (vedi III, § 137).

ciale degli impulsi nulli: $U_0/V$. Per passare dalla prima approssimazione alla seconda, occorre quindi sostituire $U_0$ con

$$U_0 + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}_1'} \left[ \frac{p_1^2 + p_2^2 - p_1'^2 - p_2'^2}{2m} \right]^{-1} \left| \int U e^{-i\mathbf{pr}/\hbar} d^3x \right|^2$$

(per $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ dati la somma si estende a $\mathbf{p}_1' \neq \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$). Poiché nel caso considerato gli impulsi delle particelle sono supposti piccoli, gli elementi matriciali in tutti i termini essenziali della somma si possono sostituire con i loro valori per $\mathbf{p} = 0$. Effettuata questa sostituzione, otteniamo la seguente espressione per la lunghezza di diffusione [1]):

$$a = \frac{m}{4\pi\hbar^2} \left[ U_0 + \frac{U_0^2}{V} \sum_{\mathbf{p}_1'} \frac{2m}{p_1^2 + p_2^2 - p_1'^2 - p_2'^2} \right]. \tag{6,4}$$

Di qui ricaviamo con lo stesso grado di precisione

$$U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \left[ 1 - \frac{4\pi\hbar^2 a}{mV} \sum_{\mathbf{p}_1'} \frac{2m}{p_1^2 + p_2^2 - p_1'^2 - p_2'^2} \right]. \tag{6,5}$$

La divergenza della somma nell'espressione (6,4) (per grandi $\mathbf{p}_1'$, $\mathbf{p}_2'$), dovuta alla sostituzione effettuata di tutti gli elementi matriciali con valori costanti, è inessenziale poiché, utilizzando questa formula per calcolare l'energia del sistema, si avrà lo stesso un'espressione convergente in cui gli impulsi grandi non giocano più nessun ruolo. Con $a$ noi intendiamo la lunghezza di diffusione di particelle lente, che non dipende dalla loro energia. La formula (6,4), invece, contiene, a prima vista, una dipendenza dagli impulsi $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$. In realtà questa dipendenza è contenuta soltanto nella parte immaginaria dell'ampiezza di diffusione (che compare per un modo appropriato di eseguire la somma; vedi III, la formula (130,9)), che può essere trascurata in quanto è noto a priori che il risultato finale sarà necessariamente reale; su questa questione torneremo ancora al § 21.

In questo paragrafo esamineremo un modello di gas di Fermi ad interazione repulsiva fra le particelle, quando $a > 0$. Questo è precisamente il caso in cui il gas ha spettro energetico del tipo Fermi, descritto nei §§ 1, 2.

L'operatore hamiltoniano del sistema di particelle (a spin 1/2), che interagiscono a due a due, si scrive nel metodo della seconda

---

[1]) In tutte le formule intermedie noi scriviamo le somme in valori discreti degli impulsi di particelle contenute in un volume finito $V$; nei calcoli finali a somma viene sostituita, in base alla regola generale, con l'integrazione su $V\, d^3p/(2\pi\hbar)^3$.

quantizzazione nella forma

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}\alpha} \frac{p^2}{2m} \hat{a}^+_{\mathbf{p}\alpha} \hat{a}_{\mathbf{p}\alpha} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum \langle \mathbf{p}'_1\alpha_1, \mathbf{p}'_2\alpha_2 | U | \mathbf{p}_1\alpha_1, \mathbf{p}_2\alpha_2 \rangle \hat{a}^+_{\mathbf{p}'_1\alpha_1} \hat{a}^+_{\mathbf{p}'_2\alpha_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_2\alpha_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_1\alpha_1} \qquad (6,6)$$

(vedi III, § 64). Qui $\hat{a}^+_{\mathbf{p}\alpha}$ ed $\hat{a}_{\mathbf{p}\alpha}$ sono operatori di creazione e di annichilazione della particella libera ad impulso $\mathbf{p}$ e proiezione di spin $\alpha$ ($\alpha = \pm 1/2$). Il primo termine nella (6,6) corrisponde all'energia cinetica e il secondo a quella potenziale delle particelle; nell'ultimo termine la somma è estesa a tutti i valori degli impulsi e delle proiezioni degli spin, osservando la legge di conservazione dell'impulso per urti.

In accordo con l'ipotesi che gli impulsi delle particelle siano piccoli, sostituiamo di nuovo gli elementi matriciali nella formula (6,6) con i loro valori per gli impulsi nulli: $\langle 0\alpha_1, 0\alpha_2 \mid U \mid 0\alpha_1, 0\alpha_2 \rangle = U_0/V$. In seguito osserviamo che, data l'anticommutatività degli operatori $\hat{a}_{\mathbf{p}_1\alpha_1}, \hat{a}_{\mathbf{p}_2\alpha_2}$ nella statistica di Fermi, il loro prodotto è antisimmetrico rispetto alla permutazione degli indici; lo stesso si riferisce al prodotto $\hat{a}^+_{\mathbf{p}'_1\alpha_1} \hat{a}^+_{\mathbf{p}'_2\alpha_2}$. Come risultato, si riducono mutuamente tutti i termini della seconda somma nella (6,6) contenenti le coppie di indici identici $\alpha_1$, $\alpha_2$ (fisicamente ciò è dovuto alla circostanza già menzionata che nel limite degli urti lenti sono unicamente le particelle a spin opposti a poter diffondersi reciprocamente).

Quindi, l'operatore hamiltoniano del sistema assume la forma

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}\alpha} \frac{p^2}{2m} \hat{a}^+_{\mathbf{p}\alpha} a_{\mathbf{p}\alpha} + \frac{U_0}{V} \sum_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}'_1} \hat{a}'^+_{1+} \hat{a}'^+_{2-} \hat{a}_{2-} \hat{a}_{1+}, \qquad (6,7)$$

dove $\hat{a}_{1+} \equiv \hat{a}_{\mathbf{p}_1+}$, $\hat{a}'_{1+} \equiv \hat{a}_{\mathbf{p}'_1+}$ ecc., mentre gli indici $+$ e $-$ sostituiscono qui e più avanti $+1/2$ e $-1/2$.

Quanto agli autovalori dell'operatore hamiltoniano, essi vengono calcolati mediante la teoria ordinaria delle perturbazioni, quando il secondo termine nella formula (6,6) è inteso come piccola correzione al primo termine. Quest'ultimo ha ormai la forma diagonale e i suoi autovalori valgono

$$E^{(0)} = \sum_{\mathbf{p}\alpha} \frac{p^2}{2m} n_{\mathbf{p}\alpha}, \qquad (6,8)$$

dove $n_{\mathbf{p}\alpha}$ sono i numeri di riempimento degli stati $\mathbf{p}\alpha$ [1]).

---

[1]) Supponendo che le particelle posseggano certi valori della proiezione di spin, noi supponiamo ridotta alla forma diagonale anche la matrice statistica $n_{\alpha\beta}$ ($\mathbf{p}$); allora le funzioni $n_\alpha$ ($\mathbf{p}$) con $\alpha = \pm 1/2$ ne sono componenti diagonali.

La correzione del primo ordine è data dagli elementi matriciali diagonali dell'energia di interazione:

$$E_1^{(1)} = \frac{U_0}{V} \sum_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2} n_{1+} n_{2-}, \tag{6,9}$$

dove $n_{1+} \equiv n_{\mathbf{p}_1+}$ ecc.

Per trovare la correzione del secondo ordine, ricorriamo alla nota formula della teoria delle perturbazioni

$$E_n^{(2)} = \sum_m{}' \frac{|V_{nm}|^2}{E_n - E_m},$$

dove gli indici $n$, $m$ enumerano gli stati del sistema imperturbato. Un semplice calcolo (utilizzando i già noti elementi matriciali degli operatori $\hat{a}_{\mathbf{p}\alpha}$ ed $\hat{a}^+_{\mathbf{p}\alpha}$) fornisce il seguente risultato:

$$\frac{U_0^2}{V^2} \sum_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_1'} \frac{n_{1+} n_{2-} (1 - n_{1+}') (1 - n_{2-}')}{(p_1^2 + p_2^2 - p_1'^2 - p_2'^2)/2m}. \tag{6,10}$$

La struttura di questa espressione è ben chiara: il quadrato dell'elemento matriciale della transizione $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2 \to \mathbf{p}_1'$, $\mathbf{p}_2'$ è proporzionale ai numeri di riempimento degli stati $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ e ai numeri di posti non riempiti negli stati $\mathbf{p}_1'$, $\mathbf{p}_2'$.

L'integrale $U_0$, che figura nelle formule (6,9-10), deve essere espresso mediante una grandezza fisica reale, ossia l'ampiezza di diffusione $a$. Per i termini del secondo ordine questa operazione può essere effettuata in base alla formula (6,2), mentre per i termini del primo ordine occorre la formula più precisa (6,5). Effettuate queste sostituzioni, per la correzione del primo ordine in $a$ abbiamo

$$E^{(1)} = \frac{g}{V} \sum_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2} n_{1+} n_{2-} \tag{6,11}$$

e per la correzione del secondo ordine

$$E^{(2)} = \frac{2mg^2}{V^2} \sum_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_1'} \frac{n_{1+} n_{2-} [(1 - n_{1+}') (1 - n_{2-}') - 1]}{p_1^2 + p_2^2 - p_1'^2 - p_2'^2}$$

(per brevità, introduciamo nelle intermedie la « costante di legame » $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ per le particelle del gas [1])). Sviluppando l'espressione fra parentesi al numeratore, osserviamo che i termini contenenti i prodotti di quattro $n$ si riducono mutuamente poiché i loro numeratori sono simmetrici e i denominatori antisimmetrici rispetto alla permutazione $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ e $\mathbf{p}_1'$, $\mathbf{p}_2'$; quanto alla sommatoria in queste

[1]) Dopo la rinormalizzazione dell'ampiezza di diffusione questa grandezza non coincide più con la costante $U_0$ che figura nella formula (6,2)!

variabili, essa viene effettuata simmetricamente. Infine, otteniamo in questo modo

$$E^{(2)} = -\frac{2mg^2}{V^2} \sum_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_1'} \frac{n_{1+}n_{2-}(n_{1+}'+n_{2-}')}{p_1^2+p_2^2-p_1'^2-p_2'^2}. \tag{6,12}$$

Questa somma (nella quale tutti gli $n_{\mathbf{p}\alpha} \to 0$ per $\mathbf{p} \to \infty$) è già convergente.

Le formule così ottenute permettono di calcolare, soprattutto, l'energia dello stato fondamentale. A tal fine occorre porre tutti gli $n_{\mathbf{p}\alpha}$ uguali all'unità all'interno della sfera di Fermi ($p < p_F = \hbar\,(3\pi^2 N/V)^{1/3}$) e nulli all'esterno di essa. Osserviamo a questo proposito quanto segue: sebbene gli autovalori dei prodotti operatoriali $\hat{a}^+_{\mathbf{p}\alpha}\hat{a}_{\mathbf{p}\alpha}$ nell'operatore hamiltoniano iniziale forniscano i numeri di riempimento degli stati delle particelle stesse del gas, dopo aver diagonalizzato l'operatore hamiltoniano con l'aiuto della teoria delle perturbazioni abbiamo ormai a che fare con la funzione di distribuzione delle quasi-particelle (indicata, come nei paragrafi precedenti, con $n_{\mathbf{p}\alpha}$).

Osservando che $\sum n_{\mathbf{p}+} = \sum n_{\mathbf{p}-} = N/2$, ricaviamo dalla (6,11) la correzione del primo ordine

$$E_0^{(1)} = gN^2/4V.$$

Tenendo conto della condizione $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2'$, sostituiamo nella formula (6,12) la sommatoria nei tre impulsi con l'integrazione in

$$\frac{V^3}{(2\pi\hbar)^9}\,\delta(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1'-\mathbf{p}_2')\,d^3p_1\,d^3p_2\,d^3p_1'\,d^3p_2',$$

cosicché

$$E_0^{(2)} = -\frac{4mg^2V}{(2\pi\hbar)^9}\int \frac{\delta(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1'-\mathbf{p}_2')}{p_1^2+p_2^2-p_1'^2-p_2'^2}\,d^3p_1\,d^3p_2\,d^3p_1'\,d^3p_2',$$

dove l'integrazione è estesa al dominio $p_1,\ p_2,\ p_1' \leqslant p_F$. Il calcolo dell'integrale [1]) conduce al risultato finale seguente per l'energia dello stato fondamentale:

$$E_0 = N\frac{3p_F^2}{10m}\left[1+\frac{10}{9\pi}\frac{p_F a}{\hbar}+\frac{4(11-2\ln 2)}{21\pi^2}\left(\frac{p_F a}{\hbar}\right)^2\right], \tag{6,13}$$

dove la grandezza davanti alla parentesi quadra è l'energia del gas di Fermi perfetto (*K. Huang*, *C.N. Yang*, 1957).

---

[1]) In effetti, sarebbe più facile eseguire il calcolo in un altro modo, iniziando cioè dal calcolo della funzione $f$ (vedi più avanti).

Il potenziale chimico del gas allo zero assoluto viene definito come la derivata $\mu = (\partial E_0/\partial N)_V$; espresso in funzione dell'impulso limite $p_F$ esso ha la forma

$$\mu = \frac{p_F^2}{2m}\left[1 + \frac{4}{3\pi}\frac{p_F a}{\hbar} + \frac{4(11-2\ln 2)}{15\pi^2}\left(\frac{p_F a}{\hbar}\right)^2\right]. \qquad (6,14)$$

Secondo le tesi generali della teoria di Landau lo spettro delle eccitazioni elementari $\varepsilon(\mathbf{p})$ e la funzione di interazione delle quasi-particelle $f_{\alpha\alpha'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ sono definiti, rispettivamente, dalla variazione prima e seconda dell'energia totale rispetto alla funzione di distribuzione delle quasi-particelle [1]). Se scriviamo $E$ in forma di una sommatoria discreta in $\mathbf{p}$ e $\alpha$, abbiamo, per definizione,

$$\delta E = \sum_{\mathbf{p}\alpha} \varepsilon_\alpha(\mathbf{p})\,\delta n_{\mathbf{p}\alpha} + \frac{1}{2V}\sum_{\mathbf{p}\alpha,\,\mathbf{p}'\alpha'} f_{\alpha\alpha'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\,\delta n_{\mathbf{p}\alpha}\delta n_{\mathbf{p}'\alpha'} \qquad (6,15)$$

(inoltre, dopo aver derivato l'energia occorre sostituire $n_{\mathbf{p}\alpha}$ con l'unità all'interno della sfera di Fermi e con lo zero al suo esterno). Tuttavia non è necessario calcolare in questo modo la massa efficace $m^*$ delle quasi-particelle in quanto la si può trovare in un modo più semplice (vedi più avanti).

Per quanto riguarda il calcolo della funzione $f_{\alpha\alpha'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ (sulla superficie di Fermi), deriviamo due volte la somma delle espressioni (6,11-12) dopo di che dobbiamo porre $p = p' = p_F$. Eseguendo questo semplice calcolo e passando dalla somma all'integrazione, otteniamo

$$f_{+-}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = g - \frac{4mg^2}{(2\pi\hbar)^3}\int\left\{\frac{\delta(\mathbf{p}+\mathbf{p}'-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)}{2p_F^2-p_1^2-p_2^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\delta(\mathbf{p}+\mathbf{p}_1-\mathbf{p}'-\mathbf{p}_2)+\delta(\mathbf{p}'+\mathbf{p}_1-\mathbf{p}-\mathbf{p}_2)}{2(p_1^2-p_2^2)}\right\} d^3p_1\, d^3p_2,$$

$$f_{++}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = f_{--}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') =$$
$$= \frac{2mg^2}{(2\pi\hbar)^3}\int\frac{\delta(\mathbf{p}+\mathbf{p}_1-\mathbf{p}'-\mathbf{p}_2)+\delta(\mathbf{p}'+\mathbf{p}_1-\mathbf{p}-\mathbf{p}_2)}{p_1^2-p_2^2}\, d^3p_1\, d^3p_2.$$

L'integrazione in queste formule è relativamente semplice a causa della minore molteplicità degli integrali.

Il risultato finale deve essere scritto nella forma (2,4) che non dipende dall'asse di quantizzazione degli spin.

---

[1]) In questo paragrafo la matrice $f_{\alpha\alpha'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ rappresenta l'unione delle componenti diagonali rispetto alle due coppie di indici ($\alpha$, $\beta$ e $\gamma$, $\delta$) della matrice $f_{\alpha\gamma,\beta\delta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$.

Questo risultato è dato dalla formula

$$f_{\alpha\gamma,\,\beta\delta}=\frac{2\pi a\hbar^2}{m}\left\{\left[1+\frac{2ap_F}{\pi\hbar}\left(2+\frac{\cos\vartheta}{2\operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}}\ln\frac{1+\operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}}{1-\operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}}\right)\right]\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}-\right.$$

$$\left.-\left[1+\frac{2ap_F}{\pi\hbar^2}\left(1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}\ln\frac{1+\operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}}{1-\operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}}\right)\right]\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\delta}\right\}, \qquad (6,16)$$

dove $\vartheta$ è l'angolo formato dai vettori $\mathbf{p}_F$ e $\mathbf{p}'_F$ (*A.A. Abrikosov, I.M. Chalatnikov*, 1957) [1]).

Di qui si ricava la massa efficace delle quasi-particelle integrando in base alla formula (2,12) e vale

$$\frac{m^*}{m}=1+\frac{8}{15\pi^2}(7\ln 2-1)\left(\frac{ap_F}{\hbar}\right)^2. \qquad (6,17)$$

La formula (2,17), invece, consente di trovare la velocità del suono nel gas:

$$u^2=\frac{p_F^2}{3m^2}\left[1+\frac{2}{\pi}\frac{ap_F}{\hbar}+\frac{8(11-2\ln 2)}{15\pi^2}\left(\frac{ap_F}{\hbar}\right)^2\right]. \qquad (6,18)$$

In seguito integrando in $dN$ la grandezza $u^2m/N$ (espressa in funzione di $N/V$ anziché di $p_F$), troviamo secondo la (2,13) il potenziale chimico del gas; un'altra integrazione in $dN$ fornirà l'espressione (6,13) per l'energia dello stato fondamentale.

La formula (6,13) rappresenta i primi termini dello sviluppo dell'energia del gas in potenze del « parametro di gassosità » $\eta = p_F a/\hbar \sim a\,(N/V)^{1/3}$. Si potrebbero ottenere ancora alcuni termini successivi dello sviluppo mediante calcoli analoghi, anche se più complessi. Infatti, nel caso del gas di Fermi gli urti tripli portano un contributo all'energia soltanto con un'approssimazione molto piccola. Di tre particelle collidenti almeno due hanno una medesima proiezione di spin; in questo caso la funzione d'onda delle coordinate del sistema deve essere antisimmetrica rispetto a queste due particelle. Ciò significa che il momento orbitale del movimento relativo di queste particelle è uguale almeno a 1 (stato $p$). La funzione d'onda corrispondente contiene una potenza in più (rispetto alla funzione d'onda dello stato $s$) di $p/\hbar$ (vedi III, § 33); quindi, la probabilità

[1]) La funzione (6,16) diventa logaritmicamente infinita per $\vartheta = \pi$. Questa circostanza è dovuta ad alcune omissioni fatte. Un esame più preciso mostra quanto segue: sebbene il valore $\vartheta = \pi$ sia effettivamente un punto singolare della funzione, quest'ultima non diventa infinita in questo punto ma si annulla (vedi la nota alla pag. 273). L'inapplicabilità della formula (6,16) nell'intorno del punto $\vartheta = \pi$ è inessenziale per le applicazioni successive in cui figurano integrali convergenti in $\vartheta = \pi$.

di tale urto contiene un $p^2$ ridondante, vale a dire che viene indebolita di $\sim(pa/\hbar)^2 \sim \eta^2$ volte rispetto alla probabilità di urto « frontale » fra particelle che non verificano il principio di Pauli. Come risultato, gli urti tripli forniranno un contributo di energia soltanto nei termini contenenti il volume come $V^{-2}V^{-2/3}$. In altre parole, tutti i termini dello sviluppo dell'energia, compresi quelli dell'ordine di grandezza di

$$N \frac{p_F^2}{m} \eta^5$$

(cioè ancora tre termini successivi a quelli scritti nella formula (6,13)), vengono espressi in funzione delle caratteristiche dei soli urti a due. Tuttavia, fra le caratteristiche degli urti a due figureranno non soltanto l'ampiezza di diffusione $s$ per urti lenti (così come nella formula (6,13)), ma anche le sue derivate rispetto all'energia e all'ampiezza di diffusione $p$.

Capitolo II

# FUNZIONI DI GREEN DEL SISTEMA DI FERMI PER $T = 0$

## § 7. *Funzione di Green di un sistema macroscopico*

Il metodo adoperato al paragrafo precedente diventa complesso e praticamente inapplicabile per approssimazioni di ordine superiore della teoria delle perturbazioni. Questo difetto è essenziale, in particolare, per i problemi fisici reali in cui l'interazione fra le particelle non è per niente debole; quindi, la precisazione di diverse proprietà generali dei sistemi macroscopici richiede di esaminare insiemi infiniti di termini della serie della teoria delle perturbazioni. Tuttavia, per superare simili difficoltà esiste un formalismo matematico analogo a quello che si usa nella teoria quantistica dei campi.

La forma concreta di questo apparato matematico dipende dalla natura del sistema macroscopico cui deve essere applicato. I paragrafi successivi del presente capitolo sono dedicati allo sviluppo ulteriore del formalismo matematico per il liquido di Fermi a temperature dello zero assoluto [1]). Nel trattare questa questione ci proponiamo di indicare non soltanto un'applicazione effettiva del metodo a un dato sistema, ma di dimostrare anche come, in generale, viene costruito questo apparato.

In questo apparato, la base di partenza sono gli operatori $\psi$ della seconda quantizzazione, le cui proprietà sono note dalla meccanica quantistica (vedi III, §§ 64, 65). Ora, avremo bisogno di questi operatori nella rappresentazione di Heisenberg, nella quale essi dipendono esplicitamente dal tempo. Pertanto noi iniziamo dalla precisazione di alcune proprietà degli operatori $\psi$ nella rappresentazione di Heisenberg.

Considereremo sistemi composti di particelle a spin 1/2. Ciò premesso, agli operatori $\psi$ deve essere attribuito un indice che dia la proiezione dello spin e assuma i valori $\pm 1/2$; come prima, indicheremo gli indici di spin con lettere dell'alfabeto greco e intenderemo la sommatoria con indici ripetuti due volte.

---

[1]) La costruzione sistematica di questo apparato appartiene a *V. M. Galitskij* e *A. B. Migdal* (1958).

Secondo la regola generale (vedi III, § 13) l'operatore $\hat{f}(t)$ di ogni grandezza nella rappresentazione di Heisenberg viene espresso in funzione dell'operatore $\hat{f}$ (di Schrödinger) indipendente dal tempo della stessa grandezza in base alla formula [1])

$$\hat{f}(t) = e^{i\hat{H}t}\hat{f}e^{-i\hat{H}t},$$

dove $\hat{H}$ è l'operatore hamiltoniano del sistema.

Tuttavia, sarebbe opportuno qui cambiare un po' questa definizione. Infatti, nella statistica quantistica è più comodo considerare lo stato di un sistema non per un numero dato $N$ di particelle in esso, bensì per un dato potenziale chimico $\mu$. In questo caso, lo stato fondamentale in cui il sistema si trova per $T = 0$ si può definire come lo stato con autovalore più piccolo dell'operatore

$$\hat{H}' = \hat{H} - \mu\hat{N} \tag{7,1}$$

(e non $\hat{H}$ come per un dato $N$). In effetti, la probabilità del sistema di trovarsi (per un dato valore di $\mu$) allo stato di energia $E_n$ e numero di particelle $N_n$ è

$$w \backsim \exp\left(-\frac{E_n - \mu N_n}{T}\right) = \exp\left(-\frac{E'_n}{T}\right)$$

(vedi V, la formula (35,1)); $E'_n$ sono autovalori dell'operatore $\hat{H}'$ da cui si vede che per $T = 0$ resta soltanto lo stato con $E'_n$ più piccolo [2]).

Definiamo così gli operatori $\psi$ di Heisenberg mediante le formule

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_\alpha(t, \mathbf{r}) &= e^{i\hat{H}'t}\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r})\, e^{-i\hat{H}'t}, \\ \hat{\Psi}^+_\alpha(t, \mathbf{r}) &= e^{i\hat{H}'t}\hat{\psi}^+_\alpha(\mathbf{r})\, e^{-i\hat{H}'t}. \end{aligned} \tag{7,2}$$

Indicheremo gli operatori $\psi$ di Heisenberg con la $\hat{\Psi}$ maiuscola e quelli di Schrödinger con la $\hat{\psi}$ minuscola.

Gli operatori $\psi$ di Schrödinger verificano le note regole di commutazione. Quanto ai commutatori degli operatori di Heisenberg considerati in istanti distinti $t$ e $t'$, essi non possono essere calcolati in forma generale. Tuttavia, per $t = t'$ le loro regole di commutazione

---

[1]) Per semplificare la scrittura delle formule, ricorreremo spesso a un sistema di unità di misura, nel quale la costante quantistica $\hbar = 1$ (in modo che l'impulso abbia la dimensione in $cm^{-1}$ e l'energia in $s^{-1}$). Per passare da questo sistema ad unità ordinarie, occorre sostituire tutti gli impulsi $\mathbf{p}$ e le energie $E$ nelle formule con $\mathbf{p}/\hbar$ ed $E/\hbar$. In particolare, queste unità sono adoperate nel presente capitolo.

[2]) Chiameremo operatore hamiltoniano l'operatore $\hat{H}'$, così come $\hat{H}$.

coincidono con quelle per gli operatori di Schrödinger. Così, dalla regola

$$\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r})\,\hat{\psi}^+_\beta(\mathbf{r}') + \hat{\psi}^+_\beta(\mathbf{r}')\,\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}) = \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

deriva analogamente la regola

$$\hat{\Psi}_\alpha(t,\mathbf{r})\,\hat{\Psi}^+_\beta(t,\mathbf{r}') + \hat{\Psi}^+_\beta(t,\mathbf{r}')\,\hat{\Psi}_\alpha(t,\mathbf{r}) =$$
$$= e^{i\hat{H}'t}\left(\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r})\,\hat{\psi}^+_\beta(\mathbf{r}') + \hat{\psi}^+_\beta(\mathbf{r}')\,\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r})\right)e^{-i\hat{H}'t} = \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \quad (7,3)$$

Allo stesso modo abbiamo

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_\alpha(t,\mathbf{r})\,\hat{\Psi}_\beta(t,\mathbf{r}') + \hat{\Psi}_\beta(t,\mathbf{r}')\,\hat{\Psi}_\alpha(t,\mathbf{r}) &= 0,\\ \hat{\Psi}^+_\alpha(t,\mathbf{r})\,\hat{\Psi}^+_\beta(t,\mathbf{r}') + \hat{\Psi}^+_\beta(t,\mathbf{r}')\,\hat{\Psi}^+_\alpha(t,\mathbf{r}) &= 0.\end{aligned} \quad (7,4)$$

Derivando la definizione (7,2) rispetto al tempo, troviamo che l'operatore $\psi$ di Heisenberg verifica l'equazione

$$-i\frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi}_\alpha(t,\mathbf{r}) = \hat{H}'\hat{\Psi}_\alpha(t,\mathbf{r}) - \hat{\Psi}_\alpha(t,\mathbf{r})\,\hat{H}' \quad (7,5)$$

(cfr. III, la formula (13,7)).

Le rappresentazioni di Heisenberg e di Schrödinger sono identiche per l'operatore di qualsiasi grandezza conservativa (cioè per un operatore che commuta con l'operatore hamiltoniano). In particolare, ciò si riferisce sia all'operatore hamiltoniano stesso che all'operatore del numero di particelle che è, ovviamente, grandezza anch'essa conservativa. Le espressioni di questi operatori in funzione degli operatori $\psi$ di Schrödinger o di Heisenberg sono le stesse. Così, l'operatore del numero di particelle è

$$\hat{N} = \int \hat{\psi}^+_\alpha(\mathbf{r})\,\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r})\,d^3x = \int \hat{\Psi}^+_\alpha(t,\mathbf{r})\,\hat{\Psi}_\alpha(t,\mathbf{r})\,d^3x. \quad (7,6)$$

Quanto all'operatore hamiltoniano di un sistema di particelle interagenti, la sua forma è

$$\begin{aligned}\hat{H}' &= \hat{H}'^{(0)} + \hat{V}^{(1)} + \hat{V}^{(2)} + \ldots\\ \hat{H}'^{(0)} &= -\frac{1}{2m}\int \hat{\Psi}^+_\alpha(t,\mathbf{r})\,\Delta\hat{\Psi}_\alpha(t,\mathbf{r})\,d^3x - \mu\hat{N},\\ \hat{V}^{(1)} &= \int \hat{\Psi}^+_\alpha(t,\mathbf{r})\,U^{(1)}(\mathbf{r})\,\hat{\Psi}_\alpha(t,\mathbf{r})\,d^3x,\\ \hat{V}^{(2)} &= \frac{1}{2}\int \hat{\Psi}^+_\beta(t,\mathbf{r})\,\hat{\Psi}^+_\alpha(t,\mathbf{r}')\,U^{(2)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\hat{\Psi}_\alpha(t,\mathbf{r}')\,\hat{\Psi}_\beta(t,\mathbf{r})\,d^3x\,d^3x'.\end{aligned} \quad (7,7)$$

Qui $\hat{H}'^{(0)}$ è l'operatore hamiltoniano del sistema di particelle libere; $\hat{V}^{(1)}$ l'operatore della loro interazione con un campo esterno $U^{(1)}(\mathbf{r})$; $\hat{V}^{(2)}$ l'operatore di interazione di coppia allorché $U^{(2)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ rappre-

senta l'energia di interazione di due particelle; i termini omessi sono di interazione tripla ecc. (cfr. III, la formula (64,25)). Per semplicità, noi supponiamo qui che tutte le interazioni siano indipendenti dagli spin delle particelle.

Il commutatore di $\hat{H}'$ e $\hat{\Psi}_\alpha$ nell'espressione (7,5) è calcolato in base alle regole (7,3-4); le funzioni $\delta$ che compaiono in questo caso vanno eliminate per integrazione. Come risultato, otteniamo un'« equazione di Schrödinger » per $\hat{\Psi}_\alpha(t, \mathbf{r})$ nella forma

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi}_\alpha(t, \mathbf{r}) = \left(-\frac{1}{2m}\Delta - \mu + U^{(1)}(\mathbf{r})\right)\hat{\Psi}_\alpha(t, \mathbf{r}) +$$

$$+\int \hat{\Psi}^+_\beta(t, \mathbf{r}')\, U^{(2)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, \hat{\Psi}_\beta(t, \mathbf{r}')\, d^3x' \cdot \hat{\Psi}_\alpha(t, \mathbf{r}) + \ldots \qquad (7,8)$$

Il ruolo fondamentale nel metodo descritto appartiene alla nozione di *funzione di Green* di un sistema macroscopico, data dalla seguente espressione [1]):

$$G_{\alpha\beta}(X_1, X_2) = -i\langle \mathrm{T}\hat{\Psi}_\alpha(X_1)\, \hat{\Psi}^+_\beta(X_2)\rangle. \qquad (7,9)$$

Qui e più avanti con $X$ si denota, per brevità, l'insieme dell'istante $t$ e del raggio vettore del punto $\mathbf{r}$. Le parentesi angolari $\langle \ldots \rangle$ indicano la media rispetto allo stato fondamentale del sistema (al posto del simbolo più complesso per l'elemento matriciale diagonale $\langle 0 \mid \ldots \mid 0 \rangle$). Il simbolo T, invece, è il segno di prodotto cronologico: gli operatori che lo seguono devono essere disposti da destra a sinistra nell'ordine di aumento dei tempi $t_1$, $t_2$. In caso di fermioni, la permutazione di una coppia di operatori $\psi$ (rispetto alla loro disposizione nella scrittura iniziale del prodotto) deve implicare un cambiamento di segno del prodotto. Ciò significa in forma esplicita che

$$G_{\alpha\beta}(X_1, X_2) = \begin{cases} -i\langle \hat{\Psi}_\alpha(X_1)\, \hat{\Psi}^+_\beta(X_2)\rangle, & t_1 > t_2, \\ i\langle \hat{\Psi}^+_\beta(X_2)\, \hat{\Psi}_\alpha(X_1)\rangle, & t_1 < t_2. \end{cases} \qquad (7,10)$$

Diamo alcune proprietà evidenti della funzione di Green. Se il sistema è non ferromagnetico e non si trova in un campo esterno, allora la dipendenza della funzione di Green dallo spin si riduce alla matrice unitaria

$$G_{\alpha\beta}(X_1, X_2) = \delta_{\alpha\beta} G(X_1, X_2) \qquad (7,11)$$

---

[1]) Questa definizione è analoga a quella delle funzioni di Green esatte (propagatori) in elettrodinamica quantistica (cfr. IV, §§ 100, 102).

(qualsiasi altra dipendenza metterebbe in risalto la direzione nello spazio, ossia l'asse $z$ di quantizzazione dello spin) [1]). Essendo il tempo omogeneo, gli istanti $t_1$ e $t_2$ figurano nella funzione di Green soltanto sotto forma della differenza $t = t_1 - t_2$. Se, per di più, il sistema è macroscopicamente omogeneo nello spazio, allora le coordinate di due punti figurano anch'esse sotto forma della differenza $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. In altre parole, in questo caso abbiamo

$$G_{\alpha\beta}(X_1, X_2) = \delta_{\alpha\beta} G(X), \quad X = X_1 - X_2. \tag{7,12}$$

Sottolineiamo che l'omogeneità macroscopica significa che il corpo è supposto omogeneo non soltanto rispetto alla sua densità media (macroscopica), ma anche alla densità di probabilità delle varie posizioni (microscopiche) delle sue particelle nello spazio. Tali sono esattamente i liquidi e i gas (ma non i cristalli solidi). In virtù della loro isotropia, $G(t, \mathbf{r}) = G(t, -\mathbf{r})$. A questo proposito sottolineiamo ancora una volta che, al tempo stesso, la funzione $G(t, \mathbf{r})$, per la sua stessa definizione, non è affatto pari rispetto alla variabile temporale $t$. Da questo punto di vista è importante l'ordine fra $t_1$ e $t_2$ nella differenza $t = t_1 - t_2$.

La matrice coordinata di densità di una particella in un sistema è definita come la media

$$\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{N} \langle \hat{\Psi}^+_\beta(t, \mathbf{r}_2)\, \hat{\Psi}_\alpha(t, \mathbf{r}_1) \rangle. \tag{7,13}$$

La conoscenza di questa matrice consente di determinare la media di qualsiasi grandezza riferita a una singola particella. Infatti, sia $\hat{F}_{\alpha\beta}$ un operatore a « una sola particella », cioè un operatore della forma

$$\hat{F}_{\alpha\beta} = \sum_a \hat{f}^{(a)}_{\alpha\beta}, \tag{7,14}$$

dove $\hat{f}^{(a)}_{\alpha\beta}$ è un operatore agente sulle coordinate e sullo spin di una sola ($a$-esima) particella, mentre la sommatoria si estende a tutte le particelle del sistema. Nel formalismo della seconda quantizzazione questo operatore si scrive (nella rappresentazione di Heisenberg) come segue:

$$\hat{F}_{\alpha\beta}(t) = \int \hat{\Psi}^+_\alpha(t, \mathbf{r})\, \hat{f}_{\beta\gamma} \hat{\Psi}_\gamma(t, \mathbf{r})\, d^3x \tag{7,15}$$

---

[1]) Questa affermazione deve essere precisata. Le componenti di spin $\hat{\Psi}_\alpha$ costituiscono uno spinore controvariante del primo ordine (in questo senso sarebbe più corretta la notazione $\hat{\Psi}^\alpha$ con l'indice $\alpha$ scritto sopra). Quanto alle componenti $\hat{\Psi}^+_\beta$, esse costituiscono uno spinore covariante. Perciò $G_{\alpha\beta}$ è uno spinore misto del secondo ordine mentre $\delta_{\alpha\beta}$ è lo spinore unità misto del secondo ordine.

(cfr. III, la formula (64,23)). Ne segue con chiarezza che la media della grandezza $F$ può essere espressa in termini della matrice densità nella forma

$$\langle F\rangle = N\langle f\rangle = N\int [\hat{f}^{(1)}_{\alpha\beta}\rho_{\beta\alpha}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)]_{\mathbf{r}_2=\mathbf{r}_1}\, d^3x_1, \tag{7,16}$$

dove $\hat{f}^{(1)}_{\alpha\beta}$ è l'operatore agente sulle coordinate di $\mathbf{r}_1$ (occorre porre $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1$ dopo l'applicazione dell'operatore, ma prima dell'integrazione).

Secondo la (7,10) la matrice densità può essere espressa mediante la funzione di Green

$$\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\frac{i}{N}G_{\alpha\beta}(t_1, \mathbf{r}_1;\ t_1+0, \mathbf{r}_2). \tag{7,17}$$

Qui (come ovunque più avanti) la notazione $t_1 + 0$ per l'argomento della funzione significa che il limite si calcola quando l'argomento tende da destra al valore $t_1$. Il calcolo di questo limite garantisce una disposizione corretta degli operatori $\psi$, coincidente con la loro disposizione nel prodotto (7,13).

Per un sistema microscopicamente omogeneo, la matrice densità dipende unicamente dalla differenza $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$; quando essa è indipendente dagli spin, si ha $\rho_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\rho$ e, inoltre

$$\rho(\mathbf{r}) = -\frac{i}{N}G(t = -0, \mathbf{r}), \tag{7,18}$$

dove al posto di $G_{\alpha\beta}(X_1, X_2)$ è introdotta, in accordo con la formula (7,12), la funzione $G(X_1 - X_2) \equiv G(X)$. Per $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ e dopo il calcolo della traccia rispetto alle variabili di spin il prodotto nell'espressione (7,13) si trasforma in $\hat{\Psi}^+_\alpha\hat{\Psi}_\alpha$, che è l'operatore densità del numero di particelle nel sistema. Pertanto la densità media del corpo è

$$\frac{N}{V} = 2N\rho(0) = -2iG(t = -0, \mathbf{r} = 0) \tag{7,19}$$

($t$ tende inferiormente a zero). Questa uguaglianza stabilisce una relazione fra il potenziale chimico $\mu$ per $T = 0$ (dal quale $G$ dipende come da un parametro) e la densità del numero di particelle $N/V$.

Lo sviluppo di Fourier della funzione $\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ determina la distribuzione degli impulsi delle particelle [1])

$$N(\mathbf{p}) = N\int \rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\, e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}\, d^3(x_1 - x_2) =$$
$$= -i\int G(t, \mathbf{r})|_{t=-0} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}}\, d^3x. \tag{7,20}$$

---

[1]) Ricordiamo (cfr. III, § 14) che la matrice densità di una sola particella è l'integrale

$$\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int \Psi^*(\mathbf{r}_2, q)\,\Psi(\mathbf{r}_1, q)\, dq,$$

dove $\Psi(\mathbf{r}, q)$ è la funzione d'onda dell'intero sistema, essendo $\mathbf{r}$ il raggio vettore di una sola particella e $q$ l'insieme delle coordinate di tutte le altre particelle;

Questo è il numero di particelle (per unità di volume) con un determinato valore della proiezione di spin e con impulsi nell'intervallo $d^3p/(2\pi)^3$. Sottolineiamo che qui si tratta delle particelle vere e proprie e non delle quasi-particelle (queste ultime non sono ancora comparse nel formalismo descritto). La notazione $N(\mathbf{p})$ è stata introdotta per non confondere la funzione di distribuzione $n(\mathbf{p})$ delle quasi-particelle.

Nel seguito, avremo a che fare normalmente con la funzione di Green nella rappresentazione degli impulsi, definita come componente dello sviluppo di Fourier della funzione $G(t, \mathbf{r})$ in $t$ e $\mathbf{r}$:

$$G(t, \mathbf{r}) = \int G(\omega, \mathbf{p})\, e^{i(\mathbf{pr}-\omega t)} \frac{d\omega\, d^3p}{(2\pi)^4}, \tag{7,21}$$

$$G(\omega, \mathbf{p}) = \int G(t, \mathbf{r})\, e^{-i(\mathbf{pr}-\omega t)}\, dt\, d^3x. \tag{7,22}$$

La distribuzione delle particelle rispetto agli impulsi si esprime mediante questa funzione in base alla formula

$$N(\mathbf{p}) = -i \lim_{t\to -0} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega, \mathbf{p})\, e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \tag{7,23}$$

che si ottiene sostituendo la (7,21) nella (7,20). La sua normalizzazione è data dalla formula

$$-2i \lim_{t\to -0} \int G(\omega, \mathbf{p})\, e^{-i\omega t} \frac{d\omega\, d^3p}{(2\pi)^4} = \frac{N}{V}, \tag{7,24}$$

che rappresenta la condizione (7,19) espressa nella rappresentazione degli impulsi. Ciò vuol dire che la distribuzione $N(\mathbf{p})$ automaticamente è normalizzata correttamente:

$$2 \int N(\mathbf{p}) \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \frac{N}{V}.$$

Notiamo che il limite nel quale vanno calcolati gli integrali (7,23-24) è equivalente a una regola definita di aggiramento nel piano della variabile complessa $\omega$. L'esistenza del fattore $e^{-i\omega t}$ con $t < 0$ permette di chiudere il cammino di integrazione (asse reale) con una semicirconferenza indefinitamente lontana nel semipiano superiore $\omega$ in modo che l'integrale viene determinato dai residui della funzione $G(\omega, \mathbf{p})$ nei suoi poli che giacciono in questo semipiano.

---

l'integrazione si estende a queste ultime. Le componenti di Fourier della matrice densità coincidono con l'espressione

$$\int \left| \int \Psi(\mathbf{r}, q)\, e^{i\mathbf{pr}}\, d^3x \right|^2 dq,$$

da cui deriva il suo legame con la distribuzione degli impulsi delle particelle.

## § 8. *Determinazione dello spettro energetico mediante la funzione di Green*

Quando il sistema è microscopicamente omogeneo, è facile determinare la dipendenza degli elementi matriciali di un operatore $\psi$ di Heisenberg dal tempo e dalle coordinate rispetto agli stati stazionari con valori definiti dell'energia e dell'impulso.

La dipendenza dal tempo è data da un fattore esponenziale ordinario

$$\langle n \,|\, \hat{\Psi}_\alpha (t, \mathbf{r}) \,|\, m \rangle = e^{i\omega_{nm} t} \langle n \,|\, \hat{\psi}_\alpha (\mathbf{r}) \,|\, m \rangle, \tag{8,1}$$

ma siccome l'operatore $\psi$ di Heisenberg è definito mediante l'operatore hamiltoniano $\hat{H}'$, allora

$$\omega_{nm} = E'_n - E'_m = E_n - E_m - \mu (N_n - N_m).$$

In accordo con le proprietà generali degli operatori $\psi$ l'operatore $\hat{\Psi}$ diminuisce (e $\hat{\Psi}^+$ aumenta) di 1 il numero di particelle nel sistema. Perciò nell'elemento matriciale (8,1) si ha $N_n = N_m - 1$ in modo che

$$\omega_{nm} = E_n (N) - E_m (N + 1) + \mu, \tag{8,2}$$

dove sotto forma di argomenti sono indicati i numeri di particelle negli stati corrispondenti.

Per determinare la dipendenza dalle coordinate, osserviamo che, data l'omogeneità del sistema, gli elementi matriciali dei suoi operatori $\psi$ non possono cambiare qualunque sia lo spostamento a una distanza $\mathbf{r}$ rispetto al sistema. Ciò non significa, però, che gli elementi matriciali in generale siano indipendenti dalle coordinate. Infatti, la differenza fra $\psi_{nm}$ (r) e il valore $\psi_{nm}$ (0) in un dato punto $\mathbf{r} = 0$ è dovuta alle due cause seguenti: con lo spostamento alla distanza $\mathbf{r}$ rispetto al sistema stesso e con la traslazione del punto di osservazione in un altro punto dello spazio, avviene contemporaneamente un cambiamento delle fasi delle funzioni d'onda. Per escludere questi ultimi cambiamenti, spostiamo il sistema del vettore $-\mathbf{r}$, applicando cioè alle sue funzioni d'onda l'operatore di traslazione parallela

$$\hat{T} (-\mathbf{r}) = e^{-i\mathbf{r}\hat{\mathbf{P}}},$$

dove $\hat{\mathbf{P}}$ è l'operatore dell'impulso totale del sistema; vedi III, la formula (15,13). In seguito a queste operazioni il punto di osservazione riprenderà il suo posto iniziale nello spazio, ma resterà spostato rispetto al sistema del vettore $\mathbf{r}$. L'invarianza degli elementi matriciali rispetto a questa trasformazione viene espressa dall'uguaglianza

$$\langle n \,|\, \hat{\psi}_\alpha (0) \,|\, m \rangle = \langle n \,|\, e^{i\mathbf{r}\hat{\mathbf{P}}} \hat{\psi}_\alpha (\mathbf{r}) \, e^{-i\mathbf{r}\hat{\mathbf{P}}} \,|\, m \rangle. \tag{8,3}$$

Se negli stati $n$ e $m$ il sistema ha degli impulsi $\mathbf{P}_n$ e $\mathbf{P}_m$, allora

$$\langle n \,|\, \hat{\psi}_\alpha(0) \,|\, m\rangle = e^{i\mathbf{k}_{nm}\mathbf{r}} \langle n \,|\, \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}) \,|\, m\rangle,$$

da cui

$$\langle n \,|\, \hat{\Psi}_\alpha(t, \mathbf{r}) \,|\, m\rangle = e^{i(\omega_{nm}t - \mathbf{k}_{nm}\mathbf{r})} \langle n \,|\, \hat{\psi}_\alpha(0) \,|\, m\rangle, \tag{8,4}$$

$$\langle n \,|\, \Psi^+_\alpha(t, \mathbf{r}) \,|\, m\rangle = \langle m \,|\, \hat{\Psi}_\alpha(t, \mathbf{r}) \,|\, n\rangle^*,$$

dove $\mathbf{k}_{nm} = \mathbf{P}_n - \mathbf{P}_m$.

Queste formule permettono di ottenere un importante sviluppo nello spazio degli impulsi per la funzione di Green, che ne precisa il significato fisico.

Essendo « discontinua » la definizione della funzione $G(t, \mathbf{r})$, il calcolo di $G(\omega, \mathbf{p})$ richiede che l'integrale in $dt$ nella formula (7,22) sia diviso in due integrali: da $-\infty$ a 0 e da 0 a $\infty$. Nel secondo di questi integrali (cioè per $t = t_1 - t_2 > 0$) abbiamo, sviluppando la definizione (7,10) in base alla regola del prodotto di matrici,

$$G(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} G_{\alpha\alpha} = -\frac{i}{2} \sum_m \langle 0 \,|\, \hat{\Psi}_\alpha(X_1) \,|\, m\rangle \langle m \,|\, \hat{\Psi}^+_\alpha(X_2) \,|\, 0\rangle$$

(la sommatoria si estende a tutti gli stati quantistici del sistema). Sostituendovi le espressioni (8,4) e osservando che nello stato fondamentale $\mathbf{P}_0 = 0$, troviamo

$$G(t, \mathbf{r}) = -\frac{i}{2} \sum_m |\langle 0 \,|\, \hat{\psi}_\alpha(0) \,|\, m\rangle|^2 e^{i(\omega_{0m}t + \mathbf{P}_m\mathbf{r})}, \tag{8,5}$$

dove $\omega_{0m} = E_0(N) - E_m(N+1) + \mu$.

L'integrazione estesa allo spazio nella formula (7,22), dove $G(t, \mathbf{r})$ è presa dalla (8,5), dà a ciascun termine della somma una funzione $\delta$: $\delta(\mathbf{p} - \mathbf{P}_m)$. Quando invece si integra in $dt$ $(t > 0)$, per assicurare la convergenza occorre aggiungere ad $\omega$ una parte immaginaria infinitesima positiva, sostituendo cioè $\omega \to \omega + i0$ [1]). Allora otteniamo

$$\int_0^\infty \int G(t, \mathbf{r})\, e^{i(\omega t - \mathbf{pr})}\, d^3x\, dt =$$

$$= \frac{(2\pi)^3}{2} \sum_m |\langle 0 \,|\, \hat{\psi}_\alpha(0) \,|\, m\rangle|^2 \frac{\delta(\mathbf{p} - \mathbf{P}_m)}{\omega + \omega_{0m} + i0}.$$

---

[1]) Questo procedimento è analogo al metodo di calcolo delle funzioni di Green in elettrodinamica quantistica (cfr. IV, § 76).

Analogamente si calcola l'integrale in $dt$ da $-\infty$ a 0. Per $t < 0$, al posto della (8,5) abbiamo

$$G(t, \mathbf{r}) = \frac{i}{2} \sum_m |\langle m | \hat{\psi}_\alpha(0) | 0 \rangle|^2 e^{i(\omega_{m0} t - \mathbf{P}_m \mathbf{r})}, \tag{8,6}$$

dove $\omega_{m0} = E_m(N-1) - E_0(N) + \mu$. Calcolando ora l'integrale da $-\infty$ a 0 e sommando i due integrali, otteniamo

$$G(\omega, \mathbf{p}) = \frac{(2\pi)^3}{2} \sum_m \left\{ \frac{A_m \delta(\mathbf{p} - \mathbf{P}_m)}{\omega + \mu + E_0(N) - E_m(N+1) + i0} + \right.$$
$$\left. + \frac{B_m \delta(\mathbf{p} + \mathbf{P}_m)}{\omega + \mu + E_m(N-1) - E_0(N) - i0} \right\}, \tag{8,7}$$

dove sono introdotte le notazioni

$$A_m = |\langle 0 | \bar{\hat{\psi}}_\alpha(0) | m \rangle|^2, \quad B_m = |\langle m | \hat{\psi}_\alpha(0) | 0 \rangle|^2. \tag{8,8}$$

Questo è lo sviluppo richiesto [1]).

Introduciamo le notazioni

$$\varepsilon_m^{(+)} = E_m(N+1) - E_0(N), \quad \varepsilon_m^{(-)} = E_0(N) - E_m(N-1) \tag{8,9}$$

per le energie di eccitazione, definite in base alle differenze fra il livello eccitato del sistema con un determinato numero di particelle e lo stato fondamentale avente una particella di più o di meno. Gli indici (+) e (—) mostrano che queste energie

$$\varepsilon_m^{(+)} > \mu, \quad \varepsilon_m^{(-)} < \mu. \tag{8,10}$$

Osservando infatti che $E_0(N+1) - E_0(N) \approx \partial E_0 / \partial N = \mu$ è il potenziale chimico per $T = 0$, scriviamo ad esempio

$$\varepsilon_m^{(+)} = E_m(N+1) - E_0(N+1) + E_0(N+1) - E_0(N) \approx$$
$$\approx [E_m(N+1) - E_0(N+1)] + \mu.$$

Ma la differenza fra parentesi quadre (dove le due energie corrispondono a due sistemi aventi un medesimo numero di particelle) è positiva in accordo con la definizione di stato fondamentale; ne consegue che $\varepsilon_m^{(+)} > \mu$. Sul significato della definizione (8,9) torneremo più avanti.

Lo spostamento dei poli nei termini della somma (quali funzioni di $\omega$), che viene espresso dagli addendi $\pm i0$ ai loro denominatori

---

[1]) Uno sviluppo analogo nella teoria quantistica dei campi viene detto formula di Källén-Lehmann (cfr. IV, §§ 101, 108).

equivale alla comparsa di parti immaginarie δ-funzionali in base alla regola [1])

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mathrm{P}\,\frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x). \tag{8,11}$$

Applicando questa regola all'espressione (8,7), otteniamo la parte reale della funzione di Green

$$\mathrm{Re}\,G(\omega, \mathbf{p}) = 4\pi^3 \sum_m \mathrm{P}\left[\frac{A_m\delta(\mathbf{p}-\mathbf{P}_m)}{\omega+\mu-\varepsilon_m^{(+)}} + \frac{B_m\delta(\mathbf{p}+\mathbf{P}_m)}{\omega+\mu-\varepsilon_m^{(-)}}\right] \tag{8,12}$$

e la sua parte immaginaria (dove si deve tener conto che tutte le differenze $\varepsilon_m^{(+)} - \mu > 0$ e tutte le differenze $\varepsilon_m^{(-)} - \mu < 0$):

$$\mathrm{Im}\,G(\omega, \mathbf{p}) = \\ = \begin{cases} -4\pi^4 \sum_m A_m\delta(\mathbf{p}-\mathbf{P}_m)\,\delta(\omega+\mu-\varepsilon_m^{(+)}) & \text{per } \omega > 0, \\ 4\pi^4 \sum_m B_m\delta(\mathbf{p}+\mathbf{P}_m)\,\delta(\omega+\mu-\varepsilon_m^{(-)}) & \text{per } \omega < 0. \end{cases} \tag{8,13}$$

Di qui si vede che si ha sempre

$$\mathrm{sign}\,\mathrm{Im}\,G(\omega, \mathbf{p}) = -\mathrm{sign}\,\omega. \tag{8,14}$$

È da notare anche l'andamento asintotico della funzione $G(\omega, \mathbf{p})$ per $\omega \to \infty$. Dalla (8,7) ricaviamo

$$G(\omega, \mathbf{p}) \approx \frac{4\pi^3}{\omega} \sum_m [A_m\delta(\mathbf{p}-\mathbf{P}_m) + B_m\delta(\mathbf{p}+\mathbf{P}_m)].$$

Come è facile vedere, il coefficiente di $1/\omega$ è uguale alla componente di Fourier in $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ di

$$\frac{1}{2}\{\hat{\Psi}_\alpha(t, \mathbf{r}_1)\hat{\Psi}_\alpha^+(t, \mathbf{r}_2) + \hat{\Psi}_\alpha^+(t, \mathbf{r}_2)\,\hat{\Psi}_\alpha(t, \mathbf{r}_1)\} = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

ossia vale 1. Quindi,

$$G(\omega, \mathbf{p}) \to 1/\omega \quad \text{per} \quad |\,\omega\,| \to \infty. \tag{8,15}$$

La proprietà principale della funzione di Green nella rappresentazione degli impulsi è che i suoi poli possono giacere soltanto nei punti $\omega = \varepsilon_m - \mu$, dove $\varepsilon_m$ sono energie di eccitazione discrete del sistema, definite nel modo suindicato. Ognuna di queste energie

---

[1]) Cfr. III, la formula (43,10). Il segno P significa che, integrando espressioni della forma $f(x)/(x \pm i0)$, l'integrale va inteso come valore principale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x \pm i0}\,dx = \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx \mp i\pi f(0).$$

Il secondo termine è dovuto all'aggiramento del polo $x = -i0$ (o $x = i0$) superiormente (o inferiormente) su una semicirconferenza.

corrisponde a un determinato valore dell'impulso $\mathbf{P}_m$ del sistema; ne è prova l'esistenza della corrispondente funzione $\delta$ in ogni termine contenente un polo della funzione di Green.

Tuttavia, noi ci interessiamo qui alla funzione di Green di un corpo macroscopico. Ciò vuol dire che consideriamo il limite allorché il volume $V$ e il numero di particelle $N$ tendono all'infinito (per un dato valore finito del rapporto $N/V$). In questo limite, le distanze fra i livelli del sistema tendono a zero, i poli della funzione $G(\omega, \mathbf{p})$ si fondono e non si può affermare altro che questa funzione ha parte immaginaria per valori $\omega + \mu$ nel dominio continuo dei valori possibili dell'energia di eccitazione del sistema. Tuttavia, fanno eccezione le eccitazioni in cui tutto l'impulso $\mathbf{p}$ del sistema macroscopico può essere ascritto a una sola quasi-particella munita di una legge di dispersione $\varepsilon(\mathbf{p})$ (ricordiamo che nello stato fondamentale del sistema $\mathbf{p} = 0$); a questi valori corrispondono poli isolati della funzione di Green.

Se, invece, l'impulso $\mathbf{p}$ è composto di impulsi di più quasi-particelle, l'energia del sistema non viene definita più univocamente dal valore $\mathbf{p}$: un dato impulso del sistema può essere composto in diverso modo dagli impulsi delle quasi-particelle, e la somma delle loro energie assume, in questo caso, una serie continua di valori; integrando su tutti questi stati, si può eliminare il polo.

Quindi, la legge di dispersione delle quasi-particelle è data dall'equazione

$$G^{-1}(\varepsilon - \mu, \mathbf{p}) = 0 \tag{8,16}$$

(*V. L. Bonč-Bruevič*, 1955).

Sottolineiamo che la determinazione dell'energia di eccitazione in base alla formula (8,9) corrisponde esattamente alla definizione di energia delle quasi-particelle nella teoria di Landau. Infatti, la differenza $\varepsilon_m^{(+)}$ è la variazione dell'energia del sistema quando vi si aggiunge una particella; attribuendo tutta questa variazione a una sola quasi-particella, noi definiamo $\varepsilon$ in accordo con la (1,3). Analogamente, $-\varepsilon_m^{(-)}$ è la variazione dell'energia quando si toglie una particella, cosicché $\varepsilon_m^{(-)}$ è l'energia della quasi-particella tolta. È naturale perciò che $\varepsilon_m^{(-)} < \mu$, poiché, secondo la teoria di Landau, una quasi-particella può essere allontanata soltanto dal di dentro della sfera di Fermi [1]).

Poiché tutti gli stati eccitati che figurano nello sviluppo (8,7) si ottengono dallo stato fondamentale per aggiunta o sottrazione di una particella (a spin 1/2), è chiaro che nel caso di un sistema di fermioni i poli della funzione di Green determinano unicamente lo

[1]) È da notare che nella definizione di energia delle quasi-particelle $\varepsilon_m^{(-)}$ il livello eccitato del sistema $E_m$ figura con il segno negativo. Ciò è dovuto al fatto che l'impulso di queste quasi-particelle vale $\mathbf{p} = -\mathbf{P}_m$, come lo si vede dalla funzione $\delta(\mathbf{p} + \mathbf{P}_m)$ nei corrispondenti termini dello sviluppo (8,7).

spettro di eccitazioni elementari del tipo di Fermi. Più avanti, al § 18, verrà mostrato come si determina il ramo di Bose.

La descrizione dello spettro di un sistema macroscopico mediante il concetto di quasi-particelle con una data dipendenza di $\varepsilon$ da $\mathbf{p}$ è una descrizione approssimata la cui precisione cala all'aumentare di $|\varepsilon - \mu|$. La deviazione dal quadro di quasi-particelle indipendenti si rivela nello spostarsi del polo della funzione di Green verso il dominio complesso: l'energia $\varepsilon(\mathbf{p})$ diventa complessa. In accordo con le regole generali di meccanica quantistica (vedi III, § 134), la complessità dei livelli energetici significa che la durata di vita $\tau$ dello stato eccitato del sistema è finita ($\tau \sim 1/|\operatorname{Im}\varepsilon|$). La grandezza stessa $\operatorname{Im}\varepsilon$ caratterizza quanto siano « smussati » i valori dell'energia della quasi-particella (larghezza del livello). È ovvio che questa interpretazione ha senso soltanto a condizione che la parte immaginaria sia sufficientemente piccola: $|\operatorname{Im}\varepsilon| \ll |\varepsilon - \mu|$. Come è stato mostrato al § 1, questa condizione viene soddisfatta effettivamente per gli stati debolmente eccitati del sistema in quanto $|\operatorname{Im}\varepsilon| \sim 1/\tau \backsim (p - p_F)^2$, mentre $\operatorname{Re}(\varepsilon - \mu) \backsim |p - p_F|$.

Il segno necessario di $\operatorname{Im}\varepsilon$ viene garantito dalla determinazione del segno della parte immaginaria della funzione di Green. Infatti, nell'intorno del suo polo questa funzione ha la forma

$$G(\omega, \mathbf{p}) \approx \frac{Z}{\omega + \mu - \varepsilon(\mathbf{p})}, \tag{8,17}$$

dove la costante $Z > 0$ poiché i coefficienti $A_m$, $B_m$ nello sviluppo (8,7) sono positivi; spesso la grandezza $Z$ si chiama (per analogia con l'elettrodinamica quantistica) *costante di rinormalizzazione*. La parte immaginaria della funzione di Green è

$$\operatorname{Im} G \approx \frac{Z \operatorname{Im}\varepsilon}{|\omega + \mu - \varepsilon|^2}.$$

Osservando che questa espressione è riferita ai valori $\omega \approx \varepsilon - \mu$ e confrontandone il segno con la regola (8,14), troviamo che

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im}\varepsilon < 0 \quad \text{per} \quad \operatorname{Re}\varepsilon > \mu, \\ &\operatorname{Im}\varepsilon > 0 \quad \text{per} \quad \operatorname{Re}\varepsilon < \mu, \end{aligned} \tag{8,18}$$

come deve essere: questo segno di $\operatorname{Im}\varepsilon$ corrisponde in entrambi i casi ($\varepsilon_m^{(+)}$ ed $\varepsilon_m^{(-)}$ nella formula (8,9)) all'aggiunta immaginaria negativa corretta all'energia $E_m$ dello stato eccitato.

Sulle proprietà analitiche della funzione di Green torneremo ancora nel § 36, dove questa questione verrà studiata direttamente per il caso generale di temperature arbitrarie.

## *§ 9. Funzione di Green di un gas di Fermi perfetto*

Per illustrare le relazioni generali ottenute al paragrafo precedente, calcoliamo la funzione di Green di un gas perfetto.

Gli operatori $\psi$ di Schrödinger si possono rappresentare sempre sotto forma dello sviluppo

$$\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}) = \sum_{\sigma \mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma} \psi_{\mathbf{p}\alpha}(\mathbf{r}, \sigma) \tag{9,1}$$

nel sistema completo di funzioni $\psi_{\mathbf{p}\alpha}(\sigma)$, che sono funzioni d'onda spinoriali della particella libera di impulso $\mathbf{p}$ (e di proiezione dello spin $\sigma$), cioè nelle onde piane

$$\psi_{\mathbf{p}\alpha} = \frac{u_\alpha}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{pr}} \tag{9,2}$$

($u_\alpha$ è l'ampiezza spinoriale normalizzata in base alla condizione $u_\alpha u_\alpha^* = 1$); le funzioni $\psi_{\mathbf{p}\alpha}$ scelte in questo modo non riguardano l'interazione reale di particelle nel sistema.

Ma per un sistema di particelle non interagenti l'operatore $\psi$ di Heisenberg può essere scritto anch'esso sotto forma esplicita. In questo caso il passaggio dalla rappresentazione di Schrödinger a quella di Heisenberg si riduce all'introduzione in ciascun termine della somma dello sviluppo (9,1) del fattore temporale corrispondente

$$\hat{\Psi}_\alpha(t, \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma} \psi_{\mathbf{p}\alpha}(\mathbf{r}, \sigma) \exp\left[-i\left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right) t\right]. \tag{9,3}$$

È facile convincersene osservando che gli elementi matriciali dell'operatore di Heisenberg, per qualsiasi transizione $i \to f$, devono contenere i fattori $\exp[-i(E_i' - E_f')t]$, dove $E_i', E_f'$ sono rispettivamente le energie degli stati iniziale e finale (nel caso considerato esse rappresentano autovalori dell'operatore hamiltoniano $\hat{H}' = \hat{H} - \mu\hat{N}$). Per la transizione accompagnata dalla diminuzione di 1 del numero di particelle nello stato $\mathbf{p}\alpha$ la differenza $E_i' - E_f'$ vale $p^2/2m - \mu$ in modo che la suddetta condizione viene soddisfatta.

Tuttavia, anziché calcolare direttamente la funzione di Green mediante la relazione (9,3) in base alla definizione (7,10), è più comodo ridurre dapprima questa definizione a un'equazione differenziale equivalente. A tal fine deriviamo la funzione $G_{\alpha\beta}(X_1 - X_2)$ rispetto a $t_1$. In questo caso si deve tener presente che questa funzione è discontinua nel punto $t_1 = t_2$. Infatti, in accordo con la definizione (7,10) il salto della funzione è

$$[G_{\alpha\beta}] \equiv G_{\alpha\beta}|_{t_1=t_2+0} - G_{\alpha\beta}|_{t_1=t_2-0} =$$
$$= -i\langle\hat{\Psi}_\alpha(t_1, \mathbf{r}_1)\hat{\Psi}_\beta^+(t_1, \mathbf{r}_2) + \hat{\Psi}_\beta^+(t_1, \mathbf{r}_2)\hat{\Psi}_\alpha(t_1, \mathbf{r}_1)\rangle$$

ossia, in virtù della (7,3) [1]),

$$[G_{\alpha\beta}] = -i\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{9,4}$$

---

[1]) Sottolineiamo che il valore di questo salto è indipendente dall'interazione fra le particelle!

L'esistenza del salto conduce, durante la derivazione, alla comparsa del termine $[G_{\alpha\beta}]\,\delta\,(t_1 - t_2)$. Perciò

$$\frac{\partial}{\partial t_1} G_{\alpha\beta} = -i \left\langle \mathrm{T}\, \frac{\partial \hat{\Psi}_\alpha (X_1)}{\partial t_1}\, \hat{\Psi}^+_\beta (X_2) \right\rangle - \\ - i\delta_{\alpha\beta}\delta\,(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\,\delta\,(t_1 - t_2). \qquad (9,5)$$

Per un sistema di particelle libere l'operatore $\psi$ di Heisenberg verifica l'equazione

$$i\,\frac{\partial \hat{\Psi}_\alpha}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\,\Delta\hat{\Psi}_\alpha - \mu\hat{\Psi}_\alpha$$

(cfr. la (7,8)). Sostituendo questa derivata nella (9,5) e di nuovo tenendo conto della definizione (7,10), otteniamo per la funzione di Green la seguente equazione:

$$\left(i\,\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta}{2m} + \mu\right) G^{(0)}\,(t,\,\mathbf{r}) = \delta\,(t)\,\delta\,(\mathbf{r}), \qquad (9,6)$$

dove si è già posto $G^{(0)}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}G^{(0)}$ e l'indice (0) di $G$ mostra l'assenza di interazione fra le particelle.

Trasformiamo questa equazione secondo Fourier:

$$\left(\omega - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mu\right) G^{(0)}\,(\omega,\,\mathbf{p}) = 1.$$

Definendo mediante questa relazione la funzione di Green, occorre aggiungere ad $\omega$ una parte immaginaria infinitesima in modo tale che la parte immaginaria di $G$ abbia segno corretto (in accordo con la (8,14)):

$$G^{(0)}\,(\omega,\,\mathbf{p}) = \left[\omega - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mu + i0\cdot\mathrm{sign}\,\omega\right]^{-1}. \qquad (9,7)$$

Il polo di questa espressione si trova per $\omega + \mu = \varepsilon\,(\mathbf{p}) = p^2/2m$ in accordo con il fatto che in un gas perfetto le quasi-particelle coincidono con le particelle reali. Il potenziale chimico del gas di Fermi perfetto è $\mu = p_F^2/2m$. Per gli stati debolmente eccitati il valore di $p$ è vicino a $p_F$ in modo che si può effettuare la sostituzione $p^2/2m \approx \approx \mu + v_F\,(p - p_F)$, dove $v_F = p_F/m$, e riscrivere la funzione di Green per questi stati nella forma

$$G^{(0)}\,(\omega,\,\mathbf{p}) = [\omega - v_F\,(p - p_F) + i0\cdot\mathrm{sign}\,\omega]^{-1}. \qquad (9,8)$$

Qualunque sia l'integrazione con la partecipazione della funzione $G^{(0)}$, l'esistenza della parte immaginaria infinitesima al suo denominatore è essenziale unicamente nell'intorno del polo, allorché $\omega \approx \approx v_F\,(p - p_F)$. Da questo punto di vista si può sostituire sign $\omega$ nella (9,7) con sign $(p - p_F)$ e scrivere $G^{(0)}$ nella forma

$$G^{(0)}\,(\omega,\,\mathbf{p}) = [\omega - p^2/2m + \mu + i0\cdot\mathrm{sign}\,(p - p_F)]^{-1}. \qquad (9,9)$$

Questa sostituzione è essenziale in quanto $G^{(0)}$ rappresentata nella forma (9,9) risulta essere un'unica funzione analitica della variabile complessa $\omega$ in tutto il piano e, per il calcolo degli integrali, si può ricorrere ai metodi della teoria delle funzioni analitiche.

Così, per calcolare l'integrale (7,23) (la distribuzione degli impulsi delle particelle) a $t$ negativo diverso da zero, chiudiamo il cammino di integrazione (asse reale $\omega$) con una semicirconferenza indefinitamente lontana nel semipiano superiore (dopo di che si può porre $t = 0$). L'integrale

$$N(\mathbf{p}) = -\frac{i}{2\pi}\int \frac{d\omega}{\omega - p^2/2m + \mu + i0\cdot\operatorname{sign}(p - p_F)}$$

verrà determinato ora dal residuo dell'espressione integranda in un polo giacente nel semipiano superiore. Per $p > p_F$ questo polo non esiste, cosicché $N(\mathbf{p}) = 0$. Se, invece, $p < p_F$, allora troviamo che $N(\mathbf{p}) = 1$, come deve essere per lo stato fondamentale del gas di Fermi perfetto.

## § 10. *Distribuzione degli impulsi delle particelle del liquido di Fermi*

La funzione di Green del liquido di Fermi non può essere calcolata, ovviamente, in forma generale, come l'abbiamo fatto per il gas di Fermi. Ma l'affermazione secondo la quale il liquido di Fermi ha uno spettro del tipo descritto al § 1 significa che la sua funzione di Green ha un polo per

$$\omega = \varepsilon(\mathbf{p}) - \mu \approx v_F(p - p_F), \qquad v_F = p_F/m^*. \tag{10,1}$$

In altre parole, essa può essere rappresentata nella forma

$$G(\omega, \mathbf{p}) = \frac{Z}{\omega - v_F(p - p_F) + i0\cdot\operatorname{sign}\omega} + g(\omega, \mathbf{p}), \tag{10,2}$$

dove $g(\omega, \mathbf{p})$ è una funzione finita nel punto (10,1). Come è stato già rilevato in proposito della (8,17), il coefficiente $Z$ (il residuo della funzione $G$ nel polo) è positivo.

Dall'espressione (10,2) si può trarre una conclusione interessante inerente alla natura della distribuzione degli impulsi delle particelle del liquido (non delle quasi-particelle!). E precisamente, calcoliamo la differenza fra i valori della funzione di distribuzione $N(\mathbf{p})$ (dipendente di fatto soltanto dal valore assoluto di $p$) da ambedue le parti della superficie della sfera di Fermi, cioè il limite della differenza

$$N(p_F - q) - N(p_F + q)$$

per $q = +0$.

La distribuzione $N$ (p) si esprime mediante la funzione di Green con l'integrale (7,23). Essendo finita la funzione $g$ ($\omega$, p), è evidente a priori che la differenza dei suoi integrali tenderà a zero per $q \to 0$. Pertanto è sufficiente considerare la sola differenza degli integrali dei termini contenenti poli nella (10,2). Poiché durante l'integrazione il termine $i0$ a denominatore è essenziale soltanto nell'intorno del polo, si può scrivere (come è stato già detto al § 9) sign $(p - p_F)$ al posto di sign $\omega$. Allora abbiamo

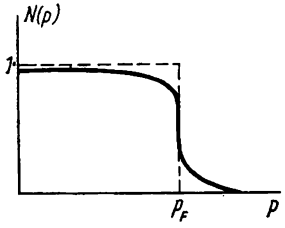


Fig. 1

$$N(p_F - q) - N(p_F + q) = \\ = -i \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{Z}{\omega + v_F q - i0} - \frac{Z}{\omega - v_F q + i0} \right\} \frac{d\omega}{2\pi}$$

(data la convergenza di questo integrale della differenza, vi si può omettere il fattore $e^{-i\omega t}$ con $t = -0$). Chiudendo ora il cammino di integrazione con una semicirconferenza indefinitamente lontana (in uno qualsiasi dei semipiani), troviamo che l'integrale vale $Z$ e non dipende da $q$. Quindi abbiamo

$$N(p_F - 0) - N(p_F + 0) = Z \tag{10,3}$$

(*A. B. Migdal*, 1957).

Sopra è stato mostrato che $Z > 0$. Poiché $N$ (p) $\leqslant 1$, allora dalla (10,3) risulta che

$$0 < Z \leqslant 1 \tag{10,4}$$

(il valore $Z = 1$ si ottiene soltanto nel caso limite del gas perfetto).

Quindi, la distribuzione degli impulsi delle particelle nel liquido di Fermi per $T = 0$ ha, come nel caso del gas, un salto sulla superficie della sfera di Fermi diminuendo nella direzione dall'interno verso l'esterno della sfera. A differenza del gas, il valore del salto è però minore di 1, e la funzione $N$ (p) resta diversa da zero anche per $p > p_F$, come è rappresentato dalla curva continua nella fig. 1 (la linea tratteggiata corrisponde al gas).

## *§ 11. Calcolo delle grandezze termodinamiche in base alla funzione di Green*

La conoscenza della funzione di Green di un sistema è sufficiente per descriverne le proprietà termodinamiche. Per $T = 0$ queste proprietà vengono espresse dalla dipendenza dell'energia del sistema (coincidente con l'energia $E_0$ dello stato fondamentale) dalla densità $N/V$.

Dopo aver definito (mediante l'equazione (8,16)) la legge di dispersione delle quasi-particelle $\varepsilon$ ($p$), si può trovare questa dipen-

denza tenendo conto che

$$\varepsilon(p_F) = \mu. \tag{11,1}$$

Poiché la dipendenza di $p_F$ da $N/V$ è nota e, in accordo con la (1,1), vale

$$p_F = (3\pi^2)^{1/3}(N/V)^{1/3}, \tag{11,2}$$

l'uguaglianza (11,1) definisce la funzione $\mu(N/V)$ (anche se in forma implicita in quanto la legge di dispersione $\varepsilon(p)$ contiene, in generale, $\mu$ quale parametro). Per $T = 0$ (e quindi per $S = 0$) il potenziale chimico è $\mu = (\partial E_0/\partial N)_V$; integrando questa uguaglianza troviamo l'energia cercata

$$E_0 = \int_0^N \mu\left(\frac{N}{V}\right) dN \tag{11,3}$$

(per $N = 0$ si ha, ovviamente, $E_0 = 0$).

Un altro modo di descrizione delle proprietà termodinamiche per $T = 0$ consiste nel calcolo del potenziale termodinamico $\Omega$. Secondo la definizione generale (vedi V, § 24) questo potenziale vale $\Omega = E - TS - \mu N = -PV$ e il suo differenziale $d\Omega = -S\,dT - N\,d\mu$; per $T = 0$ abbiamo anche $S = 0$, e queste espressioni diventano

$$\Omega = E - \mu N, \tag{11,4}$$

$$d\Omega = -N\,d\mu. \tag{11,5}$$

Ricordiamo anche che per il suo significato il potenziale $\Omega$ descrive le proprietà del sistema per $V =$ costante.

Il metodo più semplice di esprimere $\Omega$ attraverso la funzione di Green consiste nell'utilizzazione del legame (7,24) esistente fra $N/V$ e $G$. Sostituendo $N$ dalla (7,24) nella (11,5) e integrando in $d\mu$ (per $V =$ costante), otteniamo

$$\Omega(\mu) = 2iV \int_0^\mu d\mu \cdot \lim_{t\to -0} \int G(\omega, \mathbf{p})\, e^{-i\omega t} \frac{d^3p\, d\omega}{(2\pi)^4}, \tag{11,6}$$

poiché si ha di nuovo $\Omega = 0$ per $\mu = 0$.

## § 12. *Operatori $\Psi$ nella rappresentazione dell'interazione*

È ovvio che non si può calcolare in forma generale la funzione di Green di un sistema di particelle interagenti. Tuttavia esiste un formalismo matematico (simile alla tecnica dei diagrammi nella teoria quantistica dei campi) che consente di calcolarla sotto forma di una serie di potenze dell'energia di interazione delle particelle. In questo caso ciascun termine della serie viene espresso mediante la funzione di Green del sistema di particelle libere e l'operatore di interazione.

Accanto alla rappresentazione di Heisenberg ne introduciamo un'altra, ossia una rappresentazione in cui la dipendenza degli operatori dal tempo è determinata non dall'operatore hamiltoniano vero del sistema

$$\hat{H}' = \hat{H}'^{(0)} + \hat{V} = \hat{H}^{(0)} - \mu\hat{N} + \hat{V}$$

($\hat{V}$ è l'operatore di interazione), bensì dall'operatore hamiltoniano delle particelle libere $\hat{H}'^{(0)}$:

$$\hat{\Psi}_0(t, \mathbf{r}) = \exp(i\hat{H}'^{(0)}t)\,\hat{\psi}(\mathbf{r})\exp(-i\hat{H}'^{(0)}t). \qquad (12,1)$$

In questa rappresentazione (detta *rappresentazione dell'interazione*) distingueremo mediante l'indice 0 gli operatori dalle funzioni d'onda. Esprimendo la funzione di Green mediante gli operatori $\hat{\Psi}_0$ (al posto degli operatori di Heisenberg $\hat{\Psi}$), facciamo così il primo passo verso il nostro scopo, ossia l'espressione di $G$ mediante $G^{(0)}$ e $\hat{V}$.

In questo paragrafo indichiamo con la lettera $\Phi$ (o $\varphi$) le funzioni d'onda nello « spazio dei numeri di riempimento » (a differenza delle funzioni d'onda coordinate $\Psi$ o $\psi$); su queste funzioni agiscono gli operatori della seconda quantizzazione. Sia $\varphi$ una tale funzione nella rappresentazione di Schrödinger; la sua dipendenza dal tempo è data dall'equazione d'onda

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = (\hat{H}'^{(0)} + \hat{V})\,\varphi. \qquad (12,2)$$

Nella rappresentazione di Heisenberg, dove tutta la dipendenza temporale è riportata sugli operatori, la funzione d'onda $\Phi$ del sistema è in generale indipendente dal tempo: $\Phi$ = costante. Nella rappresentazione dell'interazione, invece, la funzione d'onda $\Phi_0$ dipende dal tempo, ma questa dipendenza è legata unicamente all'interazione fra le particelle del sistema e determinata dall'equazione

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi_0(t) = \hat{V}_0(t)\,\Phi_0(t), \qquad (12,3)$$

dove

$$\hat{V}_0(t) = \exp(i\hat{H}^{(0)}t)\,\hat{V}\exp(-i\hat{H}^{(0)}t) \qquad (12,4)$$

è l'operatore di interazione nella stessa rappresentazione (per gli operatori della forma (7,6-7) il passaggio a questa rappresentazione si riduce semplicemente alla sostituzione di $\hat{\Psi}$ con $\hat{\Psi}_0$). L'equazione (12,3) si ottiene facilmente osservando che alla trasformazione degli operatori in base alla (12,1) corrisponde la trasformazione delle funzioni d'onda secondo

$$\Phi_0 = \exp(i\hat{H}'^{(0)}t)\,\varphi \qquad (12,5)$$

(vedi III, § 12). Derivando questa espressione e tenendo conto della (12,2), otteniamo la (12,3) [1].

In virtù della (12,3) i valori di $\Phi_0(t)$ in due istanti indefinitamente vicini sono legati dall'uguaglianza

$$\Phi_0(t + \delta t) = [1 - i\delta t \cdot \hat{V}_0(t)]\, \Phi_0(t) = \\ = \exp\{-i\delta t \cdot \hat{V}_0(t)\}\, \Phi_0(t).$$

Rispettivamente il valore $\Phi_0$ all'istante arbitrario $t$ può essere espresso in funzione del valore a un certo istante iniziale $t_0$ ($t_0 < t$) come

$$\Phi_0(t) = \hat{S}(t, t_0)\, \Phi_0(t_0), \tag{12,6}$$

dove

$$\hat{S}(t, t_0) = \prod_{t_i = t_0}^{t} \exp\{-i\delta t \cdot \hat{V}_0(t_i)\}, \tag{12,7}$$

mentre i cofattori in questo prodotto sono disposti, evidentemente da destra a sinistra nell'ordine di crescita dei tempi $t_i$; il limite del prodotto si intende rispetto a tutti gli intervalli indefinitamente piccoli $\delta t$ compresi fra $t_0$ e $t$. Se $V_0(t)$ fosse una funzione ordinaria questo limite si ridurrebbe semplicemente a

$$\exp\left\{-i \int_{t_0}^{t} V_0(t)\, dt\right\}.$$

Ma questa riduzione è basata sulla commutatività dei fattori calcolati ad istanti differenti, la quale è supposta nel passaggio dal prodotto nella (12,7) alla sommatoria nell'esponenziale. Per l'operatore $\hat{V}_0(t)$ questa commutatività non esiste e la riduzione a un integrale ordinario è impossibile. Si può invece scrivere la (12,7) in forma simbolica

$$\hat{S}(t, t_0) = \mathrm{T} \exp\left\{-i \int_{t_0}^{t} \hat{V}_0(t)\, dt\right\}, \tag{12,8}$$

dove T è il simbolo di disposizione cronologica dei fattori nello stesso ordine che nella (12,7), cioè da destra a sinistra, dai tempi più piccoli a quelli più grandi.

---

[1]) L'equazione (12,3) coincide con la (73,5) del volume IV, e il processo di risoluzione seguente ripete quello del volume IV, § 73.

L'operatore $\hat{S}$ è unitario ($\hat{S}^{-1} = \hat{S}^{+}$) e gode delle seguenti proprietà evidenti:

$$\hat{S}(t_3, t_2)\,\hat{S}(t_2, t_1) = \hat{S}(t_3, t_1),$$
$$\hat{S}^{-1}(t_2, t_1)\,\hat{S}^{-1}(t_3, t_2) = \hat{S}^{-1}(t_3, t_1). \tag{12,9}$$

Per rendere più semplici le ulteriori considerazioni, partiamo dall'ipotesi formale (che non incide sui risultati finali) che l'interazione $\hat{V}_0(t)$ intervenga adiabaticamente da $t = -\infty$ ad istanti finiti e scompaia adiabaticamente per $t = +\infty$. Allora per $t \to -\infty$, prima che vi fosse l'interazione, la funzione d'onda $\Phi_0(t)$ coincide con la funzione di Heisenberg $\Phi$. Ponendo nella (12,6) $t_0 = -\infty$, otteniamo

$$\Phi_0(t) = \hat{S}(t, -\infty)\,\Phi. \tag{12,10}$$

Stabilendo in questo modo un legame fra le funzioni d'onda in ambedue le rappresentazioni, noi stabiliamo così anche la legge di trasformazione degli operatori, compresi gli operatori $\psi$:

$$\hat{\Psi} = \hat{S}^{-1}(t, -\infty)\,\hat{\Psi}_0\hat{S}(t, -\infty). \tag{12,11}$$

In forza dell'unitarietà di $\hat{S}$, gli operatori $\hat{\Psi}^{+}$ si trasformano anch'essi in base alla stessa legge.

Esprimiamo ora la funzione di Green mediante gli operatori $\psi$ nella rappresentazione dell'interazione [1]. Sia $t_1 > t_2$; allora

$$G_{\alpha\beta}(X_1, X_2) = -i\,\langle\hat{\Psi}_\alpha(t_1)\,\hat{\Psi}^{+}_\beta(t_2)\rangle =$$
$$= -i\,\langle\hat{S}^{-1}(t_1, -\infty)\,\hat{\Psi}_{0\alpha}(t_1)\,\hat{S}(t_1, -\infty)\times$$
$$\times\,\hat{S}^{-1}(t_2, -\infty)\,\hat{\Psi}^{+}_{0\beta}(t_2)\,\hat{S}(t_2, -\infty)\rangle.$$

Secondo la (12,9) abbiamo

$$\hat{S}(t_1, -\infty)\,\hat{S}^{-1}(t_2, -\infty) = \hat{S}(t_1, t_2)\,\hat{S}(t_2, -\infty)\,\hat{S}^{-1}(t_2, -\infty) = \hat{S}(t_1, t_2),$$
$$\hat{S}^{-1}(t_1, -\infty) = \hat{S}^{-1}(t_1, -\infty)\,\hat{S}^{-1}(\infty, t_1)\,\hat{S}(\infty, t_1) =$$
$$= \hat{S}^{-1}(\infty, -\infty)\,\hat{S}(\infty, t_1).$$

Sostituendo nell'espressione precedente, otteniamo

$$G_{\alpha\beta}(X_1, X_2) = -i\,\langle\hat{S}^{-1}(\infty, -\infty)\,\hat{S}(\infty, t_1)\,\hat{\Psi}_{0\alpha}(t_1)\,\hat{S}(t_1, t_2)\times$$
$$\times\,\hat{\Psi}^{+}_{0\beta}(t_2)\,\hat{S}(t_2, -\infty)\rangle.$$

Intendendo gli operatori $\hat{S}$ come prodotti (12,7), vediamo che tutti

[1] Questa conclusione ripete i ragionamenti del volume IV, § 100.

i fattori nell'espressione di cui si è fatta la media sono disposti, a cominciare dal secondo, in ordine cronologico da destra a sinistra, da $t = -\infty$ a $t = \infty$. Pertanto possiamo scrivere

$$G_{\alpha\beta}(X_1, X_2) = -i \langle \hat{S}^{-1} \mathrm{T} [\hat{\Psi}_{0\alpha}(t_1) \hat{\Psi}^{+}_{0\beta}(t_2) \hat{S}] \rangle, \qquad (12,12)$$

dove

$$\hat{S} = \hat{S}(\infty, -\infty) = \mathrm{T} \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}_0(t)\, dt \right\}. \qquad (12,13)$$

I calcoli per $t_1 < t_2$ si differenziano da quelli eseguiti soltanto per le notazioni, e il risultato finale (12,12-13) è valido qualunque siano $t_1$, $t_2$.

La trasformazione effettuata è indipendente dallo stato del sistema rispetto al quale la media viene presa in considerazione. Ma se si prende la media rispetto allo stato fondamentale (così come nella (12,12)), la trasformazione può essere estesa ancora di più. Osserviamo a tal fine che l'inclusione o l'esclusione adiabatica dell'interazione, così come ogni perturbazione adiabatica, non può implicare una transizione con cambiamento dell'energia del sistema quantistico (vedi III, § 41). Perciò il sistema che si trovava in uno stato non degenere (tale è lo stato fondamentale) resta in questo stesso stato. In altre parole, l'azione dell'operatore $\hat{S}$ sulla funzione d'onda $\Phi = \Phi_0(-\infty)$ si deve ridurre alla moltiplicazione per un fattore di fase (inessenziale per lo stato), ossia per la media di $\hat{S}$ nello stato fondamentale: $\hat{S}\Phi = \langle \hat{S} \rangle \Phi$. Allo stesso modo, $\Phi^* \hat{S}^{-1} = \langle S \rangle^{-1} \Phi^*$. In tal modo otteniamo infine la seguente formula per la funzione di Green espressa mediante gli operatori nella rappresentazione dell'interazione [1]):

$$iG_{\alpha\beta}(X_1, X_2) = \frac{1}{\langle \hat{S} \rangle} \langle \mathrm{T} [\hat{\Psi}_{0\alpha}(X_1) \hat{\Psi}^{+}_{0\beta}(X_2) \hat{S}] \rangle. \qquad (12,14)$$

In accordo con il significato stesso di questa rappresentazione, la media nella (12,14) si prende rispetto allo stato fondamentale del sistema di particelle libere. Infatti, le proprietà degli operatori $\hat{\Psi}_0$ coincidono con le proprietà degli operatori di Heisenberg $\hat{\Psi}$ in assenza di interazioni, e la funzione d'onda di Heisenberg $\Phi$ è indipendente dal tempo e, quindi, coincide con il proprio valore per $t = -\infty$, quando l'interazione non esiste. Pertanto, in particolare

$$\langle \mathrm{T} \hat{\Psi}_{0\alpha}(X_1) \hat{\Psi}^{+}_{0\beta}(X_2) \rangle = iG^{(0)}_{\alpha\beta}(X_1, X_2) \qquad (12,15)$$

è la funzione di Green di un sistema di particelle non interagenti.

---

[1]) Notiamo una certa convenzionalità delle notazioni nella (12,14): anche se il simbolo T vi figura due volte (in forma esplicita e nella definizione di $S$), in realtà tutti i fattori nel prodotto devono essere disposti in un'unica successione cronologica.

## § 13. *Tecnica dei diagrammi per il sistema di Fermi*

Il senso di espressioni simboliche del tipo (12,14) è che esse danno la possibilità di scrivere facilmente i termini successivi degli sviluppi in potenze di $\hat{V}$. Così,

$$\langle \mathrm{T}\hat{\Psi}_{0\alpha}(X)\,\hat{\Psi}^{+}_{0\beta}(X')\,\hat{S}\rangle = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \langle \mathrm{T}\hat{\Psi}_{0\alpha}(X) \times \\ \times \hat{\Psi}^{+}_{0\beta}(X')\,\hat{V}_0(t_1) \ldots \hat{V}_0(t_n)\rangle, \tag{13,1}$$

e l'espressione per $\langle \hat{S} \rangle$ differisce da quella scritta soltanto per l'assenza dei fattori $\hat{\Psi}_{0\alpha}\hat{\Psi}^{+}_{0\beta}$ sotto il segno del prodotto T. Come è stato già detto, l'operatore $\hat{V}_0(t)$ nella rappresentazione dell'interazione si ottiene dalla (7,7) sostituendo tutti gli $\hat{\Psi}$ con $\hat{\Psi}_0$. Il calcolo dei termini successivi dello sviluppo (13,1) si riduce, quindi, al calcolo delle medie, rispetto allo stato fondamentale, del prodotto T di un numero diverso di operatori $\psi$ di particelle libere.

Questi calcoli diventano, in misura notevole, automatici mediante le regole della *tecnica dei diagrammi*, le quali, però, dipendono essenzialmente dalla natura del sistema fisico in esame. La tecnica, che sarà data in questo paragrafo, si riferisce a sistemi di Fermi non superfluidi in cui l'interazione fra le particelle è supposta a coppie e non dipendente dagli spin. L'operatore di interazione corrispondente è

$$\hat{V}_0(t) = \frac{1}{2} \int \hat{\Psi}^{+}_{0\gamma}(t, \mathbf{r}_1)\,\hat{\Psi}^{+}_{0\delta}(t, \mathbf{r}_2)\,U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\,\hat{\Psi}_{0\delta} \times \\ \times (t, \mathbf{r}_2)\,\hat{\Psi}_{0\gamma}(t, \mathbf{r}_1)\,d^3x_1\,d^3x_2, \tag{13,2}$$

dove $U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ è l'energia di interazione fra due particelle (omettiamo gli indici (2) di $\hat{V}$ e di $U$).

La media dei prodotti di operatori $\psi$ viene calcolata mediante il *teorema di Wick* che è così formulato [1]):

la media del prodotto di un qualunque numero (pari) di operatori $\hat{\Psi}$ e $\hat{\Psi}^{+}$ è uguale alla somma dei prodotti di tutte le medie (convoluzioni) a due a due possibili di questi operatori. Gli operatori di ogni coppia sono disposti nello stesso ordine che nel prodotto iniziale. Il segno di ciascun termine della somma è determinato dal fattore $(-1)^P$, dove $P$ è il numero di permutazioni di operatori da eseguire per mettere in fila tutti gli operatori di cui si fa la media.

[1]) Per non interrompere l'esposizione del materiale, rimandiamo la dimostrazione di questo teorema alla fine del paragrafo.

Sono diverse da zero soltanto le convoluzioni in cui entra un operatore $\hat{\Psi}$ e un operatore $\hat{\Psi}^+$: tutte le particelle nell'elemento matriciale diagonale, che vengono annichilate dall'operatore $\hat{\Psi}$, devono essere nuovamente generate dall'operatore $\hat{\Psi}^+$. Perciò è chiaro che la media del prodotto di più operatori può essere diversa da zero solo se contiene un numero uguale di operatori $\hat{\Psi}$ e $\hat{\Psi}^+$.

Applicato alla media del prodotto T il teorema di Wick permette di esprimerla in funzione delle medie di coppie di prodotti T, ossia, in accordo con la (12,15), mediante le funzioni di Green delle particelle libere. Effettuiamo questa operazione per la correzione del primo ordine nella funzione di Green del sistema di particelle interagenti.

Notiamo preliminarmente che lo sviluppo dell'espressione a numeratore della formula (12,14) in base al teorema di Wick implica la comparsa di termini della forma

$$\langle \mathrm{T}\hat{\Psi}_{0\alpha}(X_1)\,\hat{\Psi}^+_{0\beta}(X_2)\rangle\,\langle\hat{S}\rangle = iG^{(0)}_{\alpha\beta}(X_1,\,X_2)\,\langle\hat{S}\rangle, \qquad (13,3)$$

in cui una coppia di operatori $\psi$ « esterni » (rispetto a $\hat{S}$) forma una convoluzione; quanto all'espressione $\langle\hat{S}\rangle$, essa contiene (in ogni termine del suo sviluppo) soltanto convoluzioni di operatori « interni » tra loro. Il fattore $\langle\hat{S}\rangle$ si semplifica completamente con il denominatore nella (12,14) e, di conseguenza, tutti questi termini danno semplicemente una funzione di Green « imperturbata » $iG^{(0)}_{\alpha\beta}$.

Se conserviamo i due primi termini dello sviluppo nella (13,1), dopo aver sostituito la (13,2) e cambiato la notazione delle variabili, allora otteniamo

$$iG_{\alpha\beta}(X_1,\,X_2) \approx iG^{(0)}_{\alpha\beta} + iG^{(1)}_{\alpha\beta},$$

dove

$$iG^{(1)}_{\alpha\beta} = -\frac{i}{2}\langle \mathrm{T}\hat{\Psi}_{0\alpha}(X_1)\,\hat{\Psi}^+_{0\beta}(X_2)\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty} dt\int d^3x_3\,d^3x_4\,\hat{\Psi}^+_{0\gamma}(t,\,\mathbf{r}_3)\,\hat{\Psi}^+_{0\delta}(t,\,\mathbf{r}_4)\,U(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_4)\times$$

$$\times\,\hat{\Psi}_{0\delta}(t,\,\mathbf{r}_4)\,\hat{\Psi}_{0\gamma}(t,\,\mathbf{r}_3)\rangle.$$

Per rendere più compatta la scrittura delle formule, introduciamo la notazione

$$U(X_1-X_2) = U(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\,\delta(t_1-t_2). \qquad (13,4)$$

Allora [1])

$$iG_{12}^{(1)} = -\frac{i}{2}\int \langle T\hat{\Psi}_1\hat{\Psi}_2^+\hat{\Psi}_3^+\hat{\Psi}_4^+\hat{\Psi}_4\hat{\Psi}_3\rangle\, U_{34} d^4X_3\, d^4X_4,$$

dove $d^4X = dt\, d^3x$.

Per trovare la media in base al teorema di Wick, scriviamo separatamente gli operatori e indichiamo tutte le varianti necessarie di convoluzioni:

$$\langle \Psi_1\Psi_2^+\Psi_3^+\Psi_4^+\Psi_4\Psi_3\rangle \to \Psi_1\Psi_2^+\Psi_3^+\Psi_4^+\Psi_4\Psi_3 +$$

$$+ \Psi_1\Psi_2^+\Psi_3^+\Psi_4^+\Psi_4\Psi_3 + \Psi_1\Psi_2^+\Psi_3^+\Psi_4^+\Psi_4\Psi_3 +$$

$$+ \Psi_1\Psi_2^+\Psi_3^+\Psi_4^+\Psi_4\Psi_3$$

In accordo con quanto detto sopra, abbiamo omesso i termini contenenti la convoluzione $\widehat{\Psi_1\Psi_2^+}$. Gli operatori che formano una convoluzione a due a due (congiunti con archi) si devono mettere l'uno vicino all'altro. Così, il primo operatore nella relazione suindicata corrisponde al prodotto

$$\langle T\hat{\Psi}_1\hat{\Psi}_3^+\rangle\ \langle T\hat{\Psi}_2^+\hat{\Psi}_4\rangle\ \langle T\hat{\Psi}_4^+\hat{\Psi}_3\rangle$$

e l'ultimo

$$-\ \langle T\hat{\Psi}_1\hat{\Psi}_4^+\rangle\ \langle T\hat{\Psi}_2^+\hat{\Psi}_4\rangle\ \langle \hat{\Psi}_3^+\hat{\Psi}_3\rangle.$$

Le convoluzioni di prodotti di operatori $\psi$ di diversi argomenti vengono sostituite nel seguente modo:

$$\widehat{\Psi_1\Psi_3^+} \equiv \langle T\hat{\Psi}_1\hat{\Psi}_3^+\rangle = iG_{13}^0, \quad \widehat{\Psi_2^+\Psi_4} = -iG_{42}^0 \text{ ecc.}$$

Quanto alle convoluzioni di operatori $\psi$ di argomenti identici, esse rappresentano la densità spaziale del numero di particelle in un gas

---

[1]) Qui e più avanti, per rendere più semplice la scrittura di espressioni particolarmente complesse, conveniamo di omettere l'indice di $\hat{\Psi}_0$ e di indicare con gli indici numerici 1, 2, . . . l'insieme di valori dell'argomento $X$ e dell'indice di spin:

$$\hat{\Psi}_1 \equiv \hat{\Psi}_\alpha(X_1), \qquad \hat{\Psi}_2 \equiv \hat{\Psi}_\beta(X_2), \ \ldots$$

$$G_{12} \equiv G_{\alpha\beta}(X_1, X_2), \qquad U_{12} \equiv U(X_1 - X_2).$$

perfetto (indichiamola con $n^{(0)}$), intesa come funzione del potenziale chimico [1]):

$$\langle \hat{\Psi}^+ \hat{\Psi} \rangle = n^{(0)}(\mu) = \frac{(2m\mu)^{3/2}}{3\pi^2}. \tag{13,5}$$

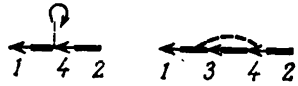
Otteniamo così

$$iG_{12}^{(1)} = \frac{1}{2} \int d^4X_3\, d^4X_4 \cdot U_{34} \left[ -G_{13}^{(0)} G_{34}^{(0)} G_{42}^{(0)} - \right.$$
$$\left. - G_{14}^{(0)} G_{43}^{(0)} G_{32}^{(0)} + in^{(0)} G_{13}^{(0)} G_{32}^{(0)} + in^{(0)} G_{14}^{(0)} G_{42}^{(0)} \right].$$

Questi quattro termini sono uguali a due a due, ossia si differenziano soltanto per la designazione delle variabili di integrazione $X_3$ e $X_4$. Come risultato, il fattore 1/2 scompare e, in tal modo, la correzione del primo ordine nella funzione di Green contiene in tutto due termini, e cioè

$$iG_{12}^{(1)} = \int U_{34} \left[ in^{(0)} G_{14}^{(0)} G_{42}^{(0)} - G_{13}^{(0)} G_{34}^{(0)} G_{42}^{(0)} \right] d^4X_3\, d^4X_4. \tag{13,6}$$

È comodo rappresentare graficamente la struttura di questi termini, mediante i seguenti *diagrammi di Feynman*:




(13,7)

La linea continua $4 \leftarrow 2$ in questi diagrammi esprime la convoluzione $\widehat{\Psi_4 \Psi_2^+}$ (cioè la funzione $iG_{42}^{(0)}$); le cifre indicano i numeri delle variabili $X_4$ e $X_2$ dalle quali dipendono gli operatori che formano la convoluzione, mentre le frecce corrispondono alla direzione da $\hat{\Psi}^+$ a $\hat{\Psi}$ nella convoluzione. La convoluzione $\widehat{\Psi^+ \Psi}$ di due operatori dipendenti da variabili identiche (cioè la densità $n^{(0)}$) è rappresentata da un cappio, cioè dalla curva continua « chiusa su se stessa ». La curva tratteggiata 3 - - - - - 4 esprime il fattore $U_{34}$. Con tutte le variabili indicate nei punti interni del diagramma (punti di intersezione delle linee) è sottintesa l'integrazione. Le variabili ($X_1$ e $X_2$) indicate nei « punti estremi » del diagramma restano libere.

I termini del primo ordine provenienti dalla (13,3) dovrebbero essere rappresentati da diagrammi che si dividono in due parti separate: un segmento di retta ($iG_{\alpha\beta}^{(0)}$) e un cappio formato da curve

---

[1]) Queste convoluzioni si ottengono sempre dagli operatori $\psi$ appartenenti a un medesimo operatore di interazione $V$. Pertanto in questi termini $\hat{\Psi}^+$ si trova sempre a sinistra di $\hat{\Psi}$.

chiuse continue, ad esempio

Pensando al metodo di convoluzione degli operatori e alla struttura dei diagrammi corrispondenti, si può capire l'origine della regola generale: in tutti gli ordini della teoria delle perturbazioni il ruolo del fattore $\langle S \rangle^{-1}$ nella (12,14) riconduce a tener conto soltanto dei diagrammi « connessi » aventi due estremi esterni, non contenenti due cappi « disgiunti » senza estremi esterni, non legati ad altre parti del diagramma né da linee continue né da linee tratteggiate (vedi la situazione analoga in elettrodinamica quantistica; IV, § 100).

La regola generale si manifesta nella riduzione del coefficiente 1/2 nella (13,6): non occorre tener conto (nei termini dell'$n$-esimo ordine) del fattore $1/n!$ discendente dallo sviluppo (13,1) e del fattore $2^{-n}$ proveniente dai coefficienti 1/2 nella (13,2). Infatti, i diagrammi dell'$n$-esimo ordine contengono fino a $n$ linee tratteggiate $i$ - - - - - $k$. Il fattore $1/n!$ si semplifica per la riduzione dei termini che differiscono per permutazioni delle coppie di numeri $i$, $k$ fra tutte le $n$ linee tratteggiate. Il fattore $2^{-n}$, invece, si riduce in seguito alle permutazioni dei numeri $i$, $k$ fra gli estremi di ciascuna di queste linee.

Formuleremo le regole definitive di tecnica dei diagrammi per calcolare le funzioni di Green non nella rappresentazione delle coordinate, bensì in quella degli impulsi, la più importante per le applicazioni fisiche.

Il passaggio alla rappresentazione degli impulsi si ottiene mediante lo sviluppo di Fourier (7,21-22), che scriviamo ora nella forma « quadridimensionale » [1])

$$G(X) = \int G(P)\, e^{-iPX} \frac{d^4P}{(2\pi)^4}, \qquad G(P) = \int G(X)\, e^{iPX}\, d^4X, \tag{13,8}$$

dove il « quadrimpulso » $P = (\omega, \mathbf{p})$ e $PX = \omega t - \mathbf{pr}$. Analogamente sviluppiamo anche il potenziale di interazione

$$U(X) = \delta(t)\, U(\mathbf{r}) = \int U(Q)\, e^{-iQX} \frac{d^4Q}{(2\pi)^4}, \tag{13,9}$$

dove $Q = (q_0, \mathbf{q})$; in questo caso $U(Q)$ coincide con la componente dello sviluppo tridimensionale

[1]) Per rendere più comoda l'esposizione del materiale e le notazioni, noi ricorriamo alla terminologia quadridimensionale. Ma sottolineiamo ancora una volta che essa qui non ha niente a che fare con l'invarianza relativistica!

$$U(Q) \equiv U(\mathbf{q}) = \int U(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3x. \qquad (13,10)$$

Essendo la funzione $U(\mathbf{r})$ pari, è evidente che $U(-\mathbf{q}) = U(\mathbf{q})$.

Eseguiamo questo sviluppo per la correzione del primo ordine $G^{(1)}_{12} \equiv G^{(1)}_{\alpha\beta}(X_1 - X_2)$. A tale scopo moltiplichiamo l'uguaglianza (13,6) per $\exp[iP(X_1 - X_2)]$ e integriamola in $d^4(X_1 - X_2)$.

Per il primo termine scriviamo

$$e^{iP(X_1 - X_2)} = e^{iP(X_1 - X_3)} e^{iP(X_3 - X_2)}$$

e, cambiando le variabili di integrazione, otteniamo

$$in^{(0)} \int G^{(0)}_{\alpha\gamma}(X_1 - X_3)\, e^{iP(X_1 - X_3)} d^4(X_1 - X_3) \times$$

$$\times \int G^{(0)}_{\gamma\beta}(X_3 - X_2)\, e^{iP(X_3 - X_2)} d^4(X_3 - X_2) \int U(X_3 - X_4)\, d^4(X_3 - X_4).$$

I primi due integrali danno $G^{(0)}_{\alpha\gamma}(P)\, G^{(0)}_{\gamma\beta}(P)$ e il terzo vale $U(0) = \int U(\mathbf{r})\, d^3x$, ossia il valore di $U(\mathbf{q})$ per $\mathbf{q} = 0$.

Analogamente, per il secondo termine scriviamo

$$e^{iP(X_1 - X_2)} = e^{iP(X_1 - X_3)} e^{iP(X_3 - X_4)} e^{iP(X_4 - X_2)}$$

e dopo aver integrato in $X_1 - X_3$, $X_3 - X_4$, $X_4 - X_2$ otteniamo

$$-G^{(0)}_{\alpha\gamma}(P) \int G^{(0)}_{\gamma\delta}(X)\, U(X)\, e^{iPX} d^4X \cdot G^{(0)}_{\delta\beta}(P).$$

L'integrale rimanente viene espresso mediante le componenti di Fourier delle funzioni $G^{(0)}_{\gamma\delta}$ e $U$ in base alla formula per le componenti di Fourier del prodotto di due funzioni [1])

$$\int f(X)\, g(X)\, e^{iPX} d^4X = \int f(P_1)\, g(P - P_1) \frac{d^4P_1}{(2\pi)^4}. \qquad (13,11)$$

Quindi, per la correzione del primo ordine alla funzione di Green nella rappresentazione degli impulsi troviamo infine

$$iG^{(1)}_{\alpha\beta}(P) = in^{(0)} U(0)\, G^{(0)}_{\alpha\gamma}(P)\, G^{(0)}_{\gamma\beta}(P) -$$

$$- \int G^{(0)}_{\alpha\gamma}(P)\, G^{(0)}_{\gamma\delta}(P_1)\, G^{(0)}_{\delta\beta}(P)\, U(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) \frac{d^4P_1}{(2\pi)^4}. \qquad (13,12)$$

---

[1]) Per dimostrare questa formula, occorre sostituire al suo primo membro le funzioni stesse $f(X)$ e $g(X)$ sotto forma di sviluppi di Fourier

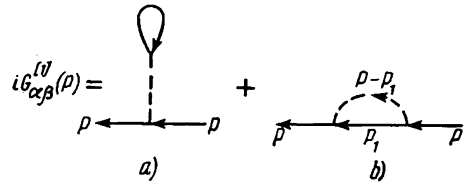
$$\int f(X)\, g(X)\, e^{iPX} d^4X = \int f(P_1)\, g(P_2)\, e^{i(P - P_1 - P_2)X} d^4X \frac{d^4P_1\, d^4P_2}{(2\pi)^4}.$$

L'integrazione in $d^4X$ va eseguita secondo la formula

$$\int e^{iPX} d^4X = (2\pi)^4\, \delta^{(4)}(P),$$

dove la funzione $\delta$ « quadridimensionale » $\delta^{(4)}$ è definita come prodotto di funzioni $\delta$ delle componenti di un « quadrivettore ». In questo caso compare il fattore $\delta^{(4)}(P - P_1 - P_2)$ che va eliminato integrando in $d^4P_2$, e si arriva così al secondo membro della (13,11).

A ciascuno dei due termini nella (13,12) corrisponde un diagramma di Feynman, e l'espressione (13,12) si scrive nella forma




(13,13)

I punti di intersezione delle linee sono detti *vertici* del diagramma. Ciascun diagramma ha $2n$ vertici, dove $n$ è l'ordine della teoria delle perturbazioni. A ciascun vertice convergono due linee continue e una tratteggiata. A ciascuna linea continua è attribuito un proprio « quadrimpulso » $P$ nella direzione indicata da una freccia (fra l'altro, lungo ogni successione continua di linee continue la direzione delle frecce non cambia). A ciascuna linea tratteggiata è attribuito un quadrimpulso $Q$, e per queste linee viene indicata convenzionalmente una (qualsiasi) direzione della freccia [1]). Ai vertici del diagramma si verifica la « legge di conservazione del quadrimpulso »: la somma dei quadrimpulsi delle linee entranti è uguale alla somma dei quadrimpulsi delle linee uscenti dai vertici. Al vertice è attribuito anche un certo indice di spin $\alpha$. Ogni diagramma ha due linee *esterne* (entrante ed uscente) il cui quadrimpulso è l'argomento della funzione di Green cercata $G_{\alpha\beta}(P)$; gli indici di spin $\alpha$ e $\beta$ di questa funzione vanno attribuiti ugualmente alle linee esterne uscente ed entrante. Le altre linee del diagramma si dicono *interne*.

La scrittura analitica dei termini corrispondenti a ciascun diagramma va effettuata in base alle regole seguenti:

1) a ciascuna linea continua fra i vertici $\alpha$ e $\beta$ corrisponde il fattore $iG^{(0)}_{\alpha\beta}(P)$, a ciascuna linea tratteggiata il fattore $-iU(Q)$. Al cappio chiuso con un vertice corrisponde il fattore $n^{(0)}(\mu)$.

2) In ogni vertice si verifica la legge di conservazione del quadrimpulso. Rispetto agli altri quadrimpulsi delle linee interne, che restano indeterminati, l'integrazione si effettua in $d^4P/(2\pi)^4$. In ogni vertice la sommatoria si fa rispetto a una coppia di indici di spin muti, ossia a uno di ciascuno dei fattori $G^{(0)}$ vicini.

3) Il fattore comune, con il quale il diagramma entra in $iG_{\alpha\beta}$, è uguale a $(-1)^L$, dove $L$ è il numero di cappi chiusi di linee continue aventi più di un vertice.

---

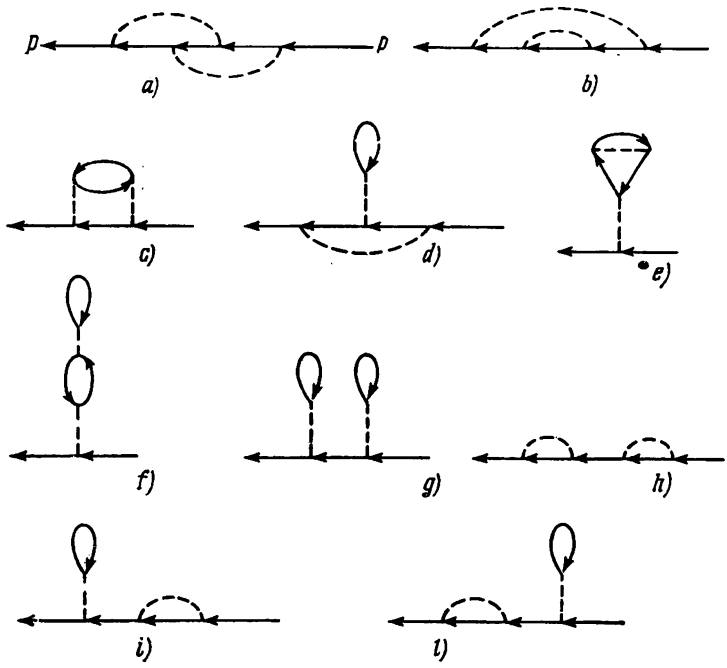
[1]) In generale, le componenti « temporali » $Q = (q_0, \mathbf{q})$ dei quadrivettori sono diverse da zero, ma la funzione $U(Q)$, in base alla definizione (13,10), è indipendente da $q_0$. La convenzionalità della direzione della linea tratteggiata è dovuta alla parità della funzione $U(-Q) = U(Q)$.

L'origine dell'ultima regola è la seguente. Il cappio chiuso a $k > 1$ vertici proviene dalla convoluzione di operatori $\psi$ della forma

$$\Psi_1^+ \Psi_1 \Psi_2^+ \Psi_2 \ldots \Psi_k^+ \Psi_k.$$

Qui tutte le convoluzioni valgono $iG_{12}^{(0)}, \ldots, iG_{k-1,k}^{(0)}$ e l'ultima è uguale a $-iG_{k1}^{(0)}$. Per quanto riguarda i cappi a un solo vertice, il loro segno corretto è già determinato da $n^{(0)}$ introdotto in base alla regola 1.

A titolo di esempio diamo l'insieme dei diagrammi che definiscono la correzione del secondo ordine alla funzione di Green




(13,14)

Infine, torniamo al teorema di Wick e ne diamo la dimostrazione in applicazione a un « limite macroscopico » (cioè per $V \to \infty$ o, che è lo stesso per una data densità del sistema, per $N \to \infty$) che è l'unico ad avere importanza in applicazioni statistiche.

Consideriamo, ad esempio, la media del prodotto di quattro operatori $\psi$ della forma

$$\langle \hat{\Psi}_{01} \hat{\Psi}_{02} \hat{\Psi}_{03}^+ \hat{\Psi}_{04}^+ \rangle = \frac{1}{V^2} \sum_{\mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_4} \langle \hat{a}_{\mathbf{p}_1} \hat{a}_{\mathbf{p}_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_3}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_4}^+ \rangle \exp(\ldots) \quad (13,15)$$

(qui gli operatori $\psi$ sono rappresentati nella forma (9,3); gli esponenti evidenti ma complessi delle funzioni esponenziali vanno omessi). In questa somma sono diversi da zero soltanto i termini contenenti un medesimo numero di operatori $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ e $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}$ ad impulsi di valore identico. Fra questi termini ci sono quelli in cui gli impulsi sono uguali a due a due, per esempio, $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_4$ e $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3$. Questi termini corrispondono alla convoluzione a due a due

$$\Psi_{01}\Psi_{02}\Psi^+_{03}\Psi^+_{04}$$

e sono espressi da una somma della forma

$$\frac{1}{V^2}\sum_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}\langle\hat{a}_{\mathbf{p}_1}\hat{a}^+_{\mathbf{p}_1}\rangle\langle\hat{a}_{\mathbf{p}_2}\hat{a}^+_{\mathbf{p}_2}\rangle\exp(\ldots)$$

Nel limite $V \to \infty$, la sommatoria estesa a $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ viene sostituita dall'integrazione in $V^2 d^3p_1 d^3p_2/(2\pi)^6$, il volume $V$ si riduce e questa espressione resta finita. Nella somma (13,15) i termini in $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_4$ sono anch'essi diversi da zero; essi costituiscono una somma della forma

$$\frac{1}{V^2}\sum_{\mathbf{p}}\langle\hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\rangle\exp(\ldots);$$

ma passando all'integrazione in questa somma, resta un fattore $1/V$ e, nel limite $V \to \infty$, l'espressione si annulla.

È chiaro che questo risultato ha carattere generale: nel limite $V \to \infty$, non si annullano nella media del prodotto degli operatori $\psi$ soltanto i risultati delle convoluzioni a due a due.

Notiamo che nella dimostrazione descritta non abbiamo utilizzato in realtà il fatto che la media si prende proprio rispetto allo stato fondamentale; perciò questa dimostrazione resta valida anche per la media rispetto a qualsiasi stato quantistico del sistema [1]).

---

[1]) Ma se la media è presa rispetto allo stato fondamentale, il teorema di Wick sussiste non soltanto nel limite macroscopico. La dimostrazione corrispondente del teorema in statistica coincide con la sua dimostrazione in elettrodinamica quantistica (IV, § 78). L'unica distinzione fra questi casi è che gli stati fondamentali sono diversi: nel vuoto le particelle non esistono, e in un gas perfetto esse riempiono la sfera di Fermi di raggio $p_F$. Per gli operatori $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}$, $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ di creazione e di annichilazione di particelle con $p > p_F$ questa distinzione è, in generale, inessenziale e la dimostrazione si estende letteralmente. Quanto agli operatori con $p < p_F$, occorre preliminarmente cambiare la notazione $\hat{a}^+_{\mathbf{p}} = \hat{b}_{\mathbf{p}}$, $\hat{a}_{\mathbf{p}} = \hat{b}^+_{\mathbf{p}}$, cioè passare dalle particelle alle buche che, nello stato fondamentale, non esistono all'interno della sfera di Fermi.

## § 14. *Autofunzione energetica*

Le regole di tecnica dei diagrammi formulate al paragrafo precedente godono di una proprietà importante: il coefficiente generale nel diagramma è indipendente dal suo ordine. In virtù di questa proprietà ogni « figura » del diagramma ha un certo significato analitico a prescindere dal diagramma cui appartiene, cosicché la si può calcolare indipendentemente, in anticipo. Per di più, si può calcolare dapprima la somma di alcune figure aventi un certo numero di estremi, e dopo inserire questo « blocco » in diagrammi più complessi. È uno dei vantaggi più importanti fornito dalla tecnica dei diagrammi.

Fra questi « blocchi », aventi anche un significato essenziale a sé stante, indichiamo la cosiddetta *autofunzione energetica* [1]. Per giungere a questa nozione, consideriamo tutti i diagrammi per la funzione di Green, che non si possono dividere in due parti e che sono congiunti da una sola linea continua. A questi ultimi si riferiscono, ad esempio, i due diagrammi del primo ordine della teoria delle perturbazioni (13,13) e i diagrammi (13,14a-f) del secondo ordine. La costruzione di tutti questi diagrammi è identica: un fattore $iG^{(0)}_{\alpha\beta}$ a ogni estremo e una certa parte interna (funzione di $P$), detta autofunzione energetica. La somma di tutte queste parti possibili viene detta autofunzione energetica esatta o completa, oppure *operatore di massa*; indichiamola con $-i\Sigma_{\alpha\beta}(P)$.

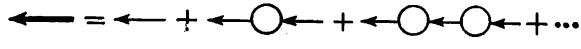
Tutti i diagrammi del tipo autoenergetico danno un contributo alla funzione di Green, che vale

$$iG^{(0)}_{\alpha\beta}(P)\,[-i\Sigma_{\beta\gamma}(P)]\,iG^{(0)}_{\gamma\delta}(P) = iG^{(0)}(P)\,\Sigma(P)\,G^{(0)}(P)\,\delta_{\alpha\delta}, \tag{14,1}$$

dove, accanto a $G^{(0)}_{\alpha\beta} = G^{(0)}\delta_{\alpha\beta}$, si è scritto anche

$$\Sigma_{\alpha\beta}(P) = \delta_{\alpha\beta}\,\Sigma(P). \tag{14,2}$$

Quanto alla funzione di Green completa (rappresentata graficamente da una linea continua in grassetto), essa è data dalla somma della serie infinita



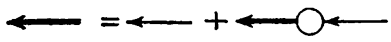
(14,3)

dove i cerchietti esprimono le autofunzioni energetiche esatte $(-i\Sigma_{\alpha\beta})$. Ciascun termine di questa serie (a cominciare dal terzo) rappresenta un insieme di diagrammi che si possono tagliare in due, tre ecc. parti congiunte da una sola linea continua.

---

[1]) Vedi la definizione analoga in elettrodinamica quantistica, dove questa funzione è stata detta autofunzione energetica compatta (IV, §§ 100, 102).

Se da tutti i termini della serie (14,3), a cominciare dal secondo, noi « togliamo » un cerchietto con la linea ad esso associata da destra, la serie rimanente coinciderà con la serie completa. Ciò vuol dire che



(14,4)

In forma analitica questa uguaglianza si scrive come segue:

$$G = G^{(0)} + G\Sigma G^{(0)} \tag{14,5}$$

ossia, dividendo per $G^{(0)}\,G$:

$$\frac{1}{G(P)} = \frac{1}{G^{(0)}(P)} - \Sigma(P). \tag{14,6}$$

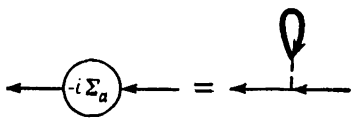
Notiamo che il segno della parte immaginaria $\Sigma$ coincide con il segno di $\operatorname{Im} G$ e, in accordo con la (8,14), abbiamo

$$\operatorname{sign} \operatorname{Im} \Sigma(\omega, \mathbf{p}) = -\operatorname{sign} \omega. \tag{14,7}$$

Questo risultato discende dalla (14,6) tenendo conto che il segno di $\operatorname{Im} G^{-1}$ è opposto a quello di $\operatorname{Im} G$, e secondo la (9,7) $\operatorname{Im} G^{(0)-1} = 0$.

Quindi il calcolo di $G$ si riduce al calcolo di $\Sigma$, che richiede di considerare un numero minore di diagrammi. Questo numero diventa ancora più piccolo in quanto, sommando i diagrammi restanti, si ottiene un'espressione molto semplice.

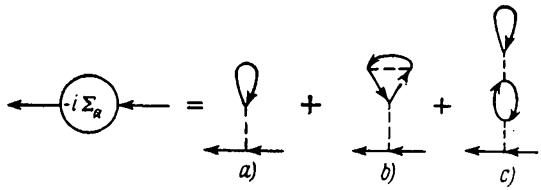
E precisamente, da tutto l'insieme di diagrammi che definiscono $\Sigma$ (per interazione a coppie fra le particelle) ricaviamo quelli che rappresentano varie « diramazioni » collegate alle linee estreme mediante una linea tratteggiata; indichiamone la somma con $\Sigma_a$. Tutti questi diagrammi sono contenuti in un solo *diagramma scheletro* della forma [1])




(14,8)

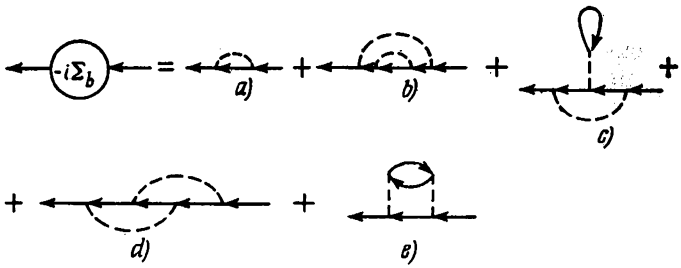
[1]) Come nella teoria quantistica del campo si chiamano a scheletro i diagrammi formati da linee in grassetto e blocchi; ogni diagramma di questo genere è equivalente all'insieme di un numero infinito di diagrammi ordinari dei diversi ordini.

La parte restante di $\Sigma$ la indichiamo con $\Sigma_b$. Così, fra i diagrammi del primo e del secondo ordine alla prima categoria si riferiscono i seguenti:




(14,9)

e alla seconda categoria




(14,10)

Al cappio in grassetto nel diagramma (14,8) corrisponde la densità esatta $n(\mu)$ del sistema (così come al cappio sottile del diagramma (13,13a) corrisponde la densità $n^{(0)}(\mu)$ di un gas perfetto). Pertanto dalla definizione (14,8) deriva che

$$-i\Sigma_a = -in(\mu)\, U(0). \tag{14,11}$$

Quindi,

$$\Sigma = n(\mu)\, U(0) + \Sigma_b, \tag{14,12}$$

in modo che soltanto i diagrammi appartenenti a $\Sigma_b$ richiedono un calcolo particolare.

La legge di dispersione delle quasi-particelle è data dall'equazione (8,16). Esprimendovi $G$ mediante $\Sigma$ in base alla (14,6) e ricavando $G^{(0)}$ dalla (9,7), otteniamo la stessa equazione nella forma

$$\frac{1}{G^{(0)}(\varepsilon-\mu,\ \mathbf{p})} = \varepsilon(\mathbf{p}) - \frac{p^2}{2m} = \Sigma(\varepsilon-\mu,\ \mathbf{p}). \tag{14,13}$$

Per $p = p_F$ l'energia della quasi-particella coincide con $\mu$ sulla frontiera della sfera di Fermi. Di qui si vede che

$$\mu - \Sigma(0,\ \mathbf{p}_F) = \frac{p_F^2}{2m}. \tag{14,14}$$

Come risultato l'equazione della legge di dispersione (per valori di $p$ vicini a $p_F$) diventa

$$\varepsilon(\mathbf{p})-\mu=\frac{p_F}{m}(p-p_F)+\Sigma(\varepsilon-\mu,\ \mathbf{p}_F)-\Sigma(0,\ \mathbf{p}_F). \qquad (14,15)$$

Sottolineiamo che qui $p_F$ è il valore esatto dell'impulso limite per il sistema di particelle interagenti. Esso è legato mediante la relazione $p_F^3/3\pi^2 = n$ alla densità esatta $n(\mu)$ e non a quella approssimata $n^{(0)}$ come nella formula (13,5).

## § 15. *Funzione di Green a due componenti*

Giungeremo ad altri concetti importanti della tecnica dei diagrammi dopo aver considerato la media rispetto allo stato fondamentale del prodotto T di quattro operatori $\psi$ di Heisenberg [1]):

$$K_{34,12} = \langle \mathrm{T}\hat{\Psi}_3\hat{\Psi}_4\hat{\Psi}_1^+\hat{\Psi}_2^+\rangle. \qquad (15,1)$$

Questa funzione è detta *funzione di Green a due componenti* (a differenza della funzione di Green (7,9) a una sola componente).

Per applicare la teoria delle perturbazioni e costruire la tecnica dei diagrammi, occorre passare di nuovo agli operatori $\psi$ nella rappresentazione dell'interazione. Così come nel caso della funzione $G$, ciò implicherà la comparsa del fattore $\hat{S}$ sotto il segno di prodotto T:

$$K_{34,\,12}=\frac{1}{\langle\hat{S}\rangle}\langle \mathrm{T}\hat{\Psi}_{03}\hat{\Psi}_{04}\hat{\Psi}_{01}^+\hat{\Psi}_{02}^+\hat{S}\rangle. \qquad (15,2)$$

Nell'approssimazione nulla (cioè per $\hat{S} = 1$) questa espressione si scinde nella somma dei prodotti di due convoluzioni che vengono espresse mediante le funzioni $G^{(0)}$:

$$K^{(0)}_{34,\,12}=G^{(0)}_{31}G^{(0)}_{42}-G^{(0)}_{32}G^{(0)}_{41}. \qquad (15,3)$$

Per discutere le proprietà della funzione di Green a due componenti così definita, ricorreremo alla rappresentazione degli impulsi.

Per un sistema omogeneo la funzione $K_{34,12}$ dipende in effetti soltanto da tre differenze indipendenti fra gli argomenti, per esempio da $X_3 - X_2$, $X_4 - X_2$, $X_1 - X_2$. Nella rappresentazione degli impulsi questa proprietà viene espressa dal fatto che la componente dello sviluppo di Fourier in tutte le variabili $X_1, \ldots, X_4$ contiene la funzione $\delta$:

$$\int K_{34,\,12}\exp\{i(P_3X_3+P_4X_4-P_1X_1-P_2X_2)\}\,d^4X_1\ldots d^4X_4=$$
$$=(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(P_3+P_4-P_1-P_2)\,K_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}(P_3,\ P_4;\ P_1,\ P_2). \qquad (15,4)$$

---

[1]) Ricorriamo di nuovo a notazioni semplificate in cui gli indici 1, 2, ... esprimono l'insieme delle coordinate e dell'indice di spin: $X_1\alpha$, $X_2\beta$, ... (cfr. la nota alla pag. 70). Nella scrittura completa abbiamo

$$K_{34,\,12}\equiv K_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}(X_3,\ X_4;\ X_1,\ X_2).$$

È facile convincersene osservando che

$$P_3X_3 + P_4X_4 - P_1X_1 - P_2X_2 = P_3(X_3 - X_2) + P_4(X_4 - X_2) - \\ - P_1(X_1 - X_2) - X_2(P_1 + P_2 - P_3 - P_4),$$

e passando all'integrazione in $X_3 - X_4$, $X_4 - X_2$, $X_1 - X_2$, $X_2$. Notiamo a proposito che la formula della trasformata di Fourier inversa si può scrivere come segue:

$$K_{34,12} = \int K_{\gamma\delta,\alpha\beta}(P_3, P_4; P_1, P_3 + P_4 - P_1) \times \\ \times \exp\{-i[P_3(X_3 - X_2) + P_4(X_4 - X_2) - P_1(X_1 - X_2)]\} \times \\ \times \frac{d^4P_1\, d^4P_3\, d^4P_4}{(2\pi)^{12}}. \tag{15,5}$$

Conveniamo di chiamare la funzione $K_{\gamma\delta,\alpha\beta}(P_3, P_4; P_1, P_2)$ così definita funzione di Green a due componenti nella rappresentazione degli impulsi; i suoi argomenti sono legati dall'uguaglianza

$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4.$$

Nell'approssimazione nulla questa funzione (in accordo con la (15,3)) diventa

$$K^{(0)}_{\gamma\delta,\alpha\beta}(P_3, P_4; P_1, P_2) = (2\pi)^4 [\delta^{(4)}(P_1 - P_3) G^{(0)}_{\gamma\alpha}(P_1) G^{(0)}_{\delta\beta}(P_2) - \\ - \delta^{(4)}(P_1 - P_4) G^{(0)}_{\gamma\beta}(P_2) G^{(0)}_{\delta\alpha}(P_1)], \tag{15,6}$$

vale a dire che $K$ si riduce alla somma di due prodotti di funzioni di Green a una sola componente.

Nelle approssimazioni successive della teoria delle perturbazioni compaiono dei termini che si riducono all'introduzione di correzioni a queste funzioni a una sola componente. Accanto a questi termini, compaiono anche dei termini che non si riducono a prodotti di funzioni $G$. È esattamente questa parte della funzione di Green a due componenti a presentare un interesse a sé stante. Per isolarla, rappresentiamo $K$ nella forma

$$K_{\alpha_3\alpha_4,\alpha_1\alpha_2}(P_3, P_4; P_1, P_2) = (2\pi)^4 [\delta^{(4)}(P_1 - \\ - P_3) G_{\alpha_3\alpha_1}(P_1) G_{\alpha_4\alpha_2}(P_2) - \delta^{(4)}(P_1 - P_4) G_{\alpha_3\alpha_2} \times \\ \times (P_2) G_{\alpha_4\alpha_1}(P_1)] + G_{\alpha_3\beta_3}(P_3) G_{\alpha_4\beta_4}(P_4)\, i\Gamma_{\beta_3\beta_4,\beta_1\beta_2} \times \\ \times (P_3, P_4; P_1, P_2) G_{\beta_1\alpha_1}(P_1) G_{\beta_2\alpha_2}(P_2). \tag{15,7}$$

La funzione di Green $\Gamma$ così definita è detta *funzione di vertice*.

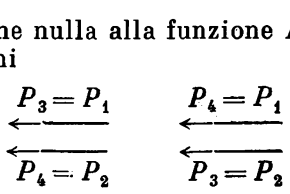
In accordo con la definizione (15,1), la funzione di Green a due componenti nella rappresentazione spazio-temporale è antisimme-

trica rispetto alle permutazioni degli argomenti (insieme con gli indici di spin) della prima e della seconda coppia: 1 e 2 o 3 e 4. Ne deriva una proprietà di simmetria analoga per la funzione di Green e la funzione di vertice nella rappresentazione degli impulsi:

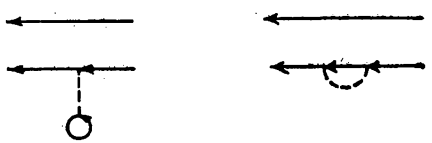
$$\Gamma_{\gamma\delta,\alpha\beta}(P_3, P_4; P_1, P_2) = -\Gamma_{\delta\gamma,\alpha\beta}(P_4, P_3; P_1, P_2) = \\ = -\Gamma_{\gamma\delta,\beta\alpha}(P_3, P_4; P_2, P_1). \qquad (15,8)$$

Il significato di individuazione dei quattro fattori $G$ nella definizione di $\Gamma$ (l'ultimo termine nella (15,7)) diventa chiaro esaminando la natura dei diagrammi che compaiono allorché si sviluppa l'espressione (15,2) per la funzione di Green a due componenti. I ragionamenti che seguono suppongono di nuovo l'interazione a due a due fra le particelle.

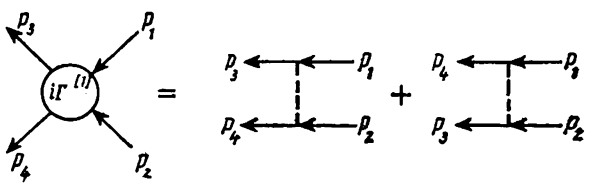
Nell'approssimazione nulla alla funzione $K$ si mettono in corrispondenza i diagrammi




corrispondenti ai due termini nella (15,6). Nel primo ordine della teoria delle perturbazioni compaiono diagrammi dei tipi [1])



che rappresentano correzioni a ciascuno dei fattori separati nella (15,6). Oltre a questi diagrammi, compaiono tuttavia anche quelli che non si dividono in due parti separate:



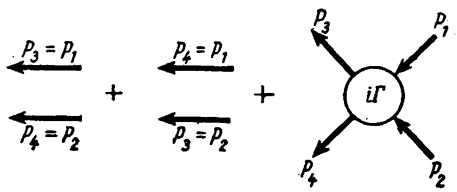

(15,9)

[1]) Come nel caso della funzione di Green a una sola componente, il fattore $\langle \hat{S} \rangle^{-1}$ nella definizione (15,2) implica la scomparsa dei diagrammi contenenti cappi disgiunti chiusi di linee continue.

Le quattro frecce $P_1, \ldots, P_4$ corrispondono ai quattro fattori $G$ nell'ultimo termine della (15,7), mentre la parte « interna » dei diagrammi definisce (nel primo ordine) la funzione di vertice, ossia il cerchietto a primo membro dell'uguaglianza dei diagrammi (15,9). Sviluppando questi diagrammi sotto forma analitica, otteniamo

$$\Gamma^{(1)}_{\gamma\delta,\alpha\beta}(P_3, P_4; P_1, P_2) = -\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}U(P_1 - P_3) + \\ + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}U(P_1 - P_4).$$

I diagrammi di ordine superiore contengono correzioni di tre categorie: 1) correzioni a due linee continue non congiunte; 2) correzioni di tipo autoenergetico alle linee terminali dei diagrammi (15,9); 3) correzioni formanti una figura che sostituisce la linea tratteggiata nei diagrammi (15,9); la somma di tutte queste figure possibili fornisce la funzione di vertice esatta $i\Gamma$. Nella rappresentazione grafica della funzione di Green a due componenti mediante la somma di diagrammi scheletro



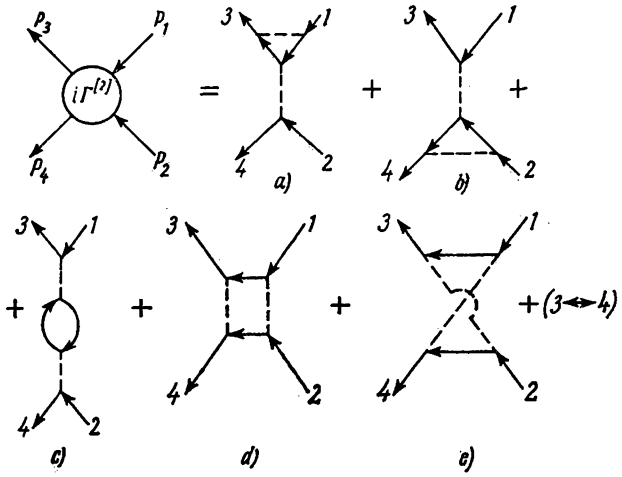

(15,10)

le linee in grassetto esprimono le funzioni $G$ esatte, mentre il cerchietto indica convenzionalmente la funzione di vertice.

Il calcolo della funzione di vertice nei diversi ordini della teoria delle perturbazioni deve essere eseguito in accordo con le regole di tecnica dei diagrammi, formulate al § 13; inoltre si devono considerare diagrammi a quattro estremi esterni (e non a due come per il calcolo di $G$). La regola 3) che fissa il segno generale del diagramma deve essere completata dal suggerimento seguente: se le successioni continue di linee continue collegano gli estremi 1 con 4 e 2 con 3 (anziché 1 con 3 e 2 con 4), allora il diagramma inverte il segno.

A titolo di esempio rappresentiamo tutti i diagrammi che definiscono la funzione di vertice nel secondo ordine della teoria delle

perturbazioni:




(15,11)

L'autofunzione energetica $\Sigma$ e la funzione di vertice $\Gamma$ non sono indipendenti in quanto legate l'una all'altra da un'equazione integrale (detta *equazione di Dyson*) [1]).

Per dedurre questa equazione, ricorriamo alla (9,5) che, come è stato già detto, resta valida anche se si tiene conto dell'interazione fra le particelle. Tuttavia, la differenza della deduzione eseguita al § 9 è che ora l'operatore $\psi$ soddisfa l'equazione (7,8). Omettendo in quest'ultima il termine con un campo esterno e sostituendo da essa la derivata $\partial\hat{\Psi}/\partial t_1$ nella (9,5), otteniamo

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{\Delta_1}{2m}+\mu\right)G_{\alpha\beta}(X_1-X_2)-\delta_{\alpha\beta}\delta^{(4)}(X_1-X_2)=$$
$$=-i\int\langle T\hat{\Psi}^+_\gamma(X_3)\,U(X_1-X_3)\,\hat{\Psi}_\gamma(X_3)\,d^4X_3\cdot\hat{\Psi}_\alpha(X_1)\,\hat{\Psi}^+_\beta(X_2)\rangle=$$
$$=-i\int K_{\gamma\alpha,\,\gamma\beta}(X_3,\,X_1;\,X_3,\,X_2)\,U_{13}\,d^4X_3. \qquad (15,12)$$

Questa uguaglianza risolve, in principio, il problema posto, poiché $K$ viene espressa in funzione di $\Gamma$ in accordo con la (15,7). Non resta altro che passare alla rappresentazione degli impulsi. A tal fine moltiplichiamo l'uguaglianza (15,12) per $\exp[iP(X_1-X_2)]$ e integriamo in $d^4(X_1-X_2)$, rappresentando $K_{31,32}$ nella forma (15,5) e $U_{13}$ nella forma (13,9). Allora l'integrazione rispetto alle

[1]) Essa è analoga all'equazione di Dyson in elettrodinamica quantistica (vedi IV, § 104).

coordinate fornisce una funzione $\delta$ che va eliminata integrando nei quadrimpulsi. Come risultato otteniamo

$$[G^{(0)-1}(P)\,G(P) - 1]\,\delta_{\alpha\beta} = -i \int K_{\gamma\alpha,\,\gamma\beta}(P_3,\ P_4;\ P_3 + P_4 - P,\ P)\,U(P - P_4)\,\frac{d^4P_3\,d^4P_4}{(2\pi)^8}, \tag{15,13}$$

dove $G^{(0)}(P)$ è proveniente dalla (9,7).

Ora resta da esprimere $K$ in funzione di $\Gamma$. Sostituendo la (15,7) nella (15,13), otteniamo infine l'equazione di Dyson nella forma

$$\delta_{\alpha\beta}\,[G^{(0)-1}(P) - G^{-1}(P)] = \delta_{\alpha\beta}\Sigma(P) =$$
$$= U(0)\,n(\mu)\,\delta_{\alpha\beta} + i\delta_{\alpha\beta} \int U(P - P_1)\,G(P_1)\,\frac{d^4P_1}{(2\pi)^4} +$$
$$+ \int \Gamma_{\gamma\alpha,\,\gamma\beta}(P_3,\ P_4;\ P_3 + P_4 - P,\ P)\,G(P_3)\,G(P_4)\,G(P_3 + P_4 - P)\,U(P - P_4)\,\frac{d^4P_3\,d^4P_4}{(2\pi)^8}. \tag{15,14}$$

Qui $n(\mu)$ è la densità esatta del sistema come funzione del suo potenziale chimico; questo fattore compare per integrazione della funzione $G$ in base alla formula (7,24) (in questo caso si tiene conto che la detta funzione $G$ è nata per una convoluzione in cui $\hat{\Psi}^+$ si trova a sinistra di $\hat{\Psi}$). Notiamo che il primo termine a secondo membro dell'equazione (15,14) è $\Sigma_a$ della (14,11).

## *§ 16. Legame fra la funzione di vertice e l'ampiezza di diffusione delle quasi-particelle*

Il formalismo matematico sviluppato nei paragrafi precedenti dà la possibilità di argomentare rigorosamente e di capire più profondamente il significato delle relazioni fondamentali della teoria del liquido di Fermi elaborata da Landau, le quali sono state introdotte nel capitolo I in un modo più o meno intuitivo. A questa questione sono dedicati i §§ 16-20 [1]).

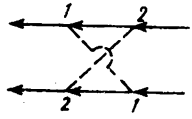
Esiste un legame stretto fra la funzione di vertice e l'ampiezza di diffusione reciproca delle quasi-particelle. Per una migliore comprensione di questo legame, consideriamolo dapprima nei limiti del problema quantomeccanico puro della diffusione di due particelle nel vuoto.

In meccanica quantistica i diagrammi « a quattro code », cioè quelli con quattro estremi esterni (due d'entrata e due d'uscita), corrispondono al processo d'urto fra due particelle; inoltre, se il

[1]) Il contenuto dei §§ 16-18 appartiene a *L. D. Landau* (1958), e il contenuto dei §§ 19, 20 a *L. D. Landau* e *L. P. Pitaevskij* (1959).

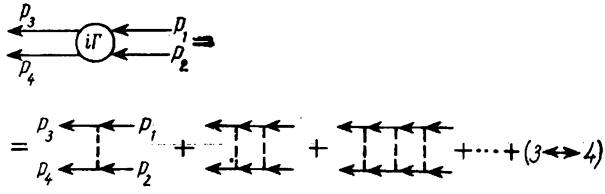
diagramma è espresso analiticamente, ai suoi estremi esterni vengono messe in corrispondenza le ampiezze delle funzioni d'onda (onde piane) delle particelle libere (cfr. IV, § 103). Vediamo in che modo questi diagrammi di vari ordini forniscono effettivamente i termini successivi dello sviluppo di Born non relativistico normale dell'ampiezza di diffusione.

Prima di tutto, nel caso del vuoto, un grande numero di diagrammi in generale si annulla. Lo si può capire più facilmente nella rappresentazione delle coordinate osservando che nel vuoto sono nulle tutte le convoluzioni della forma $\langle\hat{\Psi}^+\hat{\Psi}\rangle$ in cui l'operatore di annichilazione si trova a destra ed è il primo ad agire sullo stato vuoto, e restano soltanto convoluzioni della forma $\langle\hat{\Psi}\hat{\Psi}^+\rangle$. Questa è la ragione per cui si annullano tutti i diagrammi con cappi chiusi di linee continue: essi contengono sempre la convoluzione della forma $\langle\hat{\Psi}^+\hat{\Psi}\rangle$. Per la stessa ragione sono nulle tutte le correzioni alla funzione di Green, cioè alle linee interne continue dei diagrammi [1]. Infine, sono nulli i diagrammi a linee tratteggiate intersecantisi; così, nel diagramma




(qui le cifre 1 e 2 significano gli argomenti $t_1$ e $t_2$) per $t_2 > t_1$ alla linea interna superiore corrisponde la convoluzione $\langle\hat{\Psi}_2^+\hat{\Psi}_1\rangle = 0$, e se $t_2 < t_1$, allora la convoluzione $\langle\hat{\Psi}_1^+\hat{\Psi}_2\rangle = 0$ corrisponde alla linea inferiore.

Quindi, per due particelle nel vuoto restano soltanto i seguenti diagrammi i quali, come si dice, formano una « serie a scala »:




(16,1)

[1]) La scomparsa di tutte le correzioni alla funzione di Green nel vuoto esprime semplicemente il fatto che una sola particella non ha nessun oggetto con cui potrebbe interagire. Ricordiamo a questo proposito che l'esistenza nella teoria relativistica di correzioni nel vuoto alla funzione di Green della particella è legata alla possibilità di comparsa negli stati intermedi di coppie virtuali di elettroni e di fotoni.

Qui alle linee continue interne corrispondono le funzioni di Green per il vuoto

$$G^{(\text{vuoto})}(\omega, \mathbf{p}) = \left[\omega - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + i0\right]^{-1} \tag{16,2}$$

(la formula (9,7) con $\mu = 0$). Rivolgiamo l'attenzione al fatto che (data la mancanza di $\mu$ a denominatore) il polo di questa funzione si trova sempre in un determinato semipiano (inferiore) della variabile complessa $\omega$. L'annullamento dei suddetti diagrammi si produce, dal punto di vista matematico, perché tutti i poli delle espressioni integrande si trovano in un medesimo semipiano; l'annullamento degli integrali diventa evidente chiudendo il cammino di integrazione in un altro semipiano.

La serie a scala (16,1) si può sommare riducendola a un'equazione integrale (vedi più avanti la sommatoria della serie analoga (17,3)). Se da prima omettiamo i diagrammi con gli estremi 3 e 4 permutati, questa equazione sarà equivalente all'equazione di Schrödinger per due particelle, senza tener conto della loro identità, scritta nella rappresentazione degli impulsi (vedi III, l'equazione (130,9)). Rispettivamente la funzione di vertice $\Gamma$ verrà espressa in funzione dell'ampiezza di diffusione $f$ di due particelle mediante la formula

$$\Gamma_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}(P_3, P_4; P_1, P_2) = \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}\frac{4\pi}{m}f. \tag{16,3}$$

Quanto all'aggiunta dei diagrammi con gli estremi 3 e 4 permutati, essa conduce all'antisimmetrizzazione dell'ampiezza, come dovrebbe essere per i fermioni. In prima approssimazione della teoria delle perturbazioni restano soltanto il primo diagramma (16,1) e il diagramma a estremi permutati in cui $G^{(\text{vuoto})}$ in generale non entra. Allora per l'ampiezza di diffusione si avrà la formula ordinaria della prima approssimazione di Born. I diagrammi successivi, dopo l'integrazione nelle frequenze intermedie, forniscono le note espressioni per le correzioni all'ampiezza nelle approssimazioni successive di Born.

Nel liquido di Fermi l'interazione fra le particelle collidenti e le particelle del mezzo ne implica la sostituzione effettiva con le quasi-particelle. Tutte le correzioni alle linee interne del diagramma, dovute a questa interazione, sono prese in considerazione automaticamente dalla definizione della funzione $\Gamma$. Tuttavia, occorre anche tener conto delle correzioni alle linee esterne. Nella teoria quantistica dei campi si mette in evidenza che, già in virtù delle condizioni generali di unitarietà della matrice di diffusione, queste correzioni implicano la comparsa dell'ampiezza di diffusione del fattore $\sqrt{Z}$ per ogni estremità libera, dove $Z$ è la costante di rinormalizzazione della funzione di Green (vedi IV, § 107); per i diagrammi a quattro estremi ciò significa la moltiplicazione per $Z^2$. Sebbene

la deduzione tratta dalla teoria quantistica dei campi resti valida anche per le quasi-particelle nel liquido di Fermi, precisiamo qui l'origine di questo fattore mediante ragionamenti più semplici (anche se non rigorosi).

Infatti, la funzione di Green del liquido nell'intorno del suo polo (il primo termine nella (10,2)) differisce dalla funzione di Green del gas perfetto soltanto per il fattore $Z$. Sostituendo a $\hat{\Psi}$ e $\hat{\Psi}^+$ gli operatori $\hat{\Psi}_{\text{quas}} = \hat{\Psi}/\sqrt{Z}$ e $\hat{\Psi}^+_{\text{quas}} = \hat{\Psi}^+/\sqrt{Z}$, allora la funzione di Green composta di questi operatori, $G_{\text{quas}} = G/Z$, sarà identica nell'intorno del polo a quella per il gas perfetto. In questo senso i suddetti operatori si possono considerare come operatori $\psi$ del gas perfetto di quasi-particelle. La funzione di Green a due componenti da essi definita avrà la forma $K_{\text{quas}} = K/Z^2$ e, di conseguenza (in accordo con la definizione (15,7)), la componente di vertice sarà $\Gamma_{\text{quas}} = \Gamma Z^2$, come dovevasi mostrare.

Nell'applicazione alle quasi-particelle presenta interesse non tanto la sezione della diffusione quanto il numero di urti (in 1 s per 1 cm$^3$ del liquido). Per gli urti con una data variazione degli impulsi e delle proiezioni degli spin delle particelle ($\mathbf{p}_1\alpha$, $\mathbf{p}_2\beta \to \mathbf{p}_3\gamma$, $\mathbf{p}_4\delta$) questo numero è dato dalla formula

$$dW = 2\pi\, |Z^2\Gamma_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}(P_3,\ P_4;\ P_1,\ P_2)|^2\, \delta(\varepsilon_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \times$$
$$\times\, n_{\mathbf{p}_1} n_{\mathbf{p}_2} (1 - n_{\mathbf{p}_3})(1 - n_{\mathbf{p}_4})\, \frac{d^3p_1\, d^3p_2\, d^3p_3}{(2\pi)^9}, \qquad (16,4)$$

dove $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4$ e $n_{\mathbf{p}}$ è la funzione di distribuzione delle quasi-particelle. I fattori $n_{\mathbf{p}_1}$ e $n_{\mathbf{p}_2}$ esprimono semplicemente il fatto che il numero di urti fra le quasi-particelle a dati impulsi iniziali (a proiezioni di spin) è proporzionale ai numeri di queste quasi-particelle per unità di volume. Quanto ai fattori $(1 - n_{\mathbf{p}_3})$ e $(1 - n_{\mathbf{p}_4})$, essi sono legati dal fatto che secondo il principio di Pauli l'urto può prodursi soltanto se gli stati finali sono liberi.

## § 17. *Funzione di vertice per piccole trasmissioni dell'impulso*

Nella teoria del liquido di Fermi un ruolo importante è svolto dalla funzione di vertice per valori vicini delle coppie di variabili $P_1$, $P_3$ e $P_2$, $P_4$ (vedremo, in particolare, che essa è strettamente legata alla funzione di interazione fra le quasi-particelle). Tenendo conto del legame

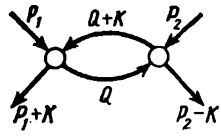
$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4,$$

poniamo $P_3 = P_1 + K$, $P_4 = P_2 - K$ e introduciamo la notazione semplificata

$$\Gamma_{\gamma\delta,\alpha\beta}(P_1 + K,\ P_2 - K;\ P_1,\ P_2) = \Gamma_{\gamma\delta,\alpha\beta}(K;\ P_1,\ P_2); \qquad (17,1)$$

considereremo questa funzione per piccoli valori di $K$. Nei termini dei processi di diffusione fra le quasi-particelle ciò significa che sono in gioco urti con piccola trasmissione del quadrimpulso, vicini alla « diffusione in avanti ».

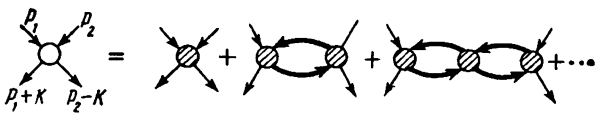
Per $K = 0$ la funzione $\Gamma$ ha, come vedremo, una singolarità; ci interesserà proprio quella parte della funzione in cui è compresa questa singolarità. L'origine di quest'ultima diventa ben chiara dall'esame del diagramma scheletro




(17,2)

che comprende in sé quell'insieme di diagrammi della funzione di Green a due componenti, che si possono tagliare fra le coppie di estremità $P_1$, $P_3$ e $P_2$, $P_4$ in due parti congiunte da due linee continue [1]). Alle linee di congiunzione in grassetto corrispondono le funzioni di Green esatte a una sola componente $G(Q)$ e $G(Q + K)$, mentre l'integrazione nel diagramma si effettua nel quadrimpulso $Q$. Per $K \to 0$ gli argomenti di queste due funzioni si avvicinano e, quindi, anche i loro poli si avvicinano. I poli che si avvicinano possono « stringere » il cammino di integrazione (vedi più avanti), il che genera la comparsa della singolarità nella funzione $\Gamma$.

Per calcolare la funzione di Green esatta, occorre sommare tutta la serie della teoria delle perturbazioni. Poiché ci siamo proposti di individuare la parte che ha la singolarità per $K = 0$, dobbiamo prima di tutto separare il contributo da tutti i diagrammi che non possono essere tagliati in coppie di linee continue a valori vicini (ma differenti su $K$) del quadrimpulso. Indichiamo con $\tilde{\Gamma}$ questa parte della funzione $\Gamma$ non avente singolarità per $K = 0$; in essa si può porre $K = 0$ in modo che $\tilde{\Gamma}$ sarà funzione soltanto delle variabili $P_1$, $P_2$, cioè $\tilde{\Gamma}_{\gamma\delta,\alpha\beta}(P_1, P_2)$. Quanto ai diagrammi « pericolosi », essi possono essere classificati in base al numero di coppie di linee ad argomenti vicini in essi contenute. Pertanto la parte di vertice completa di $\Gamma$ sarà rappresentata dalla seguente serie « a scala » infinita di diagrammi:



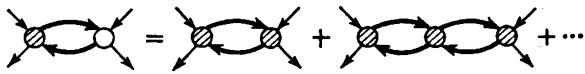

(17,3)

[1]) Così, nel secondo ordine della teoria delle perturbazioni (rispetto all'interazione a due a due) nella (17,2) figurano i diagrammi (15,11a, b, c) e il diagramma (15,11e) a estremità permutate 3 e 4.

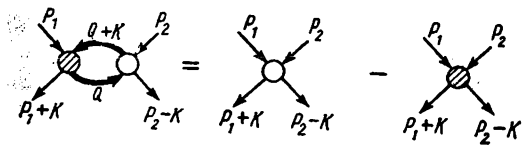
Qui al cerchietto chiaro corrisponde $i\Gamma$ cercato, mentre i cerchietti tratteggiati rappresentano $i\tilde{\Gamma}$. Le linee esterne in questi diagrammi non fanno parte della definizione di $\Gamma$ e servono unicamente per indicare numeri e valori dei quadrimpulsi d'entrata e d'uscita.

Tutte le linee interne dei diagrammi (17,3) sono tracciate in grassetto; vuol dire che ad esse corrispondono funzioni $G$ esatte. Sottolineiamo a questo proposito che la possibilità di rappresentare $\Gamma$ sotto forma di questi diagrammi scheletro (e quindi tutte le conseguenze ulteriori tratte da essi) non suppone affatto che l'interazione fra le particelle sia a coppia, poiché le linee tratteggiate non esistono qui in forma esplicita; dalla natura dell'interazione dipende effettivamente soltanto la struttura interna (che qui non ci interessa) dei blocchi rappresentati dai cerchietti [1]).

Il problema della sommatoria della serie (17,3) si riduce alla risoluzione di un'equazione integrale per ottenere la quale « moltiplichiamo » tutta la serie per un'altra $\tilde{\Gamma}$, cioè la sostituiamo con la serie



Il confronto con la serie iniziale (17,3) conduce all'uguaglianza




(17,4)

Questa uguaglianza dei diagrammi scritta in forma analitica dà l'equazione integrale richiesta

$$\Gamma_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}(K;\ P_1,\ P_2)=\tilde{\Gamma}_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}(P_1,\ P_2)-$$
$$-i\int\tilde{\Gamma}_{\gamma\zeta,\,\alpha\varkappa}(P_1,\ Q)\,G(Q+K)\,G(Q)\,\Gamma_{\varkappa\delta,\,\zeta\beta}(K;\ Q,\ P_2)\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}. \qquad (17,5)$$

In accordo con quanto detto sopra, nelle funzioni $\tilde{\Gamma}$ si è posto $K=0$; si sono utilizzate le notazioni semplificate suindicate per $\Gamma$ e $\tilde{\Gamma}$ e si è posto anche $G_{\alpha\beta}=G\delta_{\alpha\beta}$.

---

[1]) È supposta soltanto una proprietà generale quale la conservazione dal numero di particelle. Quest'ultima viene espressa dalla costanza della differenza del numero di linee passanti a destra e a sinistra in ogni sezione del diagramma (uguale a zero per le sezioni del tipo indicato nella (17,3)).

Per esaminare questa equazione, consideriamo soprattutto il prodotto $G(Q + K)\, G(Q)$ che figura nel suo nucleo. Come è stato già detto, per piccoli $K$ i poli dei due fattori sono vicini l'uno all'altro. In prossimità di questi poli le funzioni $G$ vengono rappresentate dai termini polari (10,2). Indicando le componenti dei quadrivettori $K$ e $Q$ in base a

$$K = (\omega, \mathbf{k}), \quad Q = (q_0, \mathbf{q}), \tag{17,6}$$

scriviamo in questo dominio

$$\begin{aligned} &G(Q)\, G(Q + K) \approx \\ &\approx Z^2 [q_0 - v_F (q - p_F) + i\delta_1]^{-1} [q_0 + \omega - \\ &\qquad - v_F (|\mathbf{q} + \mathbf{k}| - p_F) + i\delta_2]^{-1}, \end{aligned} \tag{17,7}$$

dove $\delta_1$ e $\delta_2$ sono due aggiunte infinitesime il cui segno (in prossimità dei poli) è determinato in base a

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} \delta_1 &= \operatorname{sign} (q - p_F), \\ \operatorname{sign} \delta_2 &= \operatorname{sign} (|\mathbf{q} + \mathbf{k}| - p_F). \end{aligned} \tag{17,8}$$

I segni di $\delta_1$ e $\delta_2$ determinano la posizione dei poli: nei semipiani della variabile $q_0$ superiore o inferiore. La singolarità nel nucleo dell'equazione integrale (e, quindi, anche nella sua soluzione) deriva dal fatto che il cammino di integrazione in $dq_0$ (asse reale) risulta essere stretto fra i poli, per cui questi ultimi devono giacere da parti opposte rispetto al cammino, cioè in semipiani diversi.

Supponiamo dapprima che $\mathbf{qk} > 0$, cioè che $\cos\theta > 0$, dove $\theta$ è l'angolo fra $\mathbf{q}$ e $\mathbf{k}$. Allora $|\mathbf{q} + \mathbf{k}| > q$, e $\delta_1$ e $\delta_2$ hanno segno diverso ($\delta_1 < 0$, $\delta_2 > 0$) se $q < p_F$ e $|\mathbf{q} + \mathbf{k}| > p_F$, il che, essendo $k$ piccolo, è equivalente alle condizioni

$$p_F - k\cos\theta < q < p_F. \tag{17,9}$$

Integrando dopo in $dq_0$ nella (17,5), si può chiudere il cammino di integrazione con una semicirconferenza indefinitamente lontana (dall'alto o dal basso non importa), allora l'integrale sarà definito dal residuo dell'espressione integranda nel rispettivo polo. In questo caso, essendo stretto l'intervallo (17,9) (per $k$ piccolo), si può porre $k = 0$ nei fattori $\Gamma$ e $\tilde{\Gamma}$ sotto il segno di integrale e, rispettivamente, $q_0 \approx 0$ per la disposizione dei poli (per $k$, $\omega$ piccoli).

In altre parole, il prodotto dei fattori polari (17,7), dato il suo ruolo nel nucleo dell'equazione integrale (17,5), è equivalente alle funzioni $\delta$

$$A\delta(q_0)\, \delta(q - p_F)$$

a coefficiente $A$ definito come integrale

$$A=\int \frac{Z^2\, dq_0\, dq}{[q_0-v_F(q-p_F)+i\delta_1]\,[q_0+\omega-v_F(|\mathbf{q}+\mathbf{k}|-p_F)+i\delta_2]}\,.$$

Quando $q$ giace all'esterno dell'intervallo (17,9), ambedue i poli giacciono in un medesimo semipiano della variabile complessa $q_0$; chiudendo il cammino di integrazione in $dq_0$ con un altro semipiano, possiamo convincerci che l'integrale si annulla. Nel dominio (17,9), invece, chiudendo il cammino di integrazione attraverso uno dei semipiani e calcolando l'integrale in base al residuo nel polo disposto in questo semipiano, troviamo che

$$A=\int \frac{2\pi i Z^2\, dq}{\omega-v_F(|\mathbf{q}+\mathbf{k}|-q)+i0}$$

(si è tenuto conto che nel dominio (17,9) $\delta_1<0$ e $\delta_2>0$). Poiché in virtù della (17,9) $q\approx p_F\gg k$, allora si può porre $|\mathbf{q}+\mathbf{k}|-q\approx k\cos\theta$ per cui (tenendo conto dei limiti nella (17,9)) si ha

$$A=\frac{2\pi i Z^2 k\cos\theta}{\omega-kv_F\cos\theta}\,.$$

È facile mostrare allo stesso modo che un'espressione identica per $A$ (ma con un altro segno di $i0$) si ottiene anche per $\cos\theta<0$ (quando l'integrazione va estesa al dominio $q>p_F$, $|\mathbf{q}+\mathbf{k}|<p_F$). Quindi, nel nucleo dell'equazione (17,5) abbiamo

$$G(Q)\,G(Q+K)=\frac{2\pi i Z^2 \mathbf{lk}\,\delta(q_0)\,\delta(q-p_F)}{\omega-v_F\mathbf{lk}+i0\cdot\operatorname{sign}\omega}+\varphi(Q), \qquad (17,10)$$

dove si è scritto $\mathbf{lk}$ al posto di $k\cos\theta$ ($\mathbf{l}=\mathbf{q}/q$), e la funzione $\varphi$ non contiene una parte $\delta$-funzionale (per $K$ piccoli) e quindi, si può porre in essa $K=0$.

Sostituendo la (17,10) nella (17,5), otteniamo l'equazione integrale fondamentale della forma

$$\Gamma_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}(K;\,P_1,\,P_2)=\widetilde{\Gamma}_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}(P_1,\,P_2)-$$
$$-i\int \widetilde{\Gamma}_{\gamma\zeta,\,\alpha\varkappa}(P_1,\,Q)\,\varphi(Q)\,\Gamma_{\varkappa\delta,\,\zeta\beta}(K;\,Q,\,P_2)\,\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}+$$
$$+\frac{Z^2p_F^2}{(2\pi)^3}\int \widetilde{\Gamma}_{\gamma\zeta,\,\alpha\varkappa}(P_1,\,Q_F)\,\Gamma_{\varkappa\delta,\,\zeta\beta}(K;\,Q_F,\,P_2)\,\frac{\mathbf{lk}\,do_l}{\omega-v_F\mathbf{lk}}\,. \qquad (17,11)$$

Nell'ultimo termine è stato sostituito $d^4Q=q^2dq\,do_l\,dq_0$ (dove $do_l$ è l'elemento dell'angolo solido nella direzione $\mathbf{l}$) e le funzioni $\delta$ sono state eliminate integrando in $dq\,dq_0$. L'argomento $Q$ delle funzioni $\Gamma$ e $\widetilde{\Gamma}$ in questo termine è considerato sulla superficie di Fermi: $Q_F=(0,\,p_F\mathbf{l})$.

Prendiamo in considerazione la natura specifica del fattore $\mathbf{lk}/(\omega-v_F\mathbf{lk})$ nel nucleo dell'equazione (17,11): per $\mathbf{k}\to 0$ e

$\omega \to 0$ il suo limite dipende dal limite cui tende in questo caso il rapporto $\omega/k$. La stessa natura avrà quindi anche la soluzione dell'equazione: per $K \to 0$ il limite della funzione $\Gamma(K;\ P_1,\ P_2)$ dipende dal modo in cui $\omega$ e $\mathbf{k}$ tendono a zero.

Indichiamo con $\Gamma^{\omega}(P_1,\ P_2)$ il limite

$$\Gamma^{\omega}_{\gamma\delta,\ \alpha\beta}(P_1,\ P_2) = \lim_{K\to 0} \Gamma_{\gamma\delta,\ \alpha\beta}(K;\ P_1,\ P_2) \quad \text{per} \quad k/\omega \to 0 \qquad (17,12)$$

(come vedremo al § 18, questa è la grandezza cui è legata la funzione di interazione fra le quasi-particelle). Con questo modo di passaggio al limite il nucleo dell'ultimo termine integrale nella (17,11) si annulla in modo che $\Gamma^{\omega}$ verifica l'equazione

$$\Gamma^{\omega}_{\gamma\delta,\ \alpha\beta}(P_1,\ P_2) = \widetilde{\Gamma}_{\gamma\delta,\ \alpha\beta}(P_1,\ P_2) -$$
$$- i \int \widetilde{\Gamma}_{\gamma\zeta,\ \alpha\varkappa}(P_1,\ Q)\, \varphi(Q)\, \Gamma^{\omega}_{\varkappa\delta,\ \zeta\beta}(Q,\ P_2) \frac{d^4Q}{(2\pi)^4}. \qquad (17,13)$$

Osserviamo che in virtù della (15,8) si ha

$$\Gamma^{\omega}_{\gamma\delta,\ \alpha\beta}(P_1,\ P_2) = \Gamma^{\omega}_{\delta\gamma,\ \beta\alpha}(P_2,\ P_1). \qquad (17,14)$$

Si può escludere $\widetilde{\Gamma}$ dalle due equazioni (17,11) e (17,13). Come risultato si ottiene

$$\Gamma_{\gamma\delta,\ \alpha\beta}(K;\ P_1,\ P_2) = \Gamma^{\omega}_{\gamma\delta,\ \alpha\beta}(P_1,\ P_2) +$$
$$+ \frac{Z^2 p_F^2}{(2\pi)^3} \int \Gamma^{\omega}_{\gamma\zeta,\ \alpha\varkappa}(P_1,\ Q_F)\, \Gamma_{\varkappa\delta,\ \zeta\beta}(K;\ Q_F,\ P_2) \frac{\mathbf{l}\mathbf{k}\, do_l}{\omega - v_F \mathbf{l}\mathbf{k}}. \qquad (17,15)$$

Infatti, scrivendo formalmente (17,13) come $\widetilde{\Gamma} = \hat{L}\Gamma^{\omega}$, la (17,11) diventa

$$\hat{L}\Gamma = \widetilde{\Gamma} + \frac{Z^2 p_F^2}{(2\pi)^3} \int \widetilde{\Gamma}\Gamma \frac{\mathbf{l}\mathbf{k}}{\omega - v_F \mathbf{l}\mathbf{k}}\, do_l.$$

Sostituendovi $\widetilde{\Gamma} = \hat{L}\Gamma^{\omega}$ e applicando ad entrambi i membri dell'uguaglianza l'operatore $\hat{L}^{-1}$, otteniamo l'espressione (17,15).

Introduciamo ora la funzione $\Gamma^{h}$ in base a

$$\Gamma^{h}_{\gamma\delta,\ \alpha\beta}(P_1,\ P_2) = \lim_{K\to 0} \Gamma_{\gamma\delta,\ \alpha\beta}(K;\ P_1,\ P_2) \quad \text{per} \quad \omega/k \to 0. \qquad (17,16)$$

Questa è esattamente la funzione (moltiplicata per $Z^2$) rappresentante l'ampiezza di diffusione in avanti (cioè della transizione $P_1, P_2 \to P_1, P_2$), che corrisponde a processi fisici reali che si producono fra le quasi-particelle sulla superficie di Fermi: gli urti per cui le quasi-particelle restano su questa superficie sono accompagnati da un cambiamento di impulso, ma senza cambiamento di energia, perciò il passaggio al limite della trasmissione nulla dell'impulso ($\mathbf{k} \to 0$) deve essere effettuato per una trasmissione rigorosamente nulla del

l'energia ($\omega = 0$). La funzione $\Gamma^{\omega}$ introdotta sopra corrisponde, invece, al caso limite non fisico di « diffusione » con una piccola trasmissione dell'energia per una trasmissione rigorosamente nulla dell'impulso ($\mathbf{k} = 0$).

Ponendo nella (17,15) $\omega = 0$, passando al limite $\mathbf{k} \to 0$ e moltiplicando entrambi i membri dell'uguaglianza per $Z^2$, otteniamo

$$Z^2\Gamma^k_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}(P_1, P_2) = Z^2\Gamma^{\omega}_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}(P_1, P_2) - \\ - \frac{p_F^2}{v_F(2\pi)^3}\int Z^2\Gamma^{\omega}_{\gamma\zeta,\,\alpha\varkappa}(P_1, Q_F)\cdot Z^2\Gamma^k_{\varkappa\delta,\,\zeta\beta}(Q_F, P_2)\,do_l. \qquad (17,17)$$

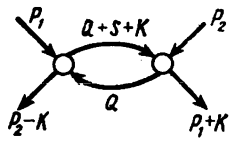
In tal modo fra ambedue le forme dell'ampiezza di diffusione in avanti esiste una relazione generale.

Le proprietà di antisimmetria (15,8) per $\Gamma$ forniscono una certa informazione sull'andamento di $\Gamma^k$ e $\Gamma^{\omega}$ per $P_1 \to P_2$. Ponendo in questa uguaglianza $P_1 = P_2$ e $\alpha = \beta$, otteniamo

$$\Gamma_{\gamma\delta,\alpha\alpha}(P_1 + K, P_1 - K; P_1, P_1) = 0 \qquad (17,18)$$

(qui non esiste sommatoria su $\alpha$!) [1]). Il passaggio a $\Gamma^{\omega}$ o $\Gamma^k$ in questa uguaglianza deve essere eseguito con precauzione in quanto in $\Gamma^{\omega}$, $\Gamma^k$ si è posto dapprima $K = 0$, e nella (17,18) dapprima $P_1 = P_2$.

Siano contemporaneamente piccoli $K$ e $P_1 - P_2 \equiv S = (s_0, \mathbf{s})$. Allora, oltre ai diagrammi (17,2), saranno pericolosi anche i diagrammi




Per $K$, $S \to 0$ la funzione $\Gamma_{\gamma\delta,\,\alpha\alpha}$ dipenderà quindi da due argomenti « singolari »

$$x = \frac{\omega}{k} \quad \text{e} \quad y = \frac{s_0 + \omega}{|\mathbf{s} + \mathbf{k}|},$$

e l'espressione (17,18) significa l'annullamento di questa funzione per $x = y$. Consideriamo i valori di $\Gamma$ sulla superficie di Fermi; allora $\omega = s_0 = 0$ in modo che anche $y = 0$. Perciò in questo limite l'uguaglianza (17,18) si verifica soltanto se anche $x = 0$. In altre parole, sulla superficie di Fermi essa è valida per $\Gamma^k$:

$$\Gamma^k_{\gamma\delta,\,\alpha\alpha}(P_1, P_1) = 0 \qquad (17,19)$$

(*N.D. Mermin*, 1967).

[1]) Se si tiene conto soltanto dell'interazione di scambio fra gli spin delle quasi-particelle, allora fra tutte le $\Gamma_{\gamma\delta,\,\alpha\alpha}$ soltanto le $\Gamma_{\alpha\alpha,\,\alpha\alpha}$ sono diverse da zero. Questa affermazione esprime l'invarianza del vettore spin per diffusione. La si può verificare anche direttamente in base a un'espressione della forma (2,4).

## § 18. *Legame fra la funzione di vertice e la funzione di interazione delle quasi-particelle*

Così come alla formazione dell'elemento matriciale (7,9), che definisce una funzione di Green a una sola componente, partecipano gli stati intermedi con numero di particelle $N \pm 1$, anche alla formazione di una funzione di Green a due componenti (l'elemento matriciale (15,1)) partecipano gli stati intermedi con $N$, $N \pm 1$, $N \pm 2$ particelle [1]).

Siccome esistono stati intermedi con $N \pm 1$ particelle, la funzione di Green a due componenti ha i poli coincidenti con quelli della funzione $G$, cioè con l'energia di una quasi-particella. Tuttavia, i fattori corrispondenti sono individuati in forma esplicita nella (15,7). Pertanto la funzione di vertice $\Gamma$ definita da questa formula ha soltanto i poli corrispondenti agli stati con $N$ e $N \pm 2$ particelle. Il momento dell'impulso di questi stati differisce per 0 o 1 dal momento dello stato fondamentale, cosicché le eccitazioni elementari corrispondenti a questi poli hanno spin intero (0 o 1) e sono regolate dalla statistica di Bose. In altre parole, i poli della funzione di vertice definiscono le diramazioni di Bose dello spettro energetico del liquido di Fermi.

I poli provenienti dagli stati intermedi con numero di particelle invariante corrispondono alle eccitazioni elementari rappresentanti quanti del suono nullo. Nella tecnica dei diagrammi agli stati intermedi corrispondono varie sezioni dei diagrammi, che li dividono in due parti fra questi o quelli dei suoi estremi esterni. Nel dato caso agli stati intermedi che non implicano il cambiamento del numero di particelle corrispondono le sezioni dei diagrammi (17,3) su una delle coppie di linee continue congiungenti i blocchi vicini $\tilde{\Gamma}$; l'invarianza del numero di particelle in questi stati viene espressa da un numero identico di linee che intersecano la sezione su entrambi i lati. La traslazione del quadrimpulso attraverso questa sezione è $(Q + K) - Q = K$; in accordo con ciò alle eccitazioni elementari senza cambiamento del numero di particelle corrispondono i poli della funzione di vertice $\Gamma$ $(K;\ P_1,\ P_2)$ rispetto alla variabile $K$.

Abbiamo visto sopra (nel dedurre la relazione (17,10)) che dei due impulsi $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q} + \mathbf{k}$ (che fanno parte dei quadrivettori $Q$ e $Q + K$) uno deve essere maggiore e l'altro minore dell'impulso limite $p_F$. D'altra parte, nel caso di eccitazione all'esterno della sfera di Fermi possono trovarsi soltanto le « particelle » dello stato fondamentale e al suo interno soltanto le « buche ». In questo senso si può dire

---

[1]) Gli stati con $N$ particelle compaiono ad esempio per una successione di operatori nel prodotto T come $\hat{\Psi}_3\hat{\Psi}_1^\dagger\hat{\Psi}_4\hat{\Psi}_2^\dagger$. Quanto agli stati con $N + 2$ particelle, essi corrispondono a successioni del tipo $\hat{\Psi}_3\hat{\Psi}_4\hat{\Psi}_1^\dagger\hat{\Psi}_2^\dagger$.

che le eccitazioni nulle nel liquido di Fermi si possono considerare come stati connessi di una particella e di una buca [1]).

Le eccitazioni elementari, invece, che corrispondono agli stati intermedi con $N \pm 2$ particelle (cui corrispondono i poli della funzione $\Gamma(K; P_1, P_2)$ rispetto alla variabile $P_1 + P_2$), si potrebbero considerare come stati connessi di due particelle o di due buche. L'esistenza di questi stati condurrebbe tuttavia (come verrà mostrato nel capitolo V) alla superfluidità del liquido di Fermi, il che, a sua volta, richiede che sia cambiato sostanzialmente tutto il formalismo matematico della tecnica dei diagrammi.

Quindi, per determinare la ramificazione di Bose dello spettro energetico di un liquido di Fermi non superfluido occorre esaminare i poli della funzione di vertice $\Gamma(K; P_1, P_2)$ rispetto alla variabile $K = (\omega, \mathbf{k})$. Per ogni valore di $\mathbf{k}$, al polo corrisponde una certa energia $\omega = \omega(\mathbf{k})$, ciò che definisce la legge di dispersione di queste eccitazioni. Per gli stati debolmente eccitati $\omega$ e $\mathbf{k}$ sono piccoli, cosicché si possono utilizzare le equazioni dedotte per la funzione $\Gamma(K; P_1, P_2)$ nel dominio di $K$ piccoli.

In prossimità del polo della funzione $\Gamma$ il primo membro e l'integrale a secondo membro dell'equazione (17,15) sono grandi a piacere; il termine $\Gamma^{\omega}(P_1, P_2)$, invece, resta finito e perciò può essere omesso. Osserviamo inoltre che la variabile $P_2$ e anche gli indici $\beta$ e $\delta$ non partecipano alle operazioni eseguite nell'equazione (17,15) sulla funzione $\Gamma$, cioè fungono in essa da parametri inessenziali. Infine, considereremo la funzione $\Gamma$ sulla superficie della sfera di Fermi, ponendo cioè $P_1 = (0, p_F\mathbf{n})$, dove $\mathbf{n}$ è un vettore unitario variabile. Tenendo conto di tutto quanto, concludiamo che la determinazione delle eccitazioni sonore nel liquido di Fermi si riduce al problema degli autovalori dell'equazione integrale

$$\chi_{\gamma\alpha}(\mathbf{n}) = \frac{Z^2 p_F^2}{(2\pi)^3} \int \Gamma^{\omega}_{\gamma\zeta,\,\alpha\varkappa}(\mathbf{n}, \mathbf{l})\, \chi_{\varkappa\zeta}(\mathbf{l}) \frac{\mathbf{lk}\, do_l}{\omega - v_F \mathbf{lk}}, \tag{18,1}$$

dove $\chi_{\gamma\alpha}(\mathbf{n})$ è una funzione ausiliare.

Trasformiamo questa equazione sostituendovi $\chi$ con una funzione nuova

$$\gamma_{\gamma\alpha}(\mathbf{n}) = \frac{\mathbf{nk}}{\omega - v_F \mathbf{nk}} \chi_{\gamma\alpha}(\mathbf{n}). \tag{18,2}$$

Allora l'equazione (18,1) diventa

$$(\omega - v_F \mathbf{nk})\, \nu_{\gamma\alpha}(\mathbf{n}) = \mathbf{kn} \frac{p_F^2 Z^2}{(2\pi)^3} \int \Gamma^{\omega}_{\gamma\zeta,\,\alpha\varkappa}(\mathbf{n}, \mathbf{n}')\, \nu_{\varkappa\zeta}(\mathbf{n}')\, do' \tag{18,3}$$

($\mathbf{l}$ è sostituita con $\mathbf{n}'$).

[1]) In questa impostazione il problema formalmente ha molto in comune con il problema della determinazione dei livelli degli stati connessi di elettrone e positrone in elettrodinamica quantistica (vedi IV, § 122). In particolare, l'equazione (17,4-5) è analoga all'equazione di Bethe-Salpeter (122,10-11) del volume IV.

Questa equazione coincide esattamente come forma con l'equazione cinetica (4,10) per le vibrazioni del liquido di Fermi. Il confronto di ambedue le equazioni conduce alla seguente corrispondenza fra la funzione di interazione delle quasi-particelle e la funzione $\Gamma^{\omega}$:

$$f_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}\,(p_F\mathbf{n},\ p_F\mathbf{n}') = Z^2\Gamma^{\omega}_{\gamma\delta,\alpha\beta}\,(\mathbf{n},\ \mathbf{n}'). \tag{18,4}$$

Ciò mette in evidenza il legame esistente fra la funzione $f$ e le proprietà di diffusione delle quasi-particelle [1]).

L'uguaglianza (18,4) stabilisce un legame fra $f$ e l'ampiezza del processo di diffusione non fisico. Ricorriamo ora alla formula (17,17) e deduciamo suo tramite una relazione esplicita fra $f$ e l'ampiezza « fisica » di diffusione in avanti per le quasi-particelle sulla superficie di Fermi, che denotiamo nel seguente modo:

$$A_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}\,(\mathbf{n}_1,\ \mathbf{n}_2) = Z^2\Gamma^{k}_{\gamma\delta,\alpha\beta}\,(\mathbf{n}_1,\ \mathbf{n}_2). \tag{18,5}$$

La relazione (17,17) sulla superficie di Fermi diventa

$$A_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}\,(\mathbf{n}_1,\ \mathbf{n}_2) = f_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}\,(\mathbf{n}_1,\ \mathbf{n}_2) - \\ - \frac{p_F^2}{2\pi^2 v_F}\int f_{\gamma\zeta,\,\alpha\varkappa}\,(\mathbf{n}_1,\ \mathbf{n}')\,A_{\varkappa\delta,\,\zeta\beta}\,(\mathbf{n}',\ \mathbf{n}_2)\,\frac{do'}{4\pi}. \tag{18,6}$$

La dipendenza dallo spin delle funzioni $A$ e $f$ può essere espressa mediante le matrici $\sigma$ di Pauli. Nel caso generale queste funzioni possono contenere qualsiasi combinazione scalare dei quattro vettori $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\sigma_1$, $\sigma_2$. Ma se fra le particelle si produce l'interazione di scambio, allora sono ammissibili come prodotti scalari soltanto $\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2$ e $\sigma_1\sigma_2$. In questo caso le funzioni $A$ e $f$ si possono rappresentare (come abbiamo già fatto per $f$ nella (2,4)) nella forma

$$\begin{aligned} \frac{p_F^2}{\pi^2 v_F}\,f_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}\,(\mathbf{n}_1,\ \mathbf{n}_2) &= F\,(\vartheta)\,\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + G\,(\vartheta)\,\sigma_{\gamma\alpha}\sigma_{\delta\beta}, \\ \frac{p_F^2}{\pi^2 v_F}\,A_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}\,(\mathbf{n}_1,\ \mathbf{n}_2) &= B\,(\vartheta)\,\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + C\,(\vartheta)\,\sigma_{\gamma\alpha}\sigma_{\delta\beta}, \end{aligned} \tag{18,7}$$

dove i coefficienti $F$, $G$, $B$, $C$ sono funzioni soltanto dell'angolo $\vartheta$ formato da $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$. Sviluppiamo queste funzioni in polinomi di Legendre

$$B\,(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty}\,(2l+1)\,B_l P_l\,(\cos\vartheta),\ \ldots \tag{18,8}$$

---

[1]) Questa conclusione generale appartiene a *L. D. Landau* (1958). Per un gas di Fermi debolmente non perfetto, la deduzione dell'equazione cinetica sommando diagrammi concreti del tipo (17,3) è stata eseguita prima da *A. B. Migdal* e *V. M. Galitskij* (1958). Osserviamo che nel caso di gas nelle funzioni $G$ (nell'approssimazione nulla) non esistono termini polari per cui non sorge il problema della loro eliminazione.

Dopo aver sostituito le (18,7-8) nella (18,6) e calcolato l'integrale (utilizzando a tale scopo il teorema sulla somma dei polinomi di Legendre) otteniamo

$$B_l = F_l (1 - B_l), \quad C_l = G_l (1 - C_l). \tag{18,9}$$

Queste formule permettono di stabilire un legame algebrico semplice fra i coefficienti dello sviluppo di $f$ ed $A$.

Le condizioni di stabilità (2,19-20) conducono a disuguaglianze analoghe per i coefficienti $B_l$ e $C_l$:

$$B_l < 1, \quad C_l < 1. \tag{18,10}$$

Inoltre, questi coefficienti verificano la seguente relazione che è conseguenza della formula (17,19): $B(0) + C(0) = 0$ ossia

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(B_l + C_l) = 0. \tag{18,11}$$

Le uguaglianze (18,9) e (18,11) assieme alle condizioni (18,10) sono sufficienti per la dimostrazione della interessante proposizione seguente: in ogni liquido di Fermi stabile esiste almeno un ramo (ordinario o di spin) del suono assiale simmetrico [1]).

## § 19. *Le identità per le derivate della funzione di Green*

Nel formalismo matematico delle funzioni di Green un ruolo essenziale è svolto da alcune identità fra le derivate di queste funzioni e l'ampiezza di diffusione delle quasi-particelle. La deduzione di queste relazioni è la solita: si calcola la variazione della funzione di Green sotto l'influsso di un dato « campo esterno » virtuale, il risultato della cui azione è noto a priori.

Pertanto calcoliamo prima di tutto la variazione $\delta G$ della funzione di Green sotto l'azione di un « campo esterno » di forma arbitraria. A tale campo corrisponde nell'operatore hamiltoniano il termine

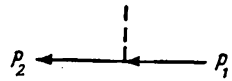
$$\delta \hat{V}^{(1)} = \int \hat{\Psi}^{+}_{\alpha}(t, \mathbf{r})\, \delta \hat{U} \hat{\Psi}_{\alpha}(t, \mathbf{r})\, d^3x, \tag{19,1}$$

dove $\delta \hat{U}$ è un operatore agente sulle funzioni di $\mathbf{r}$ (e che può anche dipendere dal tempo $t$).

In presenza di campo esterno la funzione di Green dipende già dai due quadrimpulsi $P_1$ e $P_2$. Nella tecnica dei diagrammi questo

[1]) Vedi *N. D. Mermin*, Phys. Rev. **159**, 161 (1967).

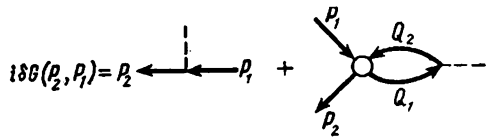
campo verrà rappresentato da un elemento grafico nuovo, ossia dalla linea tratteggiata




e a questa linea corrisponde, fra l'altro, il fattore

$$-i\delta U(P_2, P_1) = -i \int e^{iP_2X} \delta\hat{U} e^{-iP_1X} d^4X. \qquad (19,2)$$

Nel primo ordine rispetto al campo esterno la correzione alla funzione di Green esatta viene rappresentata dalla somma di due diagrammi scheletro




(19,3)

dove tutte le linee continue sono in grassetto (le funzioni $G$ esatte) e il cerchietto esprime la funzione di vertice esatta ($i\Gamma$). In forma analitica questa uguaglianza si scrive come segue:

$$\delta G_{\beta\alpha}(P_2, P_1) = G_{\beta\gamma}(P_2)\, \delta U(P_2, P_1)\, G_{\gamma\alpha}(P_1) - iG_{\beta\gamma}(P_2)\, G_{\varepsilon\alpha}(P_1) \times$$
$$\times \int \Gamma_{\gamma\delta,\, \varepsilon\zeta}(P_2, Q_1;\, P_1, Q_2)\, \delta U(Q_2, Q_1)\, G_{\zeta\varkappa}(Q_2)\, G_{\varkappa\delta}(Q_1) \frac{d^4Q_1}{(2\pi)^4}, \qquad (19,4)$$

dove $Q_2 + P_1 = P_2 + Q_1$.

Le prime due identità che ci interessano sono legate alla conservazione del numero di particelle nel sistema. Questa proprietà è espressa nell'operatore hamiltoniano del sistema dal fatto che gli operatori $\psi$ figurano in esso a coppie: un solo $\hat{\Psi}^+(X)$ e $\hat{\Psi}(X)$ per ogni argomento $X$.

Effettuiamo la trasformazione di gauge degli operatori $\psi$

$$\hat{\Psi}_\alpha(X) = \hat{\Psi}'_\alpha(X)\, e^{-i\chi(X)}, \quad \hat{\Psi}^+_\alpha = \hat{\Psi}'^+_\alpha e^{i\chi(X)}, \qquad (19,5)$$

dove $\chi(X)$ è una funzione reale [1]). In virtù della proprietà suindicata dell'operatore hamiltoniano, se $\hat{\Psi}$ verifica l'« equazione di Schrödinger » (7,8) anche $\hat{\Psi}'$ verifica la stessa equazione sostituendovi

$$\Delta \to (\nabla - i\nabla\chi)^2, \quad \frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} - i\frac{\partial\chi}{\partial t}.$$

---

[1]) Essa è analoga alla trasformazione di gauge in elettrodinamica quantistica (cfr. III, le formule (111,8-9)).

Per $\chi = \delta\chi$ infinitesimo questa variazione dell'equazione è equivalente all'aggiunta all'operatore hamiltoniano del « campo esterno »

$$\delta\hat{U} = -\frac{\partial\delta\chi}{\partial t} + \frac{i}{2m}(\Delta\,\delta\chi + 2\,(\nabla\,\delta\chi)\,\nabla).$$

In particolare, se

$$\delta\chi\,(X) = \mathrm{Re}\,(\chi_0 e^{-iKX}), \qquad K = (\omega,\ \mathbf{k})$$

(dove si può omettere il segno Re data la linearità delle operazioni successive), allora

$$\delta U\,(P_2,\ P_1) = i\,(2\pi)^4\,\chi_0\delta^{(4)}\,(P_2 - P_1 - K)\left\{\omega - \frac{1}{2m}\,\mathbf{k}\,(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)\right\}. \tag{19,6}$$

D'altra parte, la funzione di Green, costruita in base agli operatori $\psi$

$$\hat{\Psi}'_\alpha = \hat{\Psi}_\alpha\,(1 + i\,\delta\chi), \qquad \hat{\Psi}'^{+}_\alpha = \hat{\Psi}^{+}_\alpha\,(1 - i\,\delta\chi),$$

differisce da quella costruita in base agli operatori $\hat{\Psi}$, $\hat{\Psi}^+$ per

$$\delta G_{\alpha\beta}\,(X_1,\ X_2) = iG_{\alpha\beta}\,(X_1 - X_2)\,[\delta\chi(X_1) - \delta\chi\,(X_2)]$$

ossia, in componenti di Fourier,

$$\delta G_{\alpha\beta}\,(P_2,\ P_1) = \int \delta G_{\alpha\beta}\,(X_1,\ X_2)\,e^{i(P_2X_1 - P_1X_2)}\,d^4X_1\,d^4X_2 =$$
$$= i\,[G_{\alpha\beta}\,(P_1) - G_{\alpha\beta}\,(P_2)]\,\delta\chi\,(P_2 - P_1), \tag{19,7}$$

dove

$$\delta\chi\,(P) = \int \delta\chi\,(X)\,e^{iPX}\,d^4X = (2\pi)^4\,\chi_0\delta^{(4)}\,(P - K).$$

Quindi, la stessa variazione $\delta G_{\alpha\beta}$ è espressa in due forme: la (19,7) e la (19,4), dove occorre sostituire $\delta U$ presa dalla (19,6). Eguagliando queste due espressioni, noi otteniamo (dopo la sostituzione $G_{\alpha\beta} = G\delta_{\alpha\beta}$ e alcuni cambiamenti della notazione delle variabili)

$$\delta_{\alpha\beta}\,[G\,(P + K) - G\,(P)] = G\,(P + K)\,G\,(P)\left\{\left[-\omega + \frac{\mathbf{k}\,(2\mathbf{p} + \mathbf{k})}{2m}\right]\delta_{\alpha\beta} + \right.$$
$$\left. + i\int \Gamma_{\beta\delta,\,\alpha\delta}\,(K;\ P,\ Q)\,G\,(Q)\,G\,(Q - K)\left[\omega - \frac{\mathbf{k}\,(2\mathbf{q} - \mathbf{k})}{2m}\right]\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\right\}.$$

Le identità cercate si ottengono passando al limite in questa uguaglianza per $\omega$, $\mathbf{k} \to 0$; in questo caso

$$G\,(P + K) - G\,(P) \to \omega\frac{\partial G}{\partial p_0} + \mathbf{k}\,\frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}} \tag{19,8}$$

(dove $P = (p_0, \mathbf{p})$). Eseguendo questo passaggio per la condizione $k/\omega \to 0$, otteniamo la prima identità

$$\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial G(P)}{\partial p_0} = -\{G^2(P)\}_\omega \left[\delta_{\alpha\beta} - i \int \Gamma^\omega_{\beta\delta,\,\alpha\delta}(P, Q) \{G^2(Q)\}_\omega \frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\right]. \tag{19,9}$$

Qui abbiamo introdotto la notazione

$$\{G^2(P)\}_\omega = \lim_{\omega,\,\mathbf{k}\to 0} G(P)\,G(P+K) \quad \text{per} \quad k/\omega \to 0. \tag{19,10}$$

Analogamente passando al limite per la condizione $\omega/k \to 0$, otteniamo ancora l'altra identità

$$\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}} = \{G^2(P)\}_k \left[\frac{\mathbf{p}}{m}\,\delta_{\alpha\beta} - i \int \Gamma^k_{\beta\delta,\,\alpha\delta}(P, Q) \frac{\mathbf{q}}{m} \{G^2(Q)\}_k \frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\right] \tag{19,11}$$

con la medesima notazione $\{G^2(P)\}_k$.

Inoltre, consideriamo la variazione della funzione di Green allorché sul sistema agisce un campo costante

$$\delta\hat{U} = \delta U(\mathbf{r}) = U_0 e^{i\mathbf{kr}}. \tag{19,12}$$

Per $\mathbf{k} \to 0$ questo campo varia lentamente nello spazio in modo che il suo influsso sul sistema può essere supposto macroscopico. In accordo con la condizione di equilibrio termodinamico nel campo esterno si deve avere $\mu + \delta U =$ costante (vedi V, § 25); per $\mathbf{k} \to 0$ ciò significa che il potenziale chimico $\mu$ varia di una quantità piccola $-U_0$. La variazione corrispondente della funzione di Green è

$$\delta G_{\alpha\beta}(X_1, X_2) = -U_0 \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial G(X_1 - X_2)}{\partial \mu},$$

e la sua componente di Fourier (definita come nella (19,7)) vale

$$\delta G_{\alpha\beta}(P_2, P_1) = -(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_2 - P_1)\, U_0 \frac{\partial G(P_1)}{\partial \mu} \delta_{\alpha\beta}.$$

D'altra parte, la stessa variazione della funzione di Green si può calcolare mediante la formula (19,4) ponendovi questa volta

$$\delta U(P_2, P_1) = (2\pi)^4 U_0 \delta^{(4)}(P_2 - P_1 - K), \qquad K = (0, \mathbf{k}).$$

Il passaggio al limite $\mathbf{k} \to 0$ corrisponde in questo caso (campo costante, $\omega \equiv 0$), alla condizione $\omega/k \to 0$. Come risultato, otteniamo l'identità

$$\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial G(P)}{\partial \mu} = -\{G^2(P)\}_k \left[\delta_{\alpha\beta} - i \int \Gamma^k_{\beta\delta,\,\alpha\delta}(P, Q) \{G^2(Q)\}_k \frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\right]. \tag{19,13}$$

Infine, l'ultima identità compare come conseguenza dell'invarianza galileiana del sistema. Per dedurla, consideriamo un sistema di coordinate che si muove a piccola velocità $\delta\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}_0 e^{-i\omega t}$

lentamente variabile con il tempo. Il passaggio a questo sistema è equivalente alla sovrapposizione di un campo esterno il cui operatore [1]) è

$$\delta\hat{U} = -\delta\mathbf{w}\cdot\hat{\mathbf{p}} = i\delta\mathbf{w}\cdot\nabla \tag{19,14}$$

ossia, nella rappresentazione degli impulsi,

$$\delta U(P_2, P_1) = -\mathbf{p}_1\mathbf{w}_0\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(P_2 - P_1 - K), \quad K = (\omega, 0).$$

Questa espressione va sostituita nella (19,4) dopo di che possiamo eseguire il passaggio al limite $\omega \to 0$.

D'altro canto, per $\omega \to 0$ si tratta della trasformazione galileiana da un sistema di riferimento inerziale a un altro che si muove a velocità costante $\delta\mathbf{w}$. Se nel liquido esiste un'eccitazione elementare di energia $\varepsilon(\mathbf{p})$, allora l'energia di questa eccitazione nel sistema di riferimento, che si muove rispetto al liquido a velocità $\delta\mathbf{w}$, vale $\varepsilon - \mathbf{p}\delta\mathbf{w}$ [2]). Questa è la ragione per cui, nel nuovo sistema di riferimento, la frequenza $p_0$ deve figurare nella funzione $G(P)$ in combinazione $p_0 + \mathbf{p}\delta\mathbf{w}$ (in modo tale che il polo della funzione si sposti di $-\mathbf{p}\delta\mathbf{w}$). In tal modo

$$\delta G = \mathbf{p}\,\delta\mathbf{w}\,\frac{\partial G}{\partial p_0}$$

e si arriva all'identità

$$\delta_{\alpha\beta}\mathbf{p}\,\frac{\partial G(P)}{\partial p_0} = -\{G^2(P)\}_\omega\left\{\delta_{\alpha\beta}\mathbf{p} - \right.$$
$$\left. - i\int \Gamma^{\omega}_{\beta\delta,\,\alpha\delta}(P, Q)\,\mathbf{q}\,\{G^2(Q)\}_\omega\,\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\right\}. \tag{19,15}$$

Dovremo applicare più avanti le identità così ottenute, in particolare, per i valori $P = (p_0, \mathbf{p})$ della variabile libera sulla superficie di Fermi: $P_F = (0, \mathbf{p}_F)$. Portando il fattore $G^2(P)$ dai secondi membri delle identità ai primi, sostituiamovi le derivate di $G(P)$ con quelle di $G^{-1}(P)$; in questo caso il passaggio al limite $K \to 0$ in $G(P)\,G(P + K)$ è inessenziale.

D'altro canto, in prossimità della superficie di Fermi la funzione di Green viene definita dal suo termine polare in modo che

$$G^{-1}(P) = \frac{1}{Z}\,[p_0 - v_F(p - p_F)].$$

---

[1]) Nella lagrangiana classica $L = mv^2/2$ della particella libera il passaggio a un sistema di coordinate in moto si effettua mediante la sostituzione $\mathbf{v} \to \mathbf{v} + \delta\mathbf{w}$ e implica la comparsa di una piccola (per $\delta\mathbf{w}$ piccolo) aggiunta $\delta L = m\mathbf{v}\delta\mathbf{w}$. Rispettivamente (cfr. I, la formula (40,7)) l'aggiunta all'hamiltoniana è $\delta H = -\mathbf{p}\delta\mathbf{w}$, e in meccanica quantistica le corrisponde l'operatore (19,14).

[2]) Per considerazioni più dettagliate vedi più avanti (§ 23).

Di qui abbiamo su questa stessa superficie

$$\frac{\partial G^{-1}}{\partial p_0} = \frac{1}{Z}, \qquad \frac{\partial G^{-1}}{\partial \mu} = \frac{v_F}{Z}\frac{dp_F}{d\mu}.$$

Come risultato, ad esempio, le identità (19,9) e (19,13) sulla superficie di Fermi diventano

$$i\int \Gamma^{\omega}_{\beta\delta,\,\alpha\delta}(P_F,\,Q)\,\{G^2(Q)\}_{\omega}\frac{d^4Q}{(2\pi)^4} = \left(1 - \frac{1}{Z}\right)\delta_{\alpha\beta}, \tag{19,16}$$

$$i\int \Gamma^{k}_{\beta\delta,\,\alpha\delta}(P_F,\,Q)\,\{G^2(Q)\}_{k}\frac{d^4Q}{(2\pi)^4} = \left(1 - \frac{v_F}{Z}\frac{dp_F}{d\mu}\right)\delta_{\alpha\beta}. \tag{19,17}$$

## § 20. *Deduzione della relazione esistente fra l'impulso limite e la densità*

Le relazioni ottenute nei paragrafi precedenti permettono di fornire una dimostrazione conseguente della tesi fondamentale della teoria di Landau inerente al liquido di Fermi, e cioè: il legame esistente fra l'impulso limite $p_F$ e la densità del liquido $N/V$ viene determinato dalla stessa formula (1,1) che per un gas perfetto.

L'idea della dimostrazione è basata sul calcolo indipendente delle variazioni di $N$ e $p_F$ per una variazione infinitesima del potenziale chimico $\mu$ e, in seguito, sul loro confronto.

In accordo con la (7,24) il numero completo di particelle (in un dato volume $V$) come funzione del potenziale chimico è dato dall'integrale

$$N = -2iV\lim_{t\to -0}\int G(P)\,e^{-ip_0t}\frac{d^4P}{(2\pi)^4}, \qquad P = (p_0,\,\mathbf{p}). \tag{20,1}$$

Di qui ricaviamo la derivata

$$\frac{1}{V}\frac{dN}{d\mu} = -2i\int \frac{\partial G(P)}{\partial \mu}\frac{d^4P}{(2\pi)^4}. \tag{20,2}$$

Poiché questo integrale converge per $p_0$ grandi ($\partial G/\partial\mu \sim 1/p_0^2$ per $|\,p_0\,| \to \infty$), non occorre più scrivere il fattore $e^{-ip_0t}$ nell'espressione integranda. Sostituendovi il rapporto $\partial G/\partial\mu$ ricavato dall'identità (19,13) (sommato su $\alpha = \beta$), otteniamo

$$\frac{1}{V}\frac{dN}{d\mu} = 2i\int \{G^2(P)\}_k\frac{d^4P}{(2\pi)^4} + \\ + \int \{G^2(P)\}_k\,\Gamma^k(P,\,Q)\,\{G^2(Q)\}_k\frac{d^4P\,d^4Q}{(2\pi)^8},$$

dove, per brevità, $\Gamma = \Gamma_{\alpha\gamma,\,\alpha\gamma}$. Lo scopo del calcolo ulteriore consiste nell'esprimere il secondo membro di questa uguaglianza in funzione dell'integrale esteso unicamente alla superficie di Fermi.

Prima di tutto sostituiamo nel secondo integrale la funzione $\Gamma^k$ con la sua espressione ottenuta dalla (17,17) (cambiandovi la notazione $Q_F$ con $S_F$):

$$\frac{1}{V}\frac{dN}{d\mu}=2i\int\{G^2(P)\}_k\frac{d^4P}{(2\pi)^4}+\int\{G^2(P)\}_k\,\Gamma^{\omega}(P,\,Q)\times$$
$$\times\{G^2(Q)\}_k\frac{d^4P\,d^4Q}{(2\pi)^8}-\frac{p_F^2Z^2}{v_F\,(2\pi)^3}\int\{G^2(P)\}_k\,\Gamma^{\omega}_{\alpha\xi,\,\alpha\varkappa}\times$$
$$\times(P,\,S_F)\,\Gamma^k_{\varkappa\gamma,\,\zeta\gamma}(S_F,\,Q)\,\{G^2(Q)\}_k\frac{d^4P\,d^4Q\,do_s}{(2\pi)^8}. \qquad (20,3)$$

Trasformiamo dapprima l'ultimo termine. Nell'espressione integranda dipendono da $Q$ soltanto i due ultimi fattori; il loro integrale in $d^4Q$ è dato (sulla superficie di Fermi $S=S_F$) dalla formula (19,17) in modo che questo ultimo termine assume la forma

$$i\frac{p_F^2Z^2}{v_F\,(2\pi)^3}\int\{G^2(P)\}_k\,\Gamma^{\omega}(P,\,S_F)\frac{d^4P\,do_s}{(2\pi)^4}\left(1-\frac{v_F}{Z}\frac{dp_F}{d\mu}\right).$$

In seguito, ricordiamo che, integrando in $d^4P$, i valori limite $G(P)\,G(P+K)$ vanno intesi nel senso della (17,10); perciò $\{G^2(P)\}_{\omega}=$ $=\varphi(P)$ e

$$\{G^2(P)\}_k=\{G^2(P)\}_{\omega}-\frac{2\pi iZ^2}{v_F}\,\delta(p_0)\,\delta(p-p_F). \qquad (20,4)$$

Dopo questa sostituzione otteniamo

$$i\frac{p_F^2Z^2}{v_F\,(2\pi)^3}\left(1-\frac{v_F}{Z}\frac{dp_F}{d\mu}\right)\left\{\int\{G^2(P)\}_{\omega}\,\Gamma^{\omega}(P,\,S_F)\frac{d^4P\,do_s}{(2\pi)^4}-8\pi i\overline{F}\right\},$$

dove, in accordo con la (18,4), è introdotta la funzione di interazione fra le quasi-particelle e utilizzata l'espressione di $f_{\alpha\xi,\,\alpha\xi}$ in funzione di $F(\vartheta)$ in accordo con le formule (2,6-7); il trattino orizzontale sopra $F$ significa l'integrazione in $do/4\pi$. L'integrale restante in $d^4P$ viene dato dalla formula (19,16) dopo di che l'integrazione in $do_s$ fornisce ancora il fattore $4\pi$. Infine, il terzo termine nella (20,3) risulta uguale a

$$-\frac{p_F^2Z^2}{v_F\pi^2}\left(\frac{v_F}{Z}\frac{dp_F}{d\mu}-1\right)\left\{1-\frac{1}{Z}+\overline{F}\right\} \qquad (20,5)$$

Allo stesso modo si trasforma il secondo termine nella (20,3): le grandezze $\{G^2(P)\}_k$ e $\{G^2(Q)\}_k$ vanno espresse, in accordo con la (20,4), in funzione di $\{G^2(P)\}_{\omega}$ e $\{G^2(Q)\}_{\omega}$ dopo di che si ricorre alle identità (19,9) e (19,16). Come risultato questo secondo termine risulta uguale a

$$-2i\int\frac{\partial G}{\partial p_0}\frac{d^4P}{(2\pi)^4}-2i\int\{G^2(P)\}_{\omega}\frac{d^4P}{(2\pi)^4}+\frac{p_F^2Z^2}{v_F\pi^2}\left\{2\left(\frac{1}{Z}-1\right)-\overline{F}\right\}. \qquad (20,6)$$

Il primo integrale si annulla integrando in $dp_0$ in quanto $G \to 0$ per $p_0 \to \pm\infty$.

Infine, il primo termine nella (20,3), dopo aver sostituito in esso l'espressione (20,4), dà

$$2i \int \{G^2(P)\}_\omega \frac{d^4p}{(2\pi)^4} + \frac{p_F^2 Z^2}{v_F \pi^2}. \tag{20,7}$$

Sommando ora tutti i contributi (20,5-7) troviamo

$$\frac{1}{V}\frac{dN}{d\mu} = \frac{p_F^2}{\pi^2}\frac{dp_F}{d\mu} + \frac{p_F^2 Z}{\pi^2 v_F}\left\{1 - \frac{dp_F}{d\mu} v_F (1+\overline{F})\right\}. \tag{20,8}$$

D'altra parte, ponendo nella (2,14)

$$\delta n' = \frac{\partial n'}{\partial p_F}\delta p_F = \delta(p' - p_F)\,\delta p_F,$$

è facile ottenere

$$\frac{d\mu}{dp_F} = v_F(1+\overline{F}). \tag{20,9}$$

Sottolineiamo che nella deduzione della formula (2,14) non è stata utilizzata la dipendenza concreta di $p_F$ da $N/V$, e perciò abbiamo la possibilità di applicare qui questa relazione al fine di trovare la detta dipendenza (l'uguaglianza (20,9) si può ottenere, ovviamente, anche mediante le relazioni per le funzioni di vertice, che sono state utilizzate per la deduzione della formula (20,8)) [1].

Tenendo conto di questa uguaglianza, vediamo che la parentesi graffa nella formula (20,8) si annulla e, quindi, abbiamo

$$\frac{d}{d\mu}\frac{N}{V} = \frac{p_F^2}{\pi^2}\frac{dp_F}{d\mu} = \frac{d}{d\mu}\left[\frac{8\pi p_F^3}{3(2\pi)^3}\right]. \tag{20,10}$$

Per $N/V \to 0$ abbiamo a che fare con un gas, in modo che in questo limite la dipendenza di $p_F$ da $N/V$ deve coincidere in ogni caso con quella gassosa. Questa condizione determina la costante di integrazione nella (20,10), e noi arriviamo, infine, alla relazione cercata (1,1):

$$\frac{N}{V} = \frac{8\pi p_F^3}{3(2\pi)^3}.$$

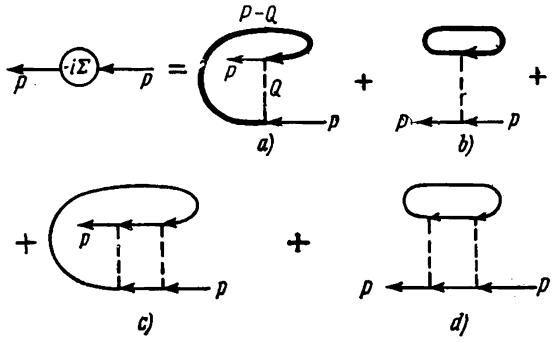
## § 21. *Funzione di Green per un gas di Fermi quasi-perfetto*

Per illustrare il modo di applicazione della tecnica dei diagrammi, l'applicheremo in questo paragrafo al calcolo della funzione di Green di un gas di Fermi quasi-perfetto nei limiti dello stesso modello

[1]) La formula (2,11) per la massa efficace può, invece, essere dedotta mediante la relazione (17,17) e le identità (19,11) e (19,15).

che è stato esaminato al § 6 mediante la teoria delle perturbazioni ordinaria (*V. M. Galitskij*, 1958). Ricordiamo che si tratta di un gas con repulsione fra le particelle e che il procedimento descritto al § 6 permette di applicare a questa interazione la teoria delle perturbazioni finché nel risultato finale del calcolo entra soltanto l'ampiezza di diffusione.

Come è stato mostrato al § 14, la determinazione della funzione di Green si riduce al calcolo dell'autofunzione energetica $\Sigma_{\alpha\beta}(P)$. Essa viene data, in prima e seconda approssimazione della teoria delle perturbazioni, dall'insieme dei diagrammi (14,9) e (14,10). Rappresentiamo qui questi diagrammi nel seguente modo:




(21,1)

I diagrammi (21,1a-b) abbracciano i diagrammi del primo ordine (14,10a) e (14,9a) e quelli del secondo ordine (14,10b-c) e (14,9 b-c); gli ultimi differiscono dai primi soltanto per correzioni alla linea continua interna. Nei diagrammi (21,1a-b) queste linee sono date in grassetto e, quindi, devono essere poste in corrispondenza non con le funzioni di Green $G^{(0)}$ del gas perfetto, bensì con le funzioni $G$ corrette a meno dei termini del primo ordine. Infine, i (21,1c-d) sono i diagrammi del secondo ordine (14,10d-e). Tutti i diagrammi sono deformati in modo tale da rendere evidente la natura della loro struttura; questi sono i primi termini della serie « a scala » dei diagrammi a quattro gambe in cui ogni coppia di linee esterne è reciprocamente « accorciata » in due modi diversi.

Iniziamo dal calcolo del diagramma (21,1a). La sua espressione analitica è

$$[-i\Sigma(P)]_a = \int U(Q)\, G(P-Q)\, \frac{d^4Q}{(2\pi)^4}, \qquad Q=(q_0, \mathbf{q}), \quad P=(\omega, \mathbf{p}) \tag{21,2}$$

(il fattore comune $\delta_{\alpha\beta}$ è omesso). Integriamo dapprima in $dq_0$. Tuttavia, poiché il fattore $U(Q) \equiv U(\mathbf{q})$ è indipendente da $q_0$ e $G \sim 1/q_0$ per $|q_0| \to \infty$, dobbiamo precisare preliminarmente

il modo di integrazione. A tal fine occorre tornare all'origine del diagramma (21,1a) e osservare che la sua linea continua corrisponde alla convoluzione di una coppia di operatori $\psi$ all'interno di un medesimo operatore $\hat{V}$. Ciò vuol dire che $\hat{\Psi}$ e $\hat{\Psi}^+$ vengono calcolati a un medesimo istante e che per la convoluzione $\hat{\Psi}^+$ si trova a sinistra di $\hat{\Psi}$. In altre parole, nella rappresentazione delle coordinate compare la funzione $G$ che va calcolata per $t = t_1 - t_2 \to -0$. Nella rappresentazione degli impulsi, invece, ciò significa che, passando al limite $t \to -0$, all'espressione integranda nella (21,2) va aggiunto il fattore $\exp(-iq_0 t)$. Applicando ora la formula (7,23) otteniamo

$$[-i\Sigma]_a = i \int U(\mathbf{q})\, N(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \frac{d^3q}{(2\pi)^3}; \tag{21,3}$$

dove $N(\mathbf{p})$ è la funzione di distribuzione delle particelle.

La componente di Fourier $U(\mathbf{q})$ dipende essenzialmente dal valore di $\mathbf{q}$ soltanto per $q \gtrsim 1/r_0$, dove $r_0$ è il raggio d'azione del campo $U(r)$; questi valori sono grandi a priori (per il gas rarefatto) rispetto a $p_F$. Se ci limitiamo ai valori $|p - p_F| \ll 1/r_0$, allora per i detti valori di $\mathbf{q}$ avremo $N(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \approx 0$. Perciò $U(\mathbf{q})$ nella (21,3) si può sostituire con $U(0)$ e portare fuori dal segno di integrale[1]. L'integrale restante è uguale alla metà della densità del gas $n(\mu)$ (valore dato della proiezione di spin!) e, quindi, $[\Sigma]_a = -n(\mu)\, U(0)/2$.

Quanto al diagramma (21,1b) con la linea continua chiusa su se stessa, esso dà $[\Sigma]_b = n(\mu)\, U(0)$. In tal modo il contributo in $\Sigma$ di ambedue i diagrammi vale

$$[\Sigma]_{a,b} = \frac{1}{2} n(\mu)\, U(0) = \frac{2\pi}{m} n(\mu)\, a, \tag{21,4}$$

dove $a$ è la lunghezza di diffusione definita in base alla formula (6,2).

L'espressione (21,4) contiene in sé, in particolare, tutto l'effetto del primo ordine. In questa approssimazione occorre intendere $n(\mu)$ come la densità del gas perfetto $n^{(0)}(\mu)$ in modo che

$$\Sigma^{(1)} \equiv [\Sigma]^{(1)}_{a,b} = \frac{2\pi}{m} n^{(0)}(\mu)\,(a). \tag{21,5}$$

Per il calcolo ulteriore introduciamo quale notazione intermedia la funzione $F$ definita dai diagrammi a scala

(21,6)

[1]) L'errore così commesso ha, come è facile vedere, un ordine di grandezza relativo $\sim (p_F r_0)^2$ e perciò non incide neanche sui termini in $p_F r_0$ dell'ordine successivo.

(come sempre, $P_1 + P_2 = P_3 + P_4$). In forma analitica abbiamo

$$iF_{\gamma\delta,\ \alpha\beta}(P_3,\ P_4;\ P_1,\ P_2) = i\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}(F^{(1)} + F^{(2)}), \qquad (21,7)$$

dove

$$iF^{(1)} = -iU(P_3 - P_1), \qquad (21,8)$$

$$iF^{(2)} = \int G^{(0)}(P')\,U(P_1 - P')\,G^{(0)}(P_1 + P_2 - P')\,U(P' - P_3)\,\frac{d^4P'}{(2\pi)^4}. \qquad (21,9)$$

Sviluppando ambedue i diagrammi (21,1c-d) ed esprimendoli in funzione di $F^{(2)}$, otteniamo

$$[-i\Sigma(P)]_{c,\,d} = -\int G^{(0)}(Q)\,F^{(2)}(P,\ Q;\ Q,\ P)\,\frac{d^4Q}{(2\pi)^4} + \\ + 2\int G^{(0)}(Q)\,F^{(2)}(P,\ Q;\ P,\ Q)\,\frac{d^4Q}{(2\pi)^4} \qquad (21,10)$$

(gli stessi integrali con $F^{(1)}$ al posto di $F^{(2)}$ danno la (21,5)). La differenza di segno davanti ai due integrali è dovuta alla presenza del cappio chiuso nel diagramma (21,1d); i fattori $\delta$ nel primo diagramma danno $\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, e nel secondo diagramma $\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\gamma} = 2\delta_{\alpha\beta}$.

Passiamo al calcolo di $F^{(2)}$. Poiché $U(Q)$ non dipende da $q_0$, l'integrazione in $dp_0'$ si riduce all'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^{(0)}(P')\,G^{(0)}(P_1 + P_2 - P')\,\frac{dp_0'}{2\pi}.$$

Sostituendovi $G^{(0)}$ dalla (9,9) (e tenendo conto della convergenza dell'integrale per $|p_0'| \to \infty$), chiudiamo il cammino di integrazione con una semicirconferenza indefinitamente lontana in uno dei semipiani della variabile complessa $p_0'$; l'integrale è diverso da zero soltanto se i poli delle due funzioni $G^{(0)}$ giacciono in semipiani diversi, cioè se

$$\operatorname{sign}(p' - p_F) = \operatorname{sign}(|\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'| - p_F). \qquad (21,11)$$

Come risultato otteniamo

$$F^{(2)}(P_3,\ P_4;\ P_1,\ P_2) = \\ = -\int \frac{U(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}')\,U(\mathbf{p}' - \mathbf{p}_3)\operatorname{sign}(p' - p_F)}{\omega_1 + \omega_2 + 2\mu - \frac{1}{2m}[\mathbf{p}'^2 + (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}')^2] + i0\cdot\operatorname{sign}(p' - p_F)}\,\frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \qquad (21,12)$$

(dove $\omega_1 \equiv p_{10}$, $\omega_2 \equiv p_{20}$). In questo caso, affinché automaticamente sia tenuto conto della condizione (21,11), a numeratore dell'espressione integranda occorre effettuare la sostituzione

$$\operatorname{sign}(p' - p_F) \to 1 - \theta(\mathbf{p}') - \theta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'),$$

dove $\theta(\mathbf{p})$ è la funzione a gradini (1,10).

Come abbiamo visto al § 16, la serie di diagrammi a scala determina (nel vuoto) l'ampiezza di diffusione reciproca di due particelle. Pertanto l'espressione (21,12) contiene in sé la correzione ai termini del primo ordine nell'ampiezza di diffusione. Si può tener conto di questa correzione sostituendo nell'espressione (21,8) per $F^{(1)}$

$$U(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) \to -\frac{4\pi}{m} \operatorname{Re} f(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_1)$$

(dove $f$ è l'ampiezza di diffusione esatta a meno del secondo ordine nel vuoto) [1]) e, al tempo stesso, sottraendo dall'espressione (21,12) per $F^{(2)}$ la parte reale del suo valore nel vuoto, cioè per $p_F = 0$, $\mu = 0$ e i valori $\omega_1 = p_1^2/2m$, $\omega_2 = p_2^2/2m$ corrispondenti alle energie di due particelle reali collidenti (gli estremi esterni « fisici » dei diagrammi). Dopo queste operazioni si può sostituire a $-\operatorname{Re} f$ un valore per l'energia nulla, cioè la lunghezza di diffusione $a$ [2]). Avremo così

$$F^{(2)}(P_3, P_4; P_1, P_2) = -\left(\frac{4\pi a}{m}\right)^2 \times$$
$$\times \int \left\{ \frac{1 - \theta(\mathbf{p}') - \theta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}')}{\omega_1 + \omega_2 + 2\mu - \frac{1}{2m}[p'^2 + (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}')^2] + i0 \cdot \operatorname{sign}(p' - p_F)} - \right.$$
$$\left. - \mathrm{P} \frac{2m}{p_1^2 + p_2^2 - p'^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}')^2} \right\} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3}. \qquad (21,13)$$

Il segno P nel secondo termine significa che l'integrale viene considerato nel senso del valore principale; ciò è il risultato della separazione della parte reale dell'integrale mediante la regola (8,11).

---

[1]) Non confondere $f$ in questo paragrafo con la funzione di interazione fra le quasi-particelle!

[2]) Questa sostituzione non poteva essere eseguita nella (21,12) in quanto avrebbe condotto alla divergenza dell'integrale per $\mathbf{p}'$ grandi. Dopo la sottrazione effettuata, invece, l'integrale converge (per $p' \sim p_F$) anche con questa sostituzione, ciò che permette di eseguirla. La sottrazione della sola parte reale dell'integrale (e, rispettivamente, la sostituzione di $U$ con $\operatorname{Re} f$) è stata effettuata per evitare la difficoltà legata alla parte immaginaria dell'ampiezza di diffusione. Infatti, per impulsi piccoli $\operatorname{Re} f$ si sviluppa in potenze pari dell'impulso e $\operatorname{Im} f$ in potenze dispari (vedi III, § 132). Perciò se avessimo tenuto conto della dipendenza di $f$ dall'impulso, ciò avrebbe implicato correzioni dell'ordine relativo di grandezza di $(p_F a)^2$, cioè trascurabili. Quanto alla sostituzione $U \to -4\pi f/m$, essa richiederebbe di tener conto della parte immaginaria di $f$ che conduce a correzioni dell'ordine relativo di grandezza di $p_F a$.

Poiché l'espressione (21,13) è simmetrica rispetto a $P_1$ e $P_2$, entrambi gli integrali nella (21,10) coincidono in modo che

$$[-i\Sigma(P)]_{c,\,d} = \int G^{(0)}(Q)\, F^{(2)}(P,\, Q;\; P,\, Q)\, \frac{d^4Q}{(2\pi)^4}.$$

Sostituendovi il primo termine dalla (21,13), otteniamo che l'integrale in $dq_0$ è diverso da zero se

$$\operatorname{sign}(p' - p_F) = -\operatorname{sign}(q - p_F); \tag{21,14}$$

quindi, i due poli dell'espressione integranda di nuovo si trovano in semipiani diversi di $q_0$. Se sostituiamo, invece, il secondo termine dalla (21,13), soltanto il fattore $G^{(0)}(Q)$ dipenderà da $q_0$, mentre l'integrazione in $dq_0$ va eseguita in base alla formula (7,23) e dà $N^{(0)}(\mathbf{q})$, la funzione di distribuzione delle particelle nel gas perfetto, cioè la funzione a gradini $\theta(\mathbf{q})$. Otteniamo infine (riunendo i contributi di tutti i diagrammi (21,1a-d))

$$\Sigma(\omega,\, \mathbf{p}) = \frac{2\pi}{m}\, n(\mu)\, a + \Sigma^{(2)}(\omega,\, \mathbf{p}), \tag{21,15}$$

dove

$$\Sigma^{(2)}(\omega,\, \mathbf{p}) = \left(\frac{4\pi a}{m}\right)^2 \times$$
$$\times \int \left\{ \frac{[1-\theta(\mathbf{p}')-\theta(\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{p}')]\,[\theta(\mathbf{q})-\theta(\mathbf{p}')]}{\omega+\mu+\frac{1}{2m}[q^2-p'^2-(\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{p}')^2]+i0\cdot\operatorname{sign}(p'-p_F)} - \right.$$
$$\left. - \mathrm{P}\, \frac{2m\theta(\mathbf{q})}{p^2+q^2-p'^2+(\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{p}')^2} \right\} \frac{d^3q\, d^3p'}{(2\pi)^6} \tag{21,16}$$

il fattore $\theta(\mathbf{q}) - \theta(\mathbf{p}')$ a numeratore del primo termine dell'espressione integranda sostituisce $-\operatorname{sign}(q - p_F)$ per la condizione (21,14)).

Osserviamo innanzitutto che $\Sigma$ ha una parte immaginaria che si ricava dalla (21,16) in base alla regola (8,11) ed è data dall'espressione

$$\operatorname{Im}\Sigma(\omega,\, \mathbf{p}) = -\left(\frac{4\pi a}{m}\right)^2 \pi \int \{\theta(\mathbf{q})\,[1-\theta(\mathbf{p}')]\,[1-\theta(\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{p}')] +$$
$$+ [1-\theta(\mathbf{q})]\,\theta(\mathbf{p}')\,\theta(\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{p}')\}\, \delta\left[\omega+\mu+\frac{1}{2m}(q^2-p'^2-\right.$$
$$\left. -(\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{p}')^2)\right] \frac{d^3q\, d^3p'}{(2\pi)^6} \tag{21,17}$$

(l'espressione fra parentesi graffa è stata trasformata in base al fatto che $\theta^2(\mathbf{p}) \equiv \theta(\mathbf{p})$).

Lo spettro energetico delle quasi-particelle viene calcolato mediante la (14,13) come

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m} + \frac{2\pi}{m} n(\mu) a + \Sigma^{(2)}\left(\frac{p^2}{2m} - \mu, \mathbf{p}\right) \qquad (21,18)$$

(in $\Sigma^{(2)}$ si può porre, con la precisione richiesta, $\varepsilon \approx p^2/2m$). La natura complessa di $\Sigma$ significa l'esistenza di uno smorzamento delle eccitazioni ($\mathrm{Im}\,\varepsilon \neq 0$).

La comparsa di questo smorzamento esprime l'instabilità delle quasi-particelle, dovuta alla possibilità reale di un loro decadimento. La quasi-particella può cedere parte della sua energia, per tener conto della quale nasce una coppia di quasi-particelle (particella e buca). Consideriamo, ad esempio, il primo termine fra parentesi graffa sotto il segno di integrale nella (21,17). In accordo con le proprietà della funzione a gradini, questo termine è non nullo se

$$p' > p_F, \quad |\mathbf{q} + \mathbf{p} - \mathbf{p}'| > p_F, \quad q < p_F.$$

Queste disuguaglianze corrispondono al processo in cui la quasi-particella con impulso iniziale $\mathbf{p}$ ($p > p_F$) passa allo stato $\mathbf{p}'$ ($p > p' > p_F$) e, inoltre, l'impulso $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$ viene trasmesso alla particella all'interno della sfera di Fermi (impulso $q < p_F$), che è eccitata fino allo stato con impulso $\mathbf{q} + \mathbf{p} - \mathbf{p}'$ all'esterno di questa sfera; questa transizione è equivalente alla comparsa di due nuove eccitazioni elementari di impulsi $-\mathbf{q}$ (buca) e $\mathbf{q} + \mathbf{p} - \mathbf{p}'$. La legge di conservazione dell'energia in questo processo è espressa dalla funzione $\delta$ nella (21,17), dove $\omega + \mu$ funge da energia iniziale $\varepsilon(\mathbf{p})$ della quasi-particella

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p}') + [\varepsilon(\mathbf{q} + \mathbf{p} - \mathbf{p}') - \varepsilon(\mathbf{q})]$$

(qui è sufficiente porre, in prima approssimazione, $\varepsilon(\mathbf{p}) = p^2/2m$). In accordo con il significato suindicato, l'energia $\varepsilon(\mathbf{p})$ definita da questa uguaglianza corrisponde effettivamente a una quasi-particella all'esterno della sfera di Fermi ($\varepsilon > \mu$).

Analogamente, il secondo termine fra parentesi graffa nella (21,17) compare per processi di generazione di coppia da una buca. Questo termine dà lo smorzamento delle eccitazioni elementari con $\varepsilon < \mu$. Nel linguaggio della tecnica dei diagrammi la possibilità di generazione di una coppia da parte di una quasi-particella è espressa dalla possibilità di tagliare il diagramma della funzione $G$ in due parti, con un attraversamento lungo tre linee continue di cui due sono dirette in un verso e una nell'altro. Nei diagrammi (21,1c-d) sono tali le sezioni passanti fra le due linee tratteggiate.

Il caso di un gas debolmente non perfetto è specifico (rispetto al caso generale del liquido di Fermi arbitrario), nel senso che lo spettro delle quasi-particelle in esso ha significato in tutto il dominio di valori degli impulsi e non soltanto in prossimità della superficie

di Fermi: lo smorzamento delle quasi-particelle (Im $\varepsilon$) risulta essere relativamente piccolo già per il fatto che è piccolo il « parametro di gassosità » $ap_F$. Tuttavia daremo qui il risultato finale dei calcoli soltanto per due casi limite.

In prossimità della superficie di Fermi ($|p - p_F| \ll p_F$) si ottiene

$$\mathrm{Re}\,\varepsilon = \mu + (p - p_F)\, p_F/m^*$$

con $\mu$ della (6,14) e $m^*$ della (6,17). Per lo smorzamento delle quasi-particelle, invece, si ottiene

$$\mathrm{Im}\,\varepsilon = -\frac{1}{\pi m}(p_F a)^2 (p - p_F)^2 \,\mathrm{sign}\,(p - p_F). \qquad (21,19)$$

La proporzionalità di questa espressione al quadrato $(p - p_F)^2$ è di origine ben chiara: un fattore $p - p_F$ compare come larghezza di quel dominio dello spazio degli impulsi (strato stretto sferico) in cui va a finire l'impulso della quasi-particella dopo che essa ha generato la coppia, e l'altro fattore di questo tipo compare come larghezza dello strato in cui nasce la coppia. Notiamo a proposito che questi ragionamenti riguardano anche qualsiasi liquido di Fermi in modo che in prossimità della superficie di Fermi si ha sempre Im $\varepsilon \sim (p - p_F)^2$ [1]).

Per grandi impulsi $p \gg p_F$ (ma $pa \ll 1$) abbiamo

$$\varepsilon = \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{2p_F^2}{3\pi m} p_F a\right) - i\,\frac{p_F p}{3\pi m}(p_F a)^2. \qquad (21,20)$$

In entrambi i casi il rapporto Im $\varepsilon$/Re $\varepsilon$ è piccolo. Il massimo di questo rapporto si ottiene per $p \sim p_F$, ma anche in questo caso esso $\sim (p_F a)^2 \ll 1$.

Infine, diamo il valore della costante di rinormalizzazione della funzione di Green di un gas debolmente non perfetto. Essa si calcola come

$$\frac{1}{Z} = 1 - \frac{\partial \Sigma(\omega, \mathbf{p})}{\partial \omega}\bigg|_{\omega=0,\ p=p_F}$$

e vale

$$Z = 1 - \frac{8 \ln 2}{\pi^2}(p_F a)^2. \qquad (21,21)$$

---

[1]) A temperature non nulle la media di questa grandezza rispetto alla distribuzione termica implica la proporzionalità dello smorzamento al quadrato $T^2$ di cui si è parlato già al § 1.

Capitolo III

# SUPERFLUIDITÀ

## § 22. *Eccitazioni elementari nel liquido di Bose quantistico*

Passiamo ora allo studio dei liquidi quantistici a spettro energetico di tipo assolutamente diverso, che si potrebbe chiamare *tipo Bose* [1]).

Questo spettro è caratterizzato dal fatto che le eccitazioni elementari (non esistenti nello stato fondamentale del liquido) possono comparire e scomparire separatamente. Ma il momento di ogni sistema quantomeccanico (del liquido nel caso in questione) può subire cambiamenti soltanto di un numero intero. Pertanto le eccitazioni elementari che compaiono separatamente a una a una devono avere momento di valore numerico intero e, quindi, obbedire alla statistica di Bose. Comunque ogni liquido quantistico composto di particelle a spin intero (tale è l'isotopo liquido $He^4$) deve possedere uno spettro di questo tipo.

A titolo di confronto ricordiamo che queste eccitazioni possono comparire o scomparire soltanto a coppie nel liquido di Fermi, quando esso viene descritto in termini dello spettro delle eccitazioni elementari non esistenti nello stato fondamentale (vedi la fine del § 1). Questa è la ragione per cui le eccitazioni elementari in questo tipo di spettro possono avere spin semintero.

Nel liquido di Bose quantistico le eccitazioni elementari con piccoli impulsi $p$ (la lunghezza d'onda è grande rispetto alle distanze interatomiche) corrispondono alle onde sonore idrodinamiche ordinarie, cioè rappresentano fononi. Ciò significa che l'energia di queste quasi-particelle è una funzione del loro impulso

$$\varepsilon = up, \tag{22,1}$$

dove $u$ è la velocità del suono nel liquido. Quest'ultima è data dalla formula $u^2 = \partial P/\partial \rho$, dove non occorre precisare che la derivata

---

[1]) La teoria di questi liquidi quantistici è stata creata da *L. D. Landau* nel 1940-41 subito dopo la scoperta di *P. L. Kapitsa* della superfluidità dell'elio liquido. Queste scoperte hanno dato origine allo sviluppo della fisica moderna dei liquidi quantistici.

è calcolata a temperatura $T$ o entropia $S$ costanti in quanto $T \to 0$ così come $S \to 0$ [1]).

Il numero di eccitazioni elementari nel liquido di Bose tende a zero per $T \to 0$, e a temperature basse le quasi-particelle di densità sufficientemente piccola si possono supporre non interagenti mutuamente, cioè costituenti un gas di Bose perfetto. Pertanto, dal punto di vista statistico, la distribuzione d'equilibrio delle eccitazioni elementari nel liquido di Bose è data dalla formula di Bose (a potenziale chimico nullo; vedi la nota alla pag. 20)

$$n(\mathbf{p}) = [e^{\varepsilon(p)/T} - 1]^{-1}. \tag{22,2}$$

Con l'ausilio di questa distribuzione e conoscendo la dipendenza $\varepsilon(p)$ per $p$ piccoli, si possono calcolare le grandezze termodinamiche del liquido a temperature così vicine allo zero assoluto per cui praticamente tutte le eccitazioni elementari esistenti nel liquido abbiano energie piccole, essendo cioè fononi. Si possono scrivere immediatamente le formule corrispondenti a partire dalle espressioni per le grandezze termodinamiche dei solidi alle basse temperature (cfr. V, § 64). La sola differenza è che al posto delle tre direzioni di polarizzazione possibili delle onde sonore nei solidi (una longitudinale e due trasversali) nel liquido ne esiste una sola (longitudinale); pertanto tutte le espressioni per le grandezze termodinamiche devono essere divise per 3. Così, per l'energia libera del liquido abbiamo

$$F = F_0 - V\frac{\pi^2 T^4}{90(\hbar u)^3}, \tag{22,3}$$

dove $F_0$ è l'energia libera allo zero assoluto. L'energia del liquido vale

$$E = E_0 + V\frac{\pi^2 T^4}{30(\hbar u)^3}, \tag{22,4}$$

e il calore specifico

$$C = V\frac{2\pi^2 T^3}{15(\hbar u)^3}; \tag{22,5}$$

esso è proporzionale al cubo della temperatura.

La legge fononica della dispersione (22,1) è valida soltanto perché la lunghezza d'onda della quasi-particella $\hbar/p$ è grande rispetto alle distanze interatomiche. A misura che l'impulso aumenta, la curva $\varepsilon = \varepsilon(p)$ devia, certamente, dalla dipendenza lineare; il suo

[1]) La nozione dei fononi è stata introdotta in V, §§ 71, 72 per le eccitazioni elementari nei solidi. Sottolineiamo che l'impulso di un'eccitazione elementare in un sistema microscopicamente omogeneo — liquido — è il vero impulso e non un quasi-impulso, come nel campo periodico del reticolo cristallino di un corpo solido.

andamento ulteriore dipende dalla legge di interazione concreta fra le molecole del liquido e non può essere definito, quindi, in forma generale.

Nell'elio liquido la legge di dispersione delle eccitazioni elementari ha la forma rappresentata nella fig. 2; dopo la crescita lineare iniziale la funzione $\varepsilon(p)$ raggiunge un massimo, in seguito decresce e per un determinato valore dell'impulso $p_0$ passa attraverso un minimo [1]). In equilibrio termico la maggioranza delle eccitazioni

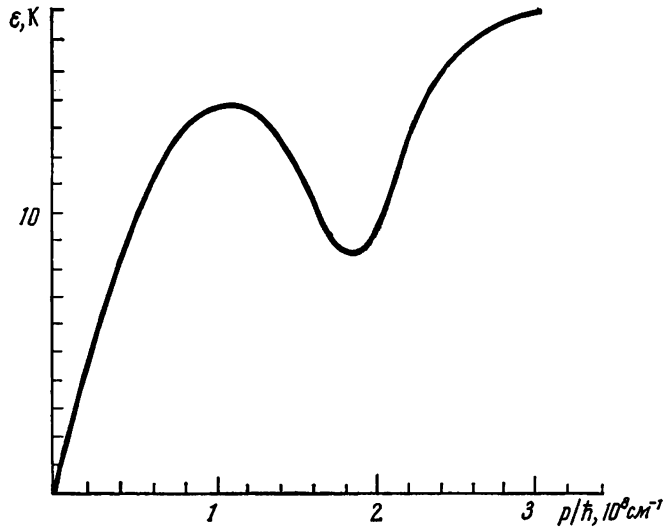



Fig. 2

elementari nel liquido hanno energie nell'intorno dei minimi della funzione $\varepsilon(p)$, cioè nel dominio degli $\varepsilon$ piccoli (l'intorno di $\varepsilon = 0$) e nel dominio del valore di $\varepsilon(p_0)$. Pertanto sono questi domini ad avere importanza sostanziale. In prossimità del punto $p = p_0$ si può sviluppare la funzione $\varepsilon(p)$ in potenze di $p - p_0$. Il termine lineare non esiste nello sviluppo e abbiamo, a meno dei termini del secondo ordine,

$$\varepsilon = \Delta + \frac{(p-p_0)^2}{2m^*}, \tag{22,6}$$

[1]) Questa forma dello spettro, proposta originariamente da *L. D. Landau* (1947) in base all'analisi dei dati sperimentali sulle grandezze termodinamiche dell'elio liquido, in seguito è stata confermata empiricamente dall'esperienza di diffusione dei neutroni.

La teoria qualitativa dello spettro del dato tipo appartiene a *R.P. Feynman* (1954); si veda più avanti la nota alla pag. 442.

dove $\Delta = \varepsilon(p_0)$ e $m^*$ sono costanti. Le quasi-particelle di questo tipo sono dette *rotoni*. Sottolineiamo, tuttavia, che ambedue i tipi di quasi-particelle — fononi e rotoni — corrispondono soltanto a diversi tratti di una medesima curva fra i quali si ha una transizione continua.

I valori empirici dei parametri dello spettro energetico dell'elio liquido (estrapolati per pressione nulla nel caso di densità $\rho = 0{,}145$ g/cm$^3$) sono i seguenti [1]):

$$\begin{aligned} u &= 2{,}4\cdot 10^4 \text{ cm/s}, & \Delta &= 8{,}7 \text{ K}, \\ p_0/\hbar &= 1{,}9\cdot 10^8 \text{ cm}^{-1}, & m^* &= 0{,}16m \ (\mathrm{He}^4). \end{aligned} \tag{22,7}$$

Poiché l'energia del rotone contiene sempre la grandezza $\Delta$ grande rispetto a $T$ — a temperature sufficientemente basse per poter parlare di un « gas rotonico » — si può descrivere quest'ultimo mediante la distribuzione di Boltzmann al posto di quella di Bose. In accordo con ciò, per calcolare la parte rotonica delle grandezze termodinamiche dell'elio liquido, noi partiamo dalla formula per l'energia libera del gas di Boltzmann:

$$F = -NT \ln \frac{eV}{N} \int e^{-\varepsilon/T} d\tau, \quad d\tau = \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$$

(vedi V, § 41). Allora in questa formula si deve intendere con $N$ il numero di rotoni nel liquido. Ma questo numero stesso è definito dalla condizione di equilibrio termodinamico, cioè dalla condizione di minima energia libera. Eguagliando a zero $\partial F/\partial N$, troviamo che il numero di rotoni vale

$$N_r = V \int e^{-\varepsilon/T} d\tau \tag{22,8}$$

(ciò che corrisponde, naturalmente, alla distribuzione di Boltzmann con il potenziale chimico nullo). Il valore corrispondente dell'energia libera è

$$F_r = -VT \int e^{-\varepsilon/T} d\tau.$$

Bisogna sostituire in questa formula l'espressione (22,6). Poiché $p_0^2 \gg m^*T$, allora, integrando in $dp$, si può portare il fattore $p^2$ all'infuori dal segno di integrale rimpiazzandolo con $p_0^2$ con una precisione sufficiente. Integrando l'espressione esponenziale, si può estendere il dominio di integrazione da $-\infty$ a $\infty$. Come risultato otteniamo

$$N_r = \frac{2(m^*T)^{1/2} p_0^2 V}{(2\pi)^{3/2}\hbar^3} e^{-\Delta/T}, \quad F_r = -TN_r. \tag{22,9}$$

---

[1]) Diamo anche il valore del potenziale chimico dell'elio liquido per $T = 0$: $\mu = -7{,}16$ K.

Di qui i contributi dei rotoni nell'entropia e nel calore specifico sono

$$S_r = N_r\left(\frac{3}{2}+\frac{\Delta}{T}\right), \quad C_r = N_r\left(\frac{3}{4}+\frac{\Delta}{T}+\frac{\Delta^2}{T^2}\right). \qquad (22,10)$$

Vediamo che la dipendenza termica della parte rotonica nelle grandezze termodinamiche è essenzialmente esponenziale. Questa è la ragione per cui a temperature sufficientemente basse (più basse all'incirca di 0,8 K per l'elio liquido) la parte rotonica è più piccola della parte fononica, ma a temperature più alte la situazione si capovolge e il contributo rotonico supera quello fononico.

## § 23. *Superfluidità*

Il fluido quantistico a spettro energetico del tipo testé descritto gode di una proprietà sorprendente, detta *superfluidità*, ossia la capacità del liquido di passare per stretti capillari o fenditure senza manifestare viscosità. Iniziamo lo studio del liquido allo zero assoluto quando esso si trova nel suo stato normale, non eccitato.

Consideriamo un fluido passante per un capillare a velocità costante **v**. La presenza della viscosità consisterebbe in ciò: grazie all'attrito contro le pareti del tubo e all'attrito all'interno del fluido stesso si produrrebbe dissipazione dell'energia cinetica del fluido e il flusso rallenterebbe gradualmente.

Sarà più comodo considerare il flusso in un sistema di coordinate che si muove con il fluido. In questo sistema l'elio è in quiete, mentre le pareti del capillare si muovono a velocità $-\mathbf{v}$. In presenza di viscosità l'elio in quiete dovrebbe anch'esso cominciare a muoversi. Fisicamente è evidente che il trascinamento del fluido da parte delle pareti del tubo non può implicare il movimento del fluido come tutt'uno. La comparsa del moto deve iniziare da un'eccitazione graduale dei movimenti interni, cioè dalla comparsa di eccitazioni elementari nel liquido.

Supponiamo che nel liquido esista un'eccitazione elementare di impulso **p** ed energia $\varepsilon(p)$. Allora l'energia $E_0$ del liquido (nel sistema di coordinate in cui prima era in quiete) sarà uguale all'energia di questa eccitazione $\varepsilon$ e il suo impulso $\mathbf{P}_0$ uguale all'impulso **p**. Torniamo ora al sistema di coordinate in cui il capillare si trova a riposo. In accordo con le note formule meccaniche di trasformazione dell'energia e dell'impulso, in questo sistema abbiamo i seguenti valori per l'energia $E$ e l'impulso $P$ del liquido:

$$E = E_0 + \mathbf{P}_0\mathbf{v} + \frac{Mv^2}{2}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + M\mathbf{v}, \qquad (23,1)$$

dove $M$ è la massa del liquido. Rimpiazzando $E_0$, $\mathbf{P}_0$ con $\varepsilon$, $\mathbf{p}$, scriviamo

$$E = \varepsilon + \mathbf{pv} + \frac{Mv^2}{2}. \tag{23,2}$$

Il termine $Mv^2/2$ rappresenta l'energia cinetica iniziale del liquido in moto; quanto al termine $\varepsilon + \mathbf{pv}$, esso esprime la variazione dell'energia grazie alla comparsa dell'eccitazione. Questa variazione deve essere negativa in quanto l'energia del liquido in moto deve diminuire

$$\varepsilon + \mathbf{pv} < 0.$$

Per un dato $p$ la grandezza a primo membro della disuguaglianza ha il valore più piccolo per $\mathbf{p}$ e $\mathbf{v}$ antiparalleli; perciò in ogni caso si deve avere $\varepsilon - pv < 0$, cioè

$$v > \frac{\varepsilon}{p}. \tag{23,3}$$

Questa disuguaglianza deve essere verificata almeno per certi valori dell'impulso $p$ dell'eccitazione elementare. Pertanto possiamo ottenere la condizione di comparsa possibile delle eccitazioni nel liquido passante per il capillare dopo aver trovato il minimo del rapporto $\varepsilon/p$. Dal punto di vista geometrico il rapporto $\varepsilon/p$ rappresenta la tangente dell'angolo d'inclinazione della retta tracciata dall'origine delle coordinate (nel piano $p$, $\varepsilon$) verso un punto della curva $\varepsilon = \varepsilon(p)$. Il suo termine minimo sarà definito, evidentemente, dal punto in cui la retta tracciata dall'origine delle coordinate è tangente alla curva. Se questo minimo è diverso da zero, allora per velocità del flusso non troppo grandi nel liquido non possono comparire eccitazioni. Ciò significa che il suo flusso non si rallenterà, cioè che si verificherà il fenomeno della superfluidità.

La condizione di superfluidità ottenuta si riduce di fatto all'ipotesi che la curva $\varepsilon = \varepsilon(p)$ non tocchi l'asse delle ascisse nell'origine delle coordinate (a prescindere dall'eventualità poco probabile che nel suo andamento ulteriore essa tocchi questo asse). Perciò ogni spettro in cui le eccitazioni, sufficientemente piccole, siano fononi condurrà infatti alla superfluidità.

Consideriamo ora lo stesso liquido a temperatura diversa dallo zero assoluto (anche se vicina ad esso). In questo caso il liquido non si trova più nello stato fondamentale e contiene eccitazioni. I ragionamenti sopra citati restano di per sé validi, poiché in essi non è stato tenuto conto del fatto che il liquido si trovava inizialmente nello stato fondamentale. Il movimento del liquido relativamente alle pareti del tubo, essendo soddisfatta la detta condizione, non potrà implicare, come prima, la comparsa di eccitazioni elementari nuove.

Tuttavia dobbiamo precisare come si comporteranno le eccitazioni già esistenti nel liquido.

Supponiamo a tal fine che il « gas di quasi-particelle » si muova come un tutt'uno di moto traslatorio a velocità **v** relativamente al liquido. La funzione di distribuzione per il gas moventesi come un tutt'uno si ottiene dalla funzione di distribuzione $n(\varepsilon)$ per il gas in quiete sostituendovi l'energia $\varepsilon$ della particella con la grandezza $\varepsilon - \mathbf{pv}$, dove **p** è l'impulso della particella. Per un gas ordinario questa circostanza non consegue direttamente dal principio di relatività di Galileo e si dimostra semplicemente passando da un sistema di coordinate a un altro. Nel caso considerato, invece, queste considerazioni sono inapplicabili in quanto il gas di quasi-particelle si muove non nel vuoto, ma « attraverso il liquido ». Ciononostante, l'affermazione resta valida, come deriva dai ragionamenti seguenti.

Supponiamo che il gas di eccitazioni si muova relativamente al liquido a velocità **v**. Consideriamo un sistema di coordinate in cui il gas come un tutt'uno è in quiete, mentre il liquido si muove rispettivamente a velocità $-\mathbf{v}$ (sistema $K$). Secondo la formula di trasformazione (23,1) l'energia $E$ del liquido nel sistema $K$ è legata all'energia $E_0$ nel sistema in cui il liquido è in quiete (sistema $K_0$) dalla relazione

$$E = E_0 - \mathbf{P}_0\mathbf{v} + \frac{Mv^2}{2}.$$

Supponiamo che nel liquido compaia un'eccitazione elementare di energia $\varepsilon(p)$ (nel sistema $K_0$). Allora l'energia supplementare del liquido nel sistema $K$ sarà $\varepsilon - \mathbf{pv}$, ciò che dimostra l'affermazione fatta [1]).

Quindi, l'impulso completo del gas di quasi-particelle (riferito all'unità di volume) sarà

$$\mathbf{P} = \int \mathbf{p} n (\varepsilon - \mathbf{pv})\, d\tau.$$

Supponiamo che la velocità **v** sia piccola, e sviluppiamo l'espressione integranda in potenze di **pv**. Il termine di ordine zero scompare (integrando sulle direzioni del vettore **p**) e resta

$$\mathbf{P} = -\int \mathbf{p}(\mathbf{pv}) \frac{dn(\varepsilon)}{d\varepsilon}\, d\tau,$$

ossia, dopo aver calcolato la media rispetto alle direzioni del vettore **p**,

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{v}}{3} \int \left(-\frac{dn}{d\varepsilon}\right) p^2\, d\tau. \qquad (23,4)$$

---

[1]) Per le quasi-particelle nel liquido di Bose $n(\varepsilon)$ rappresenta la distribuzione (22,2). Rivolgiamo l'attenzione sul fatto che la condizione di superfluidità ($v < \varepsilon/p$) coincide esattamente con la condizione che garantisce la positività e la finitezza dell'espressione $n(\varepsilon - \mathbf{pv})$ per tutte le energie.

Vediamo soprattutto che il movimento del gas di quasi-particelle è accompagnato dal trasporto di una certa massa: la massa efficace dell'unità di volume di gas è determinata dal coefficiente di proporzionalità fra l'impulso **P** e la velocità **v** nella formula (23,4). D'altra parte, quando il liquido scorre in un capillare, ad esempio, niente impedisce alle quasi-particelle di urtare contro le pareti del tubo e di scambiare con esse l'impulso. Come risultato il gas di eccitazioni sarà arrestato, come si verificherebbe con qualsiasi gas normale passante per un capillare.

Siamo giunti così al risultato fondamentale seguente. A temperature diverse da zero una parte della massa del liquido si comporterà come un liquido viscoso normale che si « appiccica » in moto alle pareti del condotto; la parte restante della massa si comporterà, invece, come un liquido superfluido privo di viscosità. Il fatto essenziale è che fra queste due parti della massa liquida, che si muovono « l'una attraverso l'altra », non esiste attrito, vale a dire che non si produce la trasmissione d'impulso da una all'altra. Infatti, abbiamo già ottenuto l'esistenza stessa di questo movimento reciproco di una parte della massa liquida relativamente all'altra considerando l'equilibrio statistico nel gas di eccitazioni in moto uniforme. Ma se un certo movimento relativo può prodursi nello stato di equilibrio termico, ciò significa che esso non viene accompagnato da attrito.

Sottolineiamo che considerare il liquido come « miscela » delle sue due « parti », normale e superfluida, non rappresenta altro che un'espressione comoda per la descrizione dei fenomeni che si verificano nel liquido quantistico; ciò non significa affatto che si può separare realmente il liquido in due parti. Come ogni altra descrizione dei fenomeni quantistici in termini classici, questo modo non è completamente adeguato. In realtà è più corretto dire che nel liquido di Bose quantistico possono prodursi contemporaneamente due moti, ciascuno dei quali è legato alla sua massa efficace (cosicché la somma di queste masse è uguale alla massa reale completa del liquido). Uno di questi moti è « normale », cioè gode delle stesse proprietà del moto di un liquido viscoso ordinario; l'altro, invece, è « superfluido ». Entrambi questi moti si producono senza trasmissione d'impulso dall'uno all'altro.

Quindi, dal punto di vista idrodinamico, la densità del liquido di Bose può essere rappresentata sotto forma della somma $\rho = \rho_n + \rho_s$ delle parti normale e superfluida, ciascuna delle quali è legata alla sua velocità idrodinamica rispettiva: $\mathbf{v}_n$ e $\mathbf{v}_s$. La potenzialità è una proprietà importante del movimento superfluido:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}_s = 0. \tag{23,5}$$

Questa proprietà è l'espressione macroscopica del fatto che le eccitazioni elementari di grande lunghezza d'onda (cioè di impulsi piccoli) sono quanti sonori, ossia fononi. Pertanto l'idrodinamica macro-

scopica del movimento superfluido non deve ammettere altre vibrazioni, tranne le vibrazioni sonore [1]); ciò è garantito fra l'altro dalla condizione (23,5) (alla cui giustificazione noi torniamo ancora al § 26) [2]).

Per $T = 0$ la parte normale della densità è $\rho_n = 0$; il liquido può eseguire soltanto il movimento superfluido. A temperature diverse da zero $\rho_n$ è data dalla formula (23,4):

$$\rho_n = \frac{1}{3} \int \left( -\frac{dn}{d\varepsilon} \right) p^2 \, d\tau. \tag{23,6}$$

Per calcolare il contributo fononico in $\rho_n$, poniamo nella (23,6) $\varepsilon = up$:

$$(\rho_n)_f = -\frac{1}{3u} \int_0^\infty \frac{dn}{dp} p^2 \frac{4\pi p^2 \, dp}{(2\pi\hbar)^3}$$

e dopo integrazione per parti troviamo

$$(\rho_n)_f = \frac{4}{3u} \int_0^\infty np \frac{4\pi p^2 \, dp}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{4}{3u^2} \int \varepsilon n \, d\tau.$$

L'integrale rimanente qui non rappresenta altro che l'energia dell'unità di volume del gas fononico; ricavando questa grandezza dalla (22,4), otteniamo infine

$$(\rho_n)_f = \frac{4E_f}{3u^2 V} = \frac{2\pi^2 T^4}{45\hbar^3 u^5}. \tag{23,7}$$

Per calcolare, invece, il contributo rotonico in $\rho_n$, osserviamo quanto segue: poiché i rotoni si possono descrivere mediante la distribuzione di Boltzmann, allora per essi $dn/d\varepsilon = -n/T$, e dalla (23,6) ricaviamo

$$(\rho_n)_r = \frac{1}{3T} \int p^2 n \, d\tau = \frac{\overline{p^2}}{3T} \frac{N_r}{V}.$$

Ponendo, con precisione sufficiente, $\overline{p^2} = p_0^2$ e ricavando $N_r$ dalla (22,9), otteniamo

$$(\rho_n)_r = \frac{p_0^2 N_r}{3TV} = \frac{2\,(m^*)^{1/2}\, p_0^4}{3\,(2\pi)^{3/2}\, T^{1/2} \hbar^3} e^{-\Delta T}. \tag{23,8}$$

Alle temperature più basse il contributo fononico in $\rho_n$ è grande rispetto a quello rotonico. Essi diventano uguali pressappoco per

---

[1]) È supposto che il liquido sia illimitato. In presenza di superficie libera sono possibili anche delle onde capillari superficiali (ciò conduce a una determinata dipendenza termica della tensione superficiale; vedi il problema 1).

[2]) Per uno studio più dettagliato dell'idrodinamica del liquido superfluido vedi un altro volume del presente Corso (volume VI).

0,6 K, e per temperature più elevate il contributo rotonico diventa prevalente.

Al crescere della temperatura una parte sempre più grande della massa liquida diventa normale. Nel punto in cui si ottiene l'uguaglianza $\rho_n = \rho$ la proprietà di superfluidità scompare completamente. Questo punto, detto *λ-punto* del liquido, rappresenta un punto di transizione di fase di seconda specie [1]). Quanto alle formule quantitative (23,7-8), esse, ovviamente, sono inapplicabili nell'intorno del λ-punto, dove la concentrazione di quasi-particelle è così grande che la stessa nozione di esse in misura notevole perde senso.

Soffermiamoci ancora sulla questione inerente al comportamento degli atomi di impurità sciolte nell'elio liquido; la concentrazione di queste impurità è supposta così piccola che i loro atomi si possono considerare come non interagenti gli uni con gli altri (*L. D. Landau, I. Ja. Pomerančuk*, 1948).

La presenza di un atomo estraneo nel liquido implica la comparsa di una diramazione nuova dello spettro energetico, corrispondente al passaggio di questo atomo attraverso il liquido; è ovvio che, data la forte interazione fra l'atomo dell'impurità e gli atomi del liquido, questo movimento rappresenta in realtà un'azione comune cui prendono parte anche gli atomi del liquido. A questo movimento si può attribuire un certo impulso risultante **p** che si conserva. Quindi, nel liquido compaiono quasi-particelle di tipo nuovo (di numero uguale al numero di atomi dell'impurità), la cui energia $\varepsilon_{\text{im}}(p)$ è una funzione dell'impulso. Le energie di queste quasi-particelle in equilibrio termico saranno concentrate in prossimità del più piccolo dei minimi della funzione $\varepsilon_{\text{im}}(p)$. Infatti, si tratta dell'impurità dell'isotopo $He^3$, e i dati empirici mostrano che questo minimo si trova per $p = 0$; nel suo intorno l'energia della quasi-particella ha la forma

$$\varepsilon_{\text{im}}(p) = \frac{p^2}{2m^*_{\text{im}}} \tag{23,9}$$

con la massa efficace $m^*_{\text{im}} = 2{,}8$ masse dell'atomo $He^3$.

Le quasi-particelle di impurità interagiscono con i fononi e i rotoni entrando in collisione con essi e, quindi, appartengono alla composizione della parte normale del liquido. Poiché la concentrazione di queste quasi-particelle è piccola, la loro distribuzione termica

---

[1]) L'elio liquido alle temperature al di sotto di questo punto è detto elio II. I λ-punti formano una linea sul diagramma delle fasi nel piano $P$, $T$. Questa linea interseca la linea di equilibrio fra il liquido e il vapore alla temperatura di 2,19 K.

è rappresentata da quella di Boltzmann e il loro contributo in $\rho_n$ (definito dalla (23,6)) è dato dalla formula

$$(\rho_n)_{\text{im}} = \frac{N_{\text{im}}}{V}\frac{\overline{p^2}}{3T} = \frac{N_{\text{im}}}{V} m^*_{\text{im}}, \tag{23,10}$$

dove $N_{\text{im}}/V$ è il numero di atomi dell'impurità nell'unità di volume.

## PROBLEMI

1. Trovare la legge limite della dipendenza dalla temperatura del coefficiente di tensione superficiale $\alpha$ dell'elio liquido in prossimità dello zero assoluto (*K. R. Atkins*, 1953).

*Soluzione.* Il coefficiente $\alpha$ è l'energia libera dell'unità di superficie del liquido (vedi V, la formula (154,6)). Questa grandezza si calcola in base alla formula (64,1) del volume V, nella quale le frequenze $\omega_\alpha$ sono riferite ora alle vibrazioni superficiali. Nel caso bidimensionale, il passaggio dalla somma all'integrazione (in vettori d'onda delle vibrazioni) va eseguito introducendo il fattore $d^2k/(2\pi)^2$ o $2\pi k\, dk/(2\pi)^2$. L'integrazione per parti dà

$$\alpha = \alpha_0 + T\int \ln(1-e^{-\hbar\omega/T})\frac{k\,dk}{2\pi} = \alpha_0 - \frac{\hbar}{4\pi}\int \frac{k^2\,d\omega}{e^{\hbar\omega/T}-1}$$

($\alpha_0$ è la tensione superficiale per $T = 0$). A temperature sufficientemente basse hanno importanza soltanto le vibrazioni a frequenze piccole, cioè a lunghezze d'onda grandi. Queste vibrazioni rappresentano le onde capillari idrodinamiche per le quali $\omega^2 = \alpha k^3/\rho \approx \alpha_0 k^3/\rho$, dove $\rho$ è la densità del liquido. Pertanto

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{\hbar}{4\pi}\left(\frac{\rho}{\alpha_0}\right)^{2/3}\int_0^\infty \frac{\omega^{4/3}\,d\omega}{e^{\hbar\omega/T}-1}$$

(la convergenza rapida dell'integrale permette di rendere infinito il limite superiore). Il calcolo dell'integrale (vedi la nota al § 58, V) dà

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{T^{7/3}\rho^{2/3}}{4\pi\hbar^{4/3}\alpha_0^{2/3}}\,\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)\zeta\left(\frac{7}{3}\right) = \alpha_0 - 0{,}13\frac{T^{7/3}\rho^{2/3}}{\hbar^{4/3}\alpha_0^{2/3}}.$$

Questo risultato riguarda l'He$^4$ liquido a temperature così basse che tutta la massa del liquido può essere considerata superfluida [1]).

2. Trovare la legge di dispersione $\varepsilon_{\text{im}}(\mathbf{p})$ per le particelle di impurità in un liquido superfluido in moto se questa legge $\varepsilon^{(0)}_{\text{im}}(p)$ è nota per il liquido in quiete (*J. Bardeen, G. Baym, D. Pines*, 1967).

*Soluzione.* Dopo aver aggiunto al liquido in quiete (per $T = 0$) un atomo di impurità (di massa $m$) di impulso $\mathbf{p}_0$ la sua energia e il suo impulso (nel sistema di coordinate in cui il liquido inizialmente era in quiete) sono $E_0 = \varepsilon^{(0)}_{\text{im}}(p_0)$, $\mathbf{P}_0 = \mathbf{p}_0$. Nel sistema di coordinate, invece, in cui il liquido si muove a velocità $\mathbf{v}$, secondo la (23,1) abbiamo

$$E = \varepsilon^{(0)}_{\text{im}}(p_0) + \mathbf{p}_0\mathbf{v} + \frac{1}{2}(M+m)v^2, \qquad \mathbf{P} = \mathbf{p}_0 + (M+m)\mathbf{v}.$$

---

[1]) Nel liquido di Fermi (He$^3$ liquido) le onde capillari del tipo considerato (così come le onde volumetriche del suono normale) non esistono a causa di un aumento indefinito della viscosità per $T \to 0$.

Di qui si vede che le variazioni dell'energia e dell'impulso del liquido in moto con un atomo di impurità associato sono

$$\varepsilon_{\mathrm{im}} = \varepsilon_{\mathrm{im}}^{(0)}(p_0) + \mathbf{p}_0\mathbf{v} + \frac{mv^2}{2}, \qquad \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + m\mathbf{v}.$$

Esprimendo $\varepsilon_{\mathrm{im}}$ in funzione di $\mathbf{p}$, troviamo

$$\varepsilon_{\mathrm{im}}(\mathbf{p}) = \varepsilon_{\mathrm{im}}^{(0)}(\mathbf{p} - m\mathbf{v}) + \mathbf{p}\mathbf{v} - \frac{mv^2}{2}.$$

Per piccoli valori di $v$, per lo spettro $\varepsilon_{\mathrm{im}}^{(0)}(p)$ della forma (23,9) abbiamo, a meno dei termini del primo ordine,

$$\varepsilon_{\mathrm{im}}(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m_{\mathrm{im}}^*} + \mathbf{v}\mathbf{p}\left(1 - \frac{m}{m_{\mathrm{im}}^*}\right).$$

## § 24. *Fononi nel liquido*

Passando dal quadro classico delle onde sonore alla rappresentazione quantistica dei fononi, le grandezze termodinamiche (densità, velocità del fluido ecc.) vengono sostituite con operatori che si esprimono in funzione degli operatori $\hat{c}_{\mathbf{k}}$, $\hat{c}_{\mathbf{k}}^+$ di distruzione e creazione dei fononi. Deduciamo le formule che forniscono queste espressioni.

Ricordiamo che nella descrizione classica di un'onda sonora la densità del liquido è sottoposta a piccole vibrazioni di frequenza e vettore d'onda legati dalla relazione $\omega = uk$. La velocità del liquido $\mathbf{v}$ ha lo stesso ordine di grandezza infinitesimale che la parte variabile della densità $\rho' = \rho - \rho_0$ (essendo $\rho_0$ la densità in equilibrio). Il movimento del liquido nell'onda è potenziale, cioè può essere descritto dal potenziale scalare della velocità $\varphi$ che determina la velocità secondo la relazione

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi. \tag{24,1}$$

La velocità e la densità sono legate reciprocamente dall'equazione di continuità $\partial\rho'/\partial t = -\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v}) \approx -\rho_0\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}$, ossia

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} = -\rho_0\Delta\varphi. \tag{24,2}$$

L'energia del liquido in un'onda sonora è data dall'integrale

$$E = \int\left(\frac{\rho_0\mathbf{v}^2}{2} + \frac{u^2\rho'^2}{2\rho_0}\right)d^3x. \tag{24,3}$$

Il primo termine dell'espressione integranda è la densità dell'energia cinetica e il secondo dell'energia interna del liquido; ambedue i termini sono quadratici nelle grandezze piccole $\mathbf{v}$ e $\rho'$.

L'ulteriore procedimento di quantizzazione si potrebbe effettuare completamente in modo analogo, come è stato fatto per i fononi nei cristalli solidi (vedi V, § 72). Tuttavia, seguiremo qui un'altra via

che fornisce alcuni momenti metodologici assai istruttivi. Consideriamo dapprima gli operatori di densità e velocità del liquido, espressi in funzione di variabili microscopiche, cioè mediante le coordinate delle particelle.

Nella teoria classica la densità $\rho$ e la densità del flusso della massa liquida $\mathbf{j}$ possono essere rappresentate dalle somme

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_a m_a \delta(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}), \qquad \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_a \mathbf{p}_a \delta(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}),$$

calcolate su tutte le particelle ($\mathbf{r}_a$ e $\mathbf{p}_a$ sono raggi vettori e impulsi delle particelle); gli integrali di queste funzioni in un volume qualsiasi danno la massa e l'impulso completi del liquido in questo volume. Passando alla teoria quantistica, queste funzioni vengono sostituite dagli operatori corrispondenti. L'operatore di densità ha la stessa forma

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \sum_a m_a \delta(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}), \tag{24,4}$$

mentre l'operatore di densità del flusso è

$$\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_a \{\hat{\mathbf{p}}_a \delta(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}) + \delta(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}) \hat{\mathbf{p}}_a\}, \tag{24,5}$$

dove $\hat{\mathbf{p}}_a = -i\hbar\nabla_a$ rappresenta l'operatore di impulso della particella [1]).

Troviamo la regola di commutazione fra gli operatori $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r})$ e $\hat{\rho}(\mathbf{r}')$, calcolati nei punti $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$; in questo caso si può considerare, per brevità, un solo termine nelle somme (24,4-5) in quanto gli operatori corrispondenti a diverse particelle sono commutativi. Sviluppando il commutatore, gli operatori della forma $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \nabla_1 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}')$ si trasformano nel seguente modo:

$$\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \nabla_1 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) (\nabla\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) + \\ + \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}') \nabla_1,$$

dove l'espressione $(\nabla\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))$ del primo termine non significa altro che il gradiente della funzione $\delta$; dato che questo termine con-

---

[1]) Supponiamo, per semplicità, che il sistema sia composto di una sola particella. La media dell'operatore $\hat{\rho}(\mathbf{r}) = m\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})$ rispetto allo stato con funzione d'onda $\psi(\mathbf{r}_1)$ dà $\int \psi^*(\mathbf{r}_1) \hat{\rho} \psi(\mathbf{r}_1) d^3x_1 = m \mid \psi(\mathbf{r}) \mid^2$, come deve essere. Analogamente, la media dell'operatore $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r})$ fornisce l'espressione corretta per la densità del flusso

$$(\hbar/2i) \{\psi^*(\mathbf{r}) \nabla\psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r}) \nabla\psi^*(\mathbf{r})\}.$$

tiene il fattore $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})$ vi si può scrivere $(\nabla\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))$ al posto di $(\nabla_1\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'))$. Come risultato otteniamo

$$\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r})\,\hat{\rho}(\mathbf{r}') - \hat{\rho}(\mathbf{r}')\,\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = -i\hbar\hat{\rho}\,(\nabla\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')). \qquad (24,6)$$

Introduciamo ora, al posto di $\hat{\mathbf{j}}$, l'operatore di velocità dei liquidi $\hat{\mathbf{v}}$ in base alla definizione

$$\hat{\mathbf{j}} = \frac{1}{2}(\hat{\rho}\hat{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{v}}\hat{\rho}).$$

La regola di commutazione degli operatori $\hat{\rho}$ e $\hat{\mathbf{v}}$ è determinata dalla condizione che per il commutatore di $\hat{\rho}$ e $\hat{\mathbf{j}}$ si abbia l'espressione (24,6). È facile provare che a tal fine occorre porre

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r})\,\hat{\rho}(\mathbf{r}') - \hat{\rho}(\mathbf{r}')\,\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r}) = -i\hbar\,(\nabla\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))$$

(tenendo intanto conto della commutatività evidente degli operatori $\hat{\rho}(\mathbf{r})$ e $\hat{\rho}(\mathbf{r}')$). Infine, ponendo $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r}) = \nabla\hat{\varphi}(\mathbf{r})$, otteniamo la seguente regola di commutazione fra gli operatori di densità e di potenziale della velocità:

$$\hat{\varphi}(\mathbf{r})\,\hat{\rho}'(\mathbf{r}') - \hat{\rho}'(\mathbf{r}')\,\hat{\varphi}(\mathbf{r}) = -i\hbar\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \qquad (24,7)$$

(è evidente che al posto di $\hat{\rho}$ si può scrivere qui l'operatore $\hat{\rho}' = \hat{\rho} - \rho_0$ della parte variabile della densità). La regola (24,7) è analoga alla regola di commutazione fra la coordinata e l'impulso della particella; in questo senso le grandezze $\rho'$ e $\varphi$ fungono nel caso considerato da « coordinate » ed « impulsi » generalizzati canonicamente coniugati.

Utilizzando le espressioni (24,4-5) per stabilire la regola (24,7), scriviamo ora gli operatori $\hat{\varphi}$ e $\hat{\rho}'$ nella rappresentazione della seconda quantizzazione (esprimendoli cioè in funzione degli operatori di distruzione e creazione dei fononi) chiedendo in questo caso che essi soddisfino la regola (24,7). A tal fine scriviamo

$$\hat{\varphi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}(A_{\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + A^*_{\mathbf{k}}\hat{c}^+_{\mathbf{k}}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}})$$

a coefficienti $A_{\mathbf{k}}$ per il momento indeterminati; la sommatoria va estesa a tutti i valori che il vettore d'onda descrive in un volume $V$ grande ma finito [1]). Gli operatori $\hat{c}_{\mathbf{k}}$ e $\hat{c}^+_{\mathbf{k}}$ verificano le regole

[1]) A differenza degli operatori $\psi$ delle particelle, l'operatore di una grandezza reale $\varphi$ è hermitiano e contiene contemporaneamente gli operatori di annichilazione e creazione dei fononi. Ricordiamo che questa proprietà (così come la stessa proprietà degli operatori di campo in elettrodinamica quantistica) è dovuta alla non conservazione del numero di « particelle » nel campo fononico.

di commutazione di Bose

$$\hat{c}_{\mathbf{k}}\hat{c}^{+}_{\mathbf{k}'} - \hat{c}^{+}_{\mathbf{k}'}\hat{c}_{\mathbf{k}} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \tag{24,8}$$

Per gli ulteriori rimandi ricordiamo che gli elementi matriciali non nulli di questi operatori sono

$$\langle n_{\mathbf{k}} - 1 | \hat{c}_{\mathbf{k}} | n_{\mathbf{k}} \rangle = \langle n_{\mathbf{k}} | \hat{c}^{+}_{\mathbf{k}} | n_{\mathbf{k}} - 1 \rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}}}, \tag{24,9}$$

dove $n_{\mathbf{k}}$ sono i numeri di riempimento degli stati fononici.

Tuttavia, nel seguito avremo bisogno dell'operatore di Heisenberg $\hat{\varphi}(t, \mathbf{r})$, anziché di quello di Schrödinger $\hat{\varphi}(\mathbf{r})$. Esso si ottiene semplicemente da $\hat{\varphi}(\mathbf{r})$ introducendo i fattori $\exp(\pm i\omega t)$ a frequenze $\omega = uk$ in ciascun termine della somma

$$\hat{\varphi}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \left( A_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{kr} - kut)} + A^{*}_{\mathbf{k}} \hat{c}^{+}_{\mathbf{k}} e^{-i(\mathbf{kr} - kut)} \right)$$

(cfr. quanto detto a questo proposito per gli operatori $\psi$ all'inizio del § 9). Quanto all'operatore di densità $\hat{\rho}'(t, \mathbf{r})$, esso deve essere connesso all'operatore $\hat{\varphi}(t, \mathbf{r})$ mediante la relazione (24,2) e, di conseguenza, viene dato dalla stessa somma coi fattori $iA_{\mathbf{k}}\rho_0 k/u$ al posto di $A_{\mathbf{k}}$. In seguito i fattori $A_{\mathbf{k}}$ si devono determinare tali che si verifichi la regola di commutazione (24,7). Infine, otteniamo le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(t, \mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{\hbar u}{2V\rho_0 k} \right)^{1/2} \left( \hat{c}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{kr} - ukt)} + \hat{c}^{+}_{\mathbf{k}} e^{-i(\mathbf{kr} - ukt)} \right), \\ \hat{\rho}'(t, \mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{k}} i \left( \frac{\rho_0 \hbar k}{2Vu} \right)^{1/2} \left( \hat{c}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{kr} - ukt)} - \hat{c}^{+}_{\mathbf{k}} e^{-i(\mathbf{kr} - ukt)} \right). \end{aligned} \tag{24,10}$$

Infatti, sostituendo queste espressioni nel primo membro della regola (24,7) e tenendo conto della (24,8), otteniamo la funzione $\delta$ cercata

$$-i\hbar \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \left( \hat{c}_{\mathbf{k}}\hat{c}^{+}_{\mathbf{k}} - \hat{c}^{+}_{\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{k}} \right) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} =$$

$$= -\frac{i\hbar}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \to -\frac{i\hbar}{V} \int e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \frac{V\, d^3k}{(2\pi)^3} = -i\hbar\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

È facile convincersi anche che l'operatore hamiltoniano del liquido, che si ottiene rimpiazzando $\mathbf{v}$ e $\rho'$ con $\hat{\mathbf{v}} = \nabla\hat{\varphi}$ e $\hat{\rho}'$, nell'integrale (24,3) ha, come deve, la forma

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} u\hbar k \left( \hat{c}^{+}_{\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right);$$

i suoi autovalori sono uguali a $\Sigma u\hbar k\,(n_k + 1/2)$ in accordo con la rappresentazione dei fononi di energie $\varepsilon = u\hbar k$.

L'espressione (24,3) per l'energia del liquido nell'onda sonora rappresenta i primi termini (dopo quello zero) dello sviluppo dell'espressione esatta

$$E = \int \left[\frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + \rho e(\rho)\right] d^3x$$

(dove $e(\rho)$ è l'energia interna dell'unità di massa del liquido). Questo integrale, nel quale $\mathbf{v}$ e $\rho$ sono sostituiti dagli operatori $\hat{\mathbf{v}} = \nabla\hat{\varphi}$ e $\hat{\rho} = \rho_0 + \hat{\rho}'$ con $\hat{\varphi}$ e $\hat{\rho}'$ ricavati dalla (24,10), funge da operatore hamiltoniano esatto

$$\hat{H} = \int \left[\frac{\hat{\mathbf{v}}\hat{\rho}\hat{\mathbf{v}}}{2} + \hat{\rho} e(\hat{\rho})\right] d^3x \qquad (24,11)$$

(l'operatore dell'energia cinetica è scritto nella forma simmetrizzata $\hat{\mathbf{v}}\hat{\rho}\hat{\mathbf{v}}/2$ per essere hermitiano). In questo caso è importante che $\rho$ e $\varphi$ rappresentino « coordinate ed impulsi generalizzati » canonicamente coniugati mediante i quali deve essere espresso l'operatore hamiltoniano. Ciò si vede dal fatto che la regola di commutazione (24,7), cui soddisfano gli operatori (24,10), è esatta in quanto per la sua deduzione non è stato mai supposto che le oscillazioni fossero piccole.

I termini di grado più elevato (di terzo ecc.) dello sviluppo di questo operatore hamiltoniano esprimono la natura anarmonica delle vibrazioni sonore, mentre in termini di rappresentazione fononica descrivono l'interazione fra i fononi. Questi termini hanno elementi matriciali per le transizioni con variazione simultanea di alcuni numeri di riempimento dei fononi e, quindi, fungono da perturbazione che genera processi disparati di diffusione e decadimento dei fononi. In questo caso gli elementi matriciali degli stessi operatori $\hat{c}_k$ e $\hat{c}_k^+$ hanno, ovviamente, la precedente forma (24,9), poiché (come si fa sempre nella teoria delle perturbazioni) si usa una rappresentazione in cui l'operatore hamiltoniano imperturbato è diagonale. Diamo qui le espressioni per i termini del terzo e del quarto ordine:

$$\hat{H}^{(3)} = \int \left[\frac{\hat{\mathbf{v}}\hat{\rho}'\hat{\mathbf{v}}}{2} + \left(\frac{d}{d\rho_0}\frac{u^2}{\rho_0}\right)\frac{\hat{\rho}'^3}{6}\right] d^3x, \qquad (24,12)$$

$$\hat{H}^{(4)} = \frac{1}{24}\left(\frac{d^2}{d\rho_0^2}\frac{u^2}{\rho_0}\right)\int \hat{\rho}'^4\, d^3x. \qquad (24,13)$$

## § 25. *Gas di Bose quasi-perfetto degenere*

Le proprietà fondamentali dello spettro energetico del tipo di Bose sono evidenti in un modello di gas di Bose debolmente non perfetto a temperature vicine allo zero. Questo modello verrà studia-

to nel presente paragrafo, così come abbiamo fatto al § 6 per il gas di Fermi [1]). Quanto detto al § 6 riguardo alla caretteristica generale dei modelli di un gas quasi-perfetto degenere si riferisce ugualmente al caso in questione. In particolare, la condizione per cui un gas è debolmente non perfetto (il parametro gassoso vale $a\,(N/V)^{1/3} \ll 1$ con $a$ come lunghezza di diffusione) può essere formulata, come prima, nella forma della condizione (6,1) di piccolezza degli impulsi delle particelle: $pa/\hbar \ll 1$ [2]).

L'operatore hamiltoniano di un sistema di bosoni (che supporremo non aventi spin) interagenti a coppie ha una forma che differisce dalla (6,6) soltanto per mancanza degli indici di spin:

$$\hat{H} = \sum \frac{p^2}{2m}\,\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2}\sum \langle \mathbf{p}_1'\mathbf{p}_2' | U | \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\rangle\, \hat{a}^+_{\mathbf{p}_1'}\hat{a}^+_{\mathbf{p}_2'}\hat{a}_{\mathbf{p}_2}\hat{a}_{\mathbf{p}_1} \qquad (25,1)$$

(la sommatoria è estesa a tutti gli impulsi che figurano negli indici). Quanto agli operatori di distruzione e creazione delle particelle, ora essi verificano le regole di commutazione

$$\hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}^+_{\mathbf{p}} - \hat{a}^+_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}} = 1.$$

Come al § 6, in accordo con l'ipotesi di impulsi piccoli, sostituiamo di nuovo tutti gli elementi matriciali nella (25,1) con i loro valori per impulsi nulli; allora

$$\hat{H} = \sum \frac{p^2}{2m}\,\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{U_0}{2V}\sum \hat{a}^+_{\mathbf{p}_1'}\hat{a}^+_{\mathbf{p}_2'}\hat{a}_{\mathbf{p}_2}\hat{a}_{\mathbf{p}_1}. \qquad (25,2)$$

La seguente osservazione serve come punto di partenza per l'applicazione della teoria delle perturbazioni a questo operatore hamiltoniano. Nello stato fondamentale del gas di Bose perfetto tutte le particelle si trovano in *condensato*, ossia nello stato di energia nulla; i numeri di riempimento $N_{\mathbf{p}=0} \equiv N_0 = N$, $N_{\mathbf{p}} = 0$ per $\mathbf{p} \neq 0$ (vedi V, § 62). Quanto al gas quasi-perfetto, i numeri $N_{\mathbf{p}}$ nello stato fondamentale e negli stati debolmente eccitati sono diversi da zero, ma sempre molto piccoli rispetto al numero macroscopicamente grande $N_0$. Ciò che la grandezza $\hat{a}^+_0\hat{a}_0 = N_0 \approx N$ è assai grande rispetto all'unità significa che l'espressione

$$\hat{a}_0\hat{a}^+_0 - \hat{a}^+_0\hat{a}_0 = 1$$

---

[1]) Il metodo che viene esposto sotto appartiene a *N. N. Bogoljubov* (1947). L'applicazione di questo metodo al gas di Bose è stato il primo esempio di deduzione microscopica conseguente dello spettro energetico dei « liquidi quantistici ».

[2]) Noi vedremo più avanti che nel gas di Bose degenere la massa principale di particelle (fuori del « condensato ») ha impulsi $p \sim \hbar\sqrt{aN/V}$ per i quali la detta disuguaglianza è effettivamente valida.

è piccola rispetto ai valori stessi $\hat{a}_0$, $\hat{a}_0^+$; perciò questi ultimi si possono considerare come numeri ordinari (uguali a $\sqrt{N_0}$) trascurandone la non commutatività.

Formalmente l'applicazione della teoria delle perturbazioni significa ora lo sviluppo della somma quadrupla nell'espressione (25,2) in potenze delle grandezze piccole $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ e $\hat{a}_{\mathbf{p}}^+$ ($\mathbf{p} \neq 0$). Il termine nullo dello sviluppo vale

$$\hat{a}_0^+\hat{a}_0^+\hat{a}_0\hat{a}_0 = a_0^4. \tag{25,3}$$

I termini del primo ordine mancano (poiché è impossibile osservare in essi la legge di conservazione dell'impulso). I termini del secondo ordine sono

$$a_0^2 \sum_{\mathbf{p}\neq 0} (\hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}_{-\mathbf{p}} + \hat{a}_{\mathbf{p}}^+\hat{a}_{-\mathbf{p}}^+ + 4\hat{a}_{\mathbf{p}}^+\hat{a}_{\mathbf{p}}). \tag{25,4}$$

Se ci limitiamo alla precisione fino ai termini del secondo ordine, possiamo sostituire $a_0^2 = N_0$ nella (25,4) al numero completo di particelle $N$. Nel termine (25,3), invece, si deve tener conto della relazione più precisa

$$a_0^2 + \sum_{\mathbf{p}\neq 0} \hat{a}_{\mathbf{p}}^+\hat{a}_{\mathbf{p}} = N.$$

Come risultato la somma dei termini (25,3-4) diventa uguale a

$$N^2 + N \sum_{\mathbf{p}\neq 0} (\hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}_{-\mathbf{p}} + \hat{a}_{\mathbf{p}}^+\hat{a}_{-\mathbf{p}}^+ + 2\hat{a}_{\mathbf{p}}^+\hat{a}_{\mathbf{p}}),$$

e dopo la sua sostituzione nella (25,2) otteniamo la seguente espressione per l'operatore hamiltoniano:

$$\hat{H} = \frac{N^2}{2V} U_0 + \sum_{\mathbf{p}} \frac{p^2}{2m} \hat{a}_{\mathbf{p}}^+\hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{N}{2V} U_0 \sum_{\mathbf{p}\neq 0} (\hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}_{-\mathbf{p}} + \hat{a}_{\mathbf{p}}^+\hat{a}_{-\mathbf{p}}^+ + 2\hat{a}_{\mathbf{p}}^+\hat{a}_{\mathbf{p}}). \tag{25,5}$$

Il primo termine di questa espressione definisce, in prima approssimazione, l'energia $E_0$ dello stato fondamentale del gas, mentre la sua derivata rispetto a $N$ definisce rispettivamente il potenziale chimico $\mu$ per $T = 0$:

$$E_0 = \frac{N^2}{2V} U_0, \quad \mu = \frac{N}{V} U_0. \tag{25,6}$$

Gli altri termini (nella (25,5)) danno, invece, la correzione ad $E_0$ e lo spettro di stati debolmente eccitati del gas.

L'integrale $U_0$ che figura nella (25,5) deve essere ancora espresso in funzione di una grandezza fisica reale, ossia della lunghezza di diffusione $a$. Nei termini del secondo ordine ciò si può eseguire direttamente in base alla formula (6,2): $U_0 = 4\pi\hbar^2 a/m$. Quanto al primo

termine, qui occorre la formula più esatta (6,5), che tiene conto della seconda approssimazione di Born nell'ampiezza di diffusione. Inoltre si tratta di due particelle collidenti del condensato per cui nella somma della (6,5) bisogna porre $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = 0$, $\mathbf{p}_1' = -\mathbf{p}_2' \equiv \mathbf{p}$ in modo che si abbia

$$U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}\left(1 + \frac{4\pi\hbar^2 a}{V}\sum_{\mathbf{p}\neq 0}\frac{1}{p^2}\right).$$

Sostituendo questa espressione nella (25,5), avremo per l'operatore hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{2\pi\hbar^2 a}{m}\frac{N^2}{V}\left(1 + \frac{4\pi\hbar^2 a}{V}\sum_{\mathbf{p}\neq 0}\frac{1}{p^2}\right) +$$

$$+ \frac{2\pi\hbar^2 a}{m}\frac{N}{V}\sum_{\mathbf{p}\neq 0}(\hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}_{-\mathbf{p}} + \hat{a}^+_{\mathbf{p}}\hat{a}^+_{-\mathbf{p}} + 2\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}) + \sum_{\mathbf{p}}\frac{p^2}{2m}\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}. \qquad (25,7)$$

Per determinare i livelli energetici, occorre ridurre l'operatore hamiltoniano alla forma diagonale, il che si ottiene mediante una trasformazione lineare appropriata degli operatori $\hat{a}_{\mathbf{p}}$, $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}$. Introduciamo i nuovi operatori $\hat{b}_{\mathbf{p}}$, $\hat{b}^+_{\mathbf{p}}$ in base alla definizione

$$\hat{a}_{\mathbf{p}} = u_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}} + v_{\mathbf{p}}\hat{b}^+_{-\mathbf{p}}, \quad \hat{a}^+_{\mathbf{p}} = u_{\mathbf{p}}\hat{b}^+_{\mathbf{p}} + v_{\mathbf{p}}\hat{b}_{-\mathbf{p}},$$

e, inoltre, chiediamo che essi verifichino le stesse relazioni di commutazione

$$\hat{b}_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}'} - \hat{b}_{\mathbf{p}'}\hat{b}_{\mathbf{p}} = 0, \quad \hat{b}_{\mathbf{p}}\hat{b}^+_{\mathbf{p}'} - \hat{b}^+_{\mathbf{p}'}\hat{b}_{\mathbf{p}} = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'},$$

degli operatori $\hat{a}_{\mathbf{p}}$, $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}$. Si vede facilmente che a tal fine deve essere $u^2_{\mathbf{p}} - v^2_{\mathbf{p}} = 1$. Tenendone conto, scriviamo la trasformazione lineare come segue:

$$\hat{a}_{\mathbf{p}} = \frac{\hat{b}_{\mathbf{p}} + L_{\mathbf{p}}\hat{b}^+_{-\mathbf{p}}}{\sqrt{1 - L^2_{\mathbf{p}}}}, \quad \hat{a}^+_{\mathbf{p}} = \frac{\hat{b}^+_{\mathbf{p}} + L_{\mathbf{p}}\hat{b}_{-\mathbf{p}}}{\sqrt{1 - L^2_{\mathbf{p}}}}. \qquad (25,8)$$

La grandezza $L_{\mathbf{p}}$ deve essere definita in modo tale che nell'operatore hamiltoniano scompaiano i termini non diagonali ($\hat{b}_{\mathbf{p}}\hat{b}_{-\mathbf{p}}$, $\hat{b}^+_{\mathbf{p}}\hat{b}^+_{-\mathbf{p}}$). Un semplice calcolo dà

$$L_{\mathbf{p}} = \frac{1}{mu^2}\left\{\varepsilon(p) - \frac{p^2}{2m} - mu^2\right\}, \qquad (25,9)$$

dove si sono introdotte le seguenti notazioni:

$$\varepsilon(p) = \left[u^2p^2 + \left(\frac{p^2}{2m}\right)^2\right]^{1/2}, \qquad (25,10)$$

$$u = \left(\frac{4\pi\hbar^2 aN}{m^2V}\right)^{1/2}. \qquad (25,11)$$

In questo caso l'operatore hamiltoniano diventa

$$\hat{H} = E_0 + \sum_{\mathbf{p}\neq 0} \varepsilon(p)\, \hat{b}^+_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}}, \tag{25,12}$$

dove

$$E_0 = \frac{N}{2} mu^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}\neq 0} \left\{ \varepsilon(p) - \frac{p^2}{2m} - mu^2 + \frac{m^3u^4}{p^2} \right\}. \tag{25,13}$$

La forma dell'operatore hamiltoniano (25,12) e le relazioni di Bose della commutazione fra gli operatori $\hat{b}_{\mathbf{p}}$, $\hat{b}^+_{\mathbf{p}}$ permettono di concludere che $\hat{b}^+_{\mathbf{p}}$ e $\hat{b}_{\mathbf{p}}$ rappresentano operatori di creazione è distruzione delle quasi-particelle di energia $\varepsilon(p)$ che obbediscono alla statistica di Bose. Gli autovalori dell'operatore diagonale $\hat{b}^+_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}}$ rappresentano i numeri $n_{\mathbf{p}}$ di quasi-particelle con impulso $\mathbf{p}$, mentre la formula (25,10) determina la dipendenza della loro energia dall'impulso (di nuovo i numeri di riempimento delle quasi-particelle sono indicati con $n_{\mathbf{p}}$ a differenza dei numeri di riempimento $N_{\mathbf{p}}$ delle particelle vere e proprie del gas). Con ciò lo spettro energetico degli stati debolmente eccitati del gas considerato è completamente determinato.

La grandezza $E_0$, invece, è l'energia dello stato fondamentale del gas. Sostituendo alla sommatoria sui valori discreti di $\mathbf{p}$ (nel volume $V$) l'integrazione in $Vd^3p/(2\pi\hbar)^3$ ed eseguendo i calcoli, otteniamo la seguente espressione:

$$E_0 = \frac{2\pi\hbar^2 aN^2}{mV} \left[ 1 + \frac{128}{15} \sqrt{\frac{a^3N}{\pi V}} \right] \tag{25,14}$$

(*T. D. Lee, C. N. Yang*, 1957). Rispettivamente, per il potenziale chimico del gas (per $T = 0$) abbiamo

$$\mu = \frac{\partial E_0}{\partial N} = \frac{4\pi\hbar^2 aN}{mV} \left[ 1 + \frac{32}{3} \sqrt{\frac{a^3N}{\pi V}} \right]. \tag{25,15}$$

Queste formule rappresentano i due primi termini dello sviluppo in potenze di $(a^3N/V)^{1/2}$. Ma già il termine successivo non potrebbe essere calcolato con il suddetto metodo. Esso deve contenere il volume come $V^{-2}$, e una grandezza di questo ordine dipende ormai non soltanto dagli urti doppi, ma anche da quelli tripli.

Per grandi valori dell'impulso ($p \gg mu$) l'energia delle quasi-particelle (25,10) tende a $p^2/2m$, cioè all'energia cinetica di una singola particella del gas.

Invece, per piccoli impulsi ($p \ll mu$) abbiamo $\varepsilon \approx up$. È facile vedere che il coefficiente $u$ coincide con la velocità del suono nel gas, cosicché questa espressione corrisponde ai fononi, in accordo con le affermazioni generali fatte al § 22. Per $T = 0$ l'energia libera

coincide con l'energia $E_0$; considerando il termine generale nello sviluppo di quest'ultima, troviamo la pressione

$$P = -\frac{\partial E}{\partial V} = \frac{2\pi\hbar^2 a N^2}{mV^2}.$$

Quanto alla velocità del suono, otteniamo $u = \sqrt{\partial P/\partial\rho}$ (dove $\rho = mN/V$ è la densità del gas), il che coincide con la formula (25,11).

Notiamo che nel modello considerato del gas di Bose la lunghezza di diffusione $a$ deve necessariamente essere positiva (interazione di repulsione fra le particelle). Formalmente ciò si vede già dal fatto che nelle formule ottenute comparirebbero termini immaginari per l'energia se $a$ fosse negativa. Il significato termodinamico della condizione $a > 0$ è che essa è necessaria, affinché nel suddetto modello del gas di Bose sia verificata la disuguaglianza $(\partial P/\partial V)_T < 0$.

La distribuzione statistica delle eccitazioni elementari (dove $\bar{n}_{\mathbf{p}}$ sono le medie dei loro numeri di riempimento) a temperatura non nulla è data semplicemente dalla formula di distribuzione di Bose (22,2). Quanto alla distribuzione $\bar{N}_{\mathbf{p}}$ degli impulsi delle particelle vere del gas, la si può calcolare mediante la media dell'operatore $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}$. Utilizzando la (25,8) e tenendo conto che i prodotti $\hat{b}_{-\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}}$ e $\hat{b}^+_{\mathbf{p}}\hat{b}^+_{-\mathbf{p}}$ non hanno elementi matriciali diagonali, otteniamo

$$\bar{N}_{\mathbf{p}} = \frac{\bar{n}_{\mathbf{p}} + L^2_{\mathbf{p}}(\bar{n}_{\mathbf{p}}+1)}{1-L^2_{\mathbf{p}}}. \tag{25,16}$$

Questa espressione è valida, ovviamente, soltanto per $\mathbf{p} \neq 0$. Il numero di particelle di impulso nullo è

$$\bar{N}_0 = N - \sum_{\mathbf{p}\neq 0} \bar{N}_{\mathbf{p}} = N - \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\int \bar{N}_{\mathbf{p}}\, d^3p. \tag{25,17}$$

In particolare, allo zero assoluto tutti gli $n_{\mathbf{p}} = 0$, e mediante la formula (25,9) ricaviamo dalla (25,16) la funzione di distribuzione nella forma [1])

$$N_{\mathbf{p}} = \frac{m^2u^4}{2\varepsilon(p)\{\varepsilon(p) + p^2/2m + mu^2\}} \tag{25,18}$$

(per $T = 0$ i valori medi di $N_{\mathbf{p}}$ coincidono con i valori esatti; perciò omettiamo il trattino orizzontale sopra la lettera). La natura non perfetta del gas di Bose implica, naturalmente, la comparsa di

[1]) Notiamo che il massimo del numero di particelle con dato valore dell'impulso ($\sim p^2 N_{\mathbf{p}}$) si trova per $p/\hbar \sim \sqrt{aN/V}$, dove si produce il passaggio da un'espressione limite di $\varepsilon(p)$ a un'altra. Questa circostanza è stata già menzionata nella nota alla pag. 129.

particelle con impulso non nullo anche allo zero assoluto; l'integrazione nella (25,17) con $N_{\mathbf{p}}$ della (25,18) è semplice e dà

$$N_0 = N\left[1 - \frac{8}{3}\sqrt{\frac{Na^3}{\pi V}}\right]. \tag{25,19}$$

Infine, facciamo un'altra osservazione a proposito dello spettro qui ottenuto. Per $p$ piccoli la derivata $d^2\varepsilon/dp^2 > 0$, vale a dire che la curva $\varepsilon(p)$ si piega in alto sopra la tangente iniziale $\varepsilon = up$. In questo caso (vedi più avanti, § 34) lo spettro diventa instabile, il che è dovuto alla possibilità di decadimento spontaneo delle quasiparticelle (fononi). Tuttavia, la larghezza corrispondente dei livelli è piccola (proporzionale a $p^5$ per $p$ piccoli) e non incide sulle espressioni che si ottengono nelle approssimazioni considerate.

## § 26. *Funzione d'onda del condensato*

Come è stato detto già al § 23, la comparsa o la scomparsa della superfluidità nell'elio liquido avviene per transizione di fase di seconda specie. Questa transizione è sempre legata a un certo cambiamento qualitativo delle proprietà del corpo. Nel caso del λ-punto dell'elio liquido, questo cambiamento può essere descritto macroscopicamente come la comparsa o la scomparsa della componente superfluida del liquido. Da un punto di vista macroscopico più approfondito, qui si tratta di proprietà determinate della distribuzione degli impulsi delle particelle (vere!) del liquido. A differenza di un liquido non superfluido, una parte finita di particelle (cioè un loro numero macroscopicamente grande) nel liquido superfluido ha un impulso rigorosamente nullo; queste particelle formano il *condensato di Bose-Einstein* (o, semplicemente, condensato) nello spazio degli impulsi. Ricordiamo che in un gas di Bose perfetto, per $T = 0$, tutte le particelle si trasformano in condensato (vedi V, § 62), e in un gas quasi-perfetto quasi tutte. Nel caso di liquido di Bose a forte interazione fra le particelle, la frazione del numero di particelle che per $T = 0$ si trovano in condensato non è affatto vicina all'unità.

Mostriamo come la proprietà di condensazione bose-einsteiniana viene formulata in termini di operatori $\psi$.

Per un gas di Bose perfetto — sistema di bosoni non interagenti — l'operatore $\psi$ di Heisenberg si scrive in forma esplicita nel seguente modo [1]):

$$\hat{\Psi}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\mathbf{pr} - \frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t\right\}. \tag{26,1}$$

[1]) Vedi la formula (9,3). Supponiamo che le particelle del gas siano senza spin per cui l'indice di spin manca. Nella (26,1) si è tenuto anche conto che per il gas di Bose perfetto il potenziale chimico $\mu$ è nullo per $T = 0$, e perciò il termine $-\mu t/\hbar$ negli esponenti è omesso.

Come è stato spiegato al § 25, si può trascurare la non commutatività degli operatori $\hat{a}_0$ a $\hat{a}_0^+$, considerandoli cioè come grandezze classiche. In altre parole, parte dell'operatore $\psi$ (26,1), denotiamola con $\Xi$, risulta essere un numero ordinario:

$$\hat{\Xi} = \frac{\hat{a}_0}{\sqrt{V}}. \tag{26,2}$$

Per formulare questa proprietà degli operatori $\psi$ nel caso generale di un liquido di Bose qualsiasi, osserviamo quanto segue: poiché nel condensato si trova lo stesso numero di particelle macroscopicamente grande, la variazione di questo numero di 1 non cambia sostanzialmente lo stato del sistema; si può dire che, aggiungendo (o sottraendo) una particella al condensato da un certo stato del sistema di $N$ particelle, si ottiene lo « stesso » stato del sistema di $N \pm 1$ particelle [1]). In particolare, lo stato fondamentale resta tale quale era. Indicando con $\hat{\Xi}$, $\hat{\Xi}^+$ la parte degli operatori $\psi$, che cambia di 1 il numero di particelle nel condensato, abbiamo, quindi, per definizione

$$\hat{\Xi}|m, N+1\rangle = \Xi|m, N\rangle, \quad \hat{\Xi}^+|m, N\rangle = \Xi^*|m, N+1\rangle,$$

dove i simboli $|m, N\rangle$ e $|m, N+1\rangle$ esprimono due stati « uguali » che differiscono soltanto per il numero di particelle nel sistema, e $\Xi$ è un certo numero complesso. Queste affermazioni sono valide rigorosamente nel limite $N \to \infty$. Pertanto la definizione della grandezza $\Xi$ deve essere scritta nella forma

$$\begin{aligned} &\lim_{N\to\infty} \langle m, N|\hat{\Xi}|m, N+1\rangle = \Xi, \\ &\lim_{N\to\infty} \langle m, N+1|\hat{\Xi}^+|m, N\rangle = \Xi^*; \end{aligned} \tag{26,3}$$

il passaggio al limite va eseguito per un dato valore finito della densità del liquido $N/V$.

Se rappresentiamo gli operatori $\psi$ come

$$\hat{\Psi} = \hat{\Xi} + \hat{\Psi}', \quad \hat{\Psi}^+ = \hat{\Xi}^+ + \hat{\Psi}'^+, \tag{26,4}$$

la loro parte restante (« sopra condensato ») trasforma lo stato $|m, N\rangle$ negli stati ortogonali ad esso, cioè gli elementi matriciali [2])

$$\lim_{N\to\infty} \langle m, N|\hat{\Psi}'|m, N+1\rangle = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \langle m, N+1|\hat{\Psi}'^+|m, N\rangle = 0. \tag{26,5}$$

---

[1]) L'aggiunta o la sottrazione di una particella deve essere supposta come un processo indefinitamente lento, ciò che esclude un'eccitazione del sistema da parte di un campo variabile.

[2]) A scanso di equivoci, ricordiamo ancora una volta che queste uguaglianze si riferiscono unicamente alle transizioni fra stati « uguali »!

Nel limite $N \to \infty$ la differenza fra gli stati $|m, N\rangle$ e $|m, N+1\rangle$ scompare completamente, e in questo senso la grandezza $\Xi$ diventa il valore medio dell'operatore $\hat{\Psi}$ rispetto a questo stato. Sottolineiamo che la finitezza di questo limite è caratteristica per un sistema con condensato.

Le uguaglianze (26,3) esauriscono le proprietà « operatoriali » di $\hat{\Xi}$, $\hat{\Xi}^+$ e si possono supporre commutative con $\hat{\Psi}'$, $\hat{\Psi}'^+$. In particolare, gli operatori $\hat{\Xi}$, $\hat{\Xi}^+$ verranno sostituiti con $\Xi$, $\Xi^*$, cioè si comporteranno come grandezze classiche, qualunque siano i valori medi rispetto allo stato fondamentale. Sottolineiamo di nuovo che questa approssimazione implica (dato il numero macroscopico di particelle nel condensato) che vengano trascurate soltanto le quantità di ordine relativo di grandezza di $1/N$ [1]).

Se la dipendenza temporale delle funzioni d'onda è determinata in base all'operatore hamiltoniano $\hat{H}' = \hat{H} - \mu\hat{N}$, la grandezza $\Xi$ non dipende dal tempo. Infatti, l'elemento matriciale $\langle m, N | \Xi | m, N+1\rangle$ è proporzionale a

$$\exp\left\{-\frac{it}{\hbar}\left[E(N+1)-E(N)-(N+1)\mu+N\mu\right]\right\}.$$

Ma questo esponente si annulla poiché $E(N+1) - E(N) = \mu$ (a meno della grandezza $\sim 1/N$).

In un liquido omogeneo fisso, $\Xi$ è indipendente anche dalle coordinate e (per una fase appropriata di questa grandezza complessa) vale semplicemente

$$\Xi = \sqrt{n_0}, \tag{26,6}$$

dove $n_0$ è il numero di particelle condensate per unità di volume del liquido. Infatti, $\hat{\Xi}^+ \hat{\Xi}$ è l'operatore di densità del numero di particelle nel condensato, e il valore medio di questo operatore vale esattamente $n_0$.

L'esistenza del condensato conduce a una differenza qualitativa fra le proprietà della matrice densità di particelle del liquido di Bose e della matrice densità di un liquido normale. La matrice densità del liquido di Bose omogeneo in uno stato arbitrario è data dall'espressione

$$N\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle m, N | \hat{\Psi}^+(t, \mathbf{r}_2)\, \hat{\Psi}(t, \mathbf{r}_1) | m, N\rangle, \tag{26,7}$$

dove questa funzione dipende unicamente dalla differenza $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ (cfr. la formula (7,13)). Sostituendovi gli operatori $\psi$ della forma (26,4) e tenendo conto delle proprietà (26,3) e (26,5), otteniamo

$$N\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = n_0 + N\rho'(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \tag{26,8}$$

[1]) In particolare, con questa approssimazione si devono supporre coincidenti gli elementi matriciali degli operatori $\hat{\Psi}'$ per le transizioni fra diversi stati che differiscono per un numero uguale (piccolo) di particelle nel sistema.

La matrice densità « sopra condensato » $\rho'$ tende a zero per $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \to \infty$; invece la matrice densità $\rho$ tende, in questo caso, a un limite finito $n_0/N$. Con ciò si spiega l'esistenza nel liquido superfluido di un « ordine distante », assente nei liquidi normali in cui sempre $\rho \to 0$ per $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \to \infty$. Questa è la proprietà di simmetria che distingue la fase superfluida del liquido da quella non superfluida (*V. L. Ginzburg*, *L. D. Landau*, 1950).

La componente di Fourier della matrice densità determina la distribuzione degli impulsi delle particelle del liquido in base alla formula

$$N(\mathbf{p}) = N \int \rho(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{pr}}\, d^3x \tag{26,9}$$

(vedi la (7,20)). Sostituendovi $\rho$ nella forma (26,8), otteniamo

$$N(\mathbf{p}) = (2\pi)^3 n_0 \delta(\mathbf{p}) + N \int \rho'(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{pr}}\, d^3x. \tag{26,10}$$

Il termine con la funzione $\delta$ corrisponde alla probabilità finita che la particella abbia impulso rigorosamente nullo.

Se il liquido rivela superfluidità, o se si trova in condizioni esterne non omogenee e non stazionarie (che variano sostanzialmente, però, soltanto a distanze più grandi di quelle interatomiche), allora la condensazione bose-einsteiniana si verifica, come prima, ma non si può più affermare che essa si produce nello stato con $\mathbf{p} = 0$. La grandezza $\Xi$, definibile come prima in accordo con la (26,3), sarà ora una funzione delle coordinate e del tempo, che ha il significato di funzione d'onda della particella allo stato condensato. Essa è normalizzata dalla condizione $|\Xi|^2 = n_0$ e perciò può essere rappresentata nella forma

$$\Xi(t, \mathbf{r}) = \sqrt{n_0(t, \mathbf{r})}\, e^{i\Phi(t, \mathbf{r})}. \tag{26,11}$$

Siccome allo stato condensato si trova un numero macroscopicamente grande di particelle, la funzione d'onda di questo stato diventa una grandezza macroscopica classica [1]). Quindi, nel liquido superfluido compare una caratteristica nuova degli stati macroscopici, compresi quelli in equilibrio termodinamico.

La densità del flusso calcolata mediante la funzione d'onda (26,11) è

$$\mathbf{j}_{\text{cond}} = \frac{i\hbar}{2m}(\Xi\nabla\Xi^* - \Xi^*\nabla\Xi) = \frac{\hbar}{m} n_0 \nabla\Phi,$$

dove $m$ è la massa della particella del liquido. Per il suo significato, questa è la densità del flusso macroscopico di particelle condensate

[1]) Analogamente a come l'intensità del campo delle onde elettromagnetiche diventa una grandezza classica per grandi numeri di riempimento di fotoni in ciascuno stato (vedi IV, § 5).

e la si può rappresentare nella forma $n_0 \mathbf{v}_s$, dove $\mathbf{v}_s$ è la velocità macroscopica di questo movimento. Dal confronto di ambedue le espressioni risulta che

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m} \nabla \Phi. \tag{26,12}$$

Poiché questo movimento può avere luogo in stato di equilibrio termodinamico (caratterizzato dalla grandezza $\Xi$), esso è non dissipativo, in modo che la relazione (26,12) determina la velocità del moto superfluido. Arriviamo così di nuovo alla proprietà del moto superfluido già menzionata al § 23, ossia alla sua potenzialità. In questo caso il potenziale $\varphi$ risulta essere coincidente (a meno di un fattore costante) con la fase della funzione d'onda condensata

$$\varphi = \frac{\hbar}{m} \Phi. \tag{26,13}$$

A scanso di equivoci sottolineiamo, tuttavia, che sebbene la velocità del condensato coincida con quella della componente superfluida del liquido (e sebbene il condensato e la componente superfluida compaiano contemporaneamente nel $\lambda$-punto), la densità del condensato $mn_0$ e la densità della componente superfluida $\rho_s$ non coincidono per niente, senza citare che un'identificazione di queste due grandezze non potrebbe essere in nessun modo giustificata: la sua infondatezza si vede anche dal fatto che allo zero assoluto tutta la massa del liquido è superfluida, mentre le sue particelle sono ben lungi dall'essere tutte nel condensato [1]).

## § 27. *Dipendenza della densità del condensato dalla temperatura*

La densità del numero di particelle nel condensato è massima per $T = 0$ e all'aumentare della temperatura cala. La legge limite della dipendenza di questa densità dalla temperatura per $T \to 0$ può essere trovata considerando le fluttuazioni di una grandezza macroscopica, ossia della funzione d'onda condensata $\Xi$ (*R. A. Ferrell*, *N. Menyhard*, *H. Schmidt*, *F. Schwabl*, *P. Szépfalusy*, 1968).

Ricordiamo anzitutto che $\Xi$ è una grandezza classica, cui nel formalismo quantomeccanico corrisponde l'operatore $\hat{\Psi}$. Così, per calcolare le fluttuazioni si dovrebbe, in principio, ricorrere a questi operatori. D'altra parte, in prossimità dello zero assoluto sono le vibrazioni di grande lunghezza d'onda a giocare il ruolo principale nello spettro delle fluttuazioni di una grandezza macroscopica. Queste vibrazioni in un liquido sono delle onde sonore che vengono

[1]) Infatti, la densità del condensato nell'elio liquido costituisce, evidentemente, soltanto una piccola parte della densità totale del liquido.

descritte dalle equazioni idrodinamiche macroscopiche; perciò sorge la possibilità di costruire un operatore che corrisponda alla grandezza $\Xi$ mediante una sua quantizzazione indipendente.

In questo caso, per la grandezza $\Xi = \sqrt{n_0} \exp(i\Phi)$ una fluttuazione più forte nel limite di grande lunghezza d'onda, l'ha la fase $\Phi$ legata direttamente al potenziale della velocità superfluida dalla formula (26,13). Ricordiamo che le due grandezze $\varphi$ e $\Phi$ non sono univoche, e ad esse si può associare una qualsiasi costante. Quanto alla grandezza univoca $\sqrt{n_0}$, essa può essere espressa soltanto mediante le derivate di $\Phi$, e perciò le componenti di Fourier delle sue fluttuazioni non contengono altro che potenze ridondanti del vettore d'onda $\mathbf{k}$, cioè sono piccole per $\mathbf{k}$ piccoli.

Il legame fra la fase $\Phi$ e il potenziale $\varphi$ permette di legare direttamente questa fase a grandezze che stanno a caratterizzare la distribuzione dei fononi nel liquido. A tal fine consideriamo $\varphi$ e, quindi, $\Phi$ come operatore di seconda quantizzazione esprimendolo, in accordo con la (24,10), in funzione degli operatori di creazione e distruzione dei fononi:

$$\hat{\Phi} = \sum_{\mathbf{p}} \left(\frac{mu}{2Vnp}\right)^{1/2} (\hat{c}_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{pr}/\hbar} + \hat{c}^{+}_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{pr}/\hbar}) \tag{27,1}$$

scriviamo la densità imperturbata del liquido nella forma $\rho = nm$, dove $n$ è la densità del numero di particelle; l'indice 0 è omesso). In accordo con quanto detto sopra ciò vuol dire che l'operatore della grandezza macroscopica $\Xi$, cioè la parte di grande lunghezza d'onda dell'operatore $\hat{\Psi}$, può essere rappresentata nella forma

$$\hat{\Psi} = \sqrt{n_0} \exp(i\hat{\Phi}), \tag{27,2}$$

dove $n_0$ è la densità di particelle condensate.

Prima di tutto ricorriamo a questa formula per calcolare la distribuzione degli impulsi delle particelle « sopra condensato » del liquido di Bose (per valori piccoli di essi). Nella matrice densità a una sola componente $\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, per grandi distanze $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, si può utilizzare la seguente espressione in grande lunghezza d'onda per l'operatore $\psi$ (27,2):

$$N\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \hat{\Psi}^{+}(\mathbf{r}_2)\, \hat{\Psi}(\mathbf{r}_1) \rangle \approx n_0 \langle e^{-i\hat{\Phi}^{+}(\mathbf{r}_2)} e^{i\hat{\Phi}(\mathbf{r}_1)} \rangle, \tag{27,3}$$

dove la media viene calcolata rispetto allo stato del liquido a una data temperatura. Essendo piccole le fluttuazioni, occorre sviluppare questa espressione in potenze di $\hat{\Phi}$, conservando unicamente i primi termini che non si annullano (quadratici). Tenendo presente che $\hat{\Phi}^{+} = \hat{\Phi}$, otteniamo

$$N\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = n_0 - n_0 \langle \hat{\Phi}^2(\mathbf{r}) \rangle + n_0 \langle \hat{\Phi}(\mathbf{r}_2)\, \hat{\Phi}(\mathbf{r}_1) \rangle. \tag{27,4}$$

Il terzo termine tende a zero per $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \to \infty$ e fornisce la parte

« sopra condensato » cercata della matrice densità (il secondo termine, invece, è indipendente in generale da **r** in un liquido omogeneo e fornisce una correzione alla densità del condensato che verrà calcolata più avanti in un altro modo). Partendo dalla (27,1), riduciamo la parte « sopra condensato » alla forma

$$N\rho'(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{n_0 m u}{2Vn} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{p} \{\langle \hat{c}_{\mathbf{p}}^{+} \hat{c}_{\mathbf{p}} \rangle e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)/\hbar} +$$

$$+ \langle \hat{c}_{\mathbf{p}} \hat{c}_{\mathbf{p}}^{+} \rangle e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)/\hbar}\} = \frac{n_0 m u}{Vn} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{p} \left(n_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2}\right) e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)/\hbar},$$

dove

$$n_{\mathbf{p}} = [e^{pu/T} - 1]^{-1}.$$

Passando dalla somma all'integrazione, abbiamo

$$N\rho'(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{n_0 m u}{n} \int \frac{n_{\mathbf{p}} + 1/2}{p} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{27,5}$$

È ovvio che questa espressione è valida unicamente per un contributo fornito da $p$ piccoli ($\hbar/p$ è grande rispetto alle distanze interatomiche). L'espressione integranda nella (27,5) definisce immediatamente la distribuzione degli impulsi delle particelle

$$N(\mathbf{p}) = \frac{n_0 m u}{np} \left(n_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2}\right). \tag{27,6}$$

Per $T = 0$ questa formula dà

$$N(\mathbf{p}) = \frac{n_0 m u}{2np} \tag{27,7}$$

(*J. Gavoret, Ph. Noziéres*, 1964), e per $T \neq 0$, $up \ll T$:

$$N(\mathbf{p}) = \frac{n_0 m T}{np^2} \tag{27,8}$$

(*P. C. Hohenberg, P. C. Martin*, 1965).

Ora possiamo definire la dipendenza della densità del condensato dalla temperatura. Per definizione abbiamo

$$n_0(T) = n - \int N(\mathbf{p}) \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{27,9}$$

Se sostituiamo direttamente questa espressione nella formula (27,6), l'integrale divergerà per vibrazioni nulle. Questa circostanza è dovuta all'inapplicabilità della (27,6) per $p$ grandi e non significa altro che l'impossibilità di calcolare in questo modo il valore della parte condensata per $T = 0$, che deve essere supposto qui una grandezza data. Quanto alla definizione della dipendenza dalla temperatura,

occorre sottrarre da $n_0(T)$ il suo valore per $T = 0$, dopo di che l'integrale sarà convergente. Come risultato abbiamo

$$\frac{n_0(T) - n_0(0)}{n_0(0)} = -\frac{mu}{n}\int \frac{n_{\mathbf{p}}}{p}\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} =$$

$$= -\frac{mT^2}{2\pi^2 nu\hbar^3}\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x - 1} = -\frac{mT^2}{12nu\hbar^3}. \qquad (27,10)$$

Nei calcoli eseguiti abbiamo trascurato la dipendenza della densità completa del liquido dalla temperatura, il che è legittimo in quanto la dilatazione termica del liquido (dovuta all'eccitazione dei fononi) è proporzionale a una potenza più elevata della temperatura: $T^4$ (vedi V, § 67) [1]).

Infine, facciamo alcune osservazioni relative al liquido di Bose bidimensionale, questione che presenta un interesse metodologico. In questo caso, la parte dell'integrale (27,9), dipendente dalla temperatura, diverge logaritmicamente nel dominio dei **p** piccoli, dove la formula per $N$ (**p**) dovrebbe essere vera. Ciò significa che nel caso bidimensionale l'ipotesi fondamentale dell'esistenza del condensato a temperature non nulle è falsa; in questo caso il condensato può esistere soltanto per $T = 0$ [2]). La situazione qui è analoga a quella dei cristalli bidimensionali (vedi V, § 137). Così come nei cristalli bidimensionali le fluttuazioni di spostamento degli atomi fanno « smussare » il reticolo, anche le fluttuazioni della fase distruggono il condensato. L'analogia formale fra le due situazioni è dovuta al fatto che in ambedue i casi l'energia dipende da grandezze che possono entrare in essa soltanto sotto forma di derivate. Nel primo caso sono i vettori spostamento degli atomi, che da soli non possono entrare nell'energia essendo quest'ultima invariante rispetto agli spostamenti del sistema come un tutt'uno. Nel secondo caso è la fase della funzione d'onda condensata, che da sola non può entrare nell'energia per sua non univocità. Il fatto che l'energia dipende unicamente dai gradienti di queste grandezze conduce, in fin dei conti, alla divergenza delle fluttuazioni.

In seguito, abbiamo visto nel volume V, § 138, che la divergenza debole (logaritmicamente) delle fluttuazioni implica in un cristallo bidimensionale una decrescenza lenta (potenza) della funzione di correlazione del sistema. Analogamente, nel sistema di Bose bidimensionale la matrice densità (27,3) decresce per $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \to \infty$,

---

[1]) Le formule ottenute sono valide per qualsiasi liquido di Bose e concordano, ovviamente, con le formule dedotte al § 25 per un gas di Bose debolmente non perfetto. Confrontandole, si deve tener presente che per questo gas $n_0 \approx n$ e che la condizione di piccolezza di $p$ ha la forma $p \ll mu \sim \hbar\,(an)^{1/2}$.

[2]) Queste affermazioni riguardano anche il gas di Bose perfetto bidimensionale.

ma in base a una legge potenziale [1]), e non tende affatto a un limite costante come in presenza del condensato. Osserviamo che, grazie a questo fatto, questo sistema si differenzia qualitativamente da un liquido ordinario, cosicché nel caso bidimensionale è possibile la transizione di fase di seconda specie fra un liquido normale con decrescenza esponenziale di $\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ e un liquido con decrescenza in base a una legge potenziale.

## § 28. *Comportamento della densità superfluida in prossimità del λ-punto*

Come è stato già detto al § 23, all'aumentare della temperatura la parte superfluida della densità del liquido di Bose $\rho_s/\rho$ decresce e si annulla infine nel cosiddetto λ-punto della transizione di fase di seconda specie. La temperatura $T_\lambda$ di questo punto è funzione della pressione $P$; l'equazione $T = T_\lambda(P)$ determina la curva dei λ-punti del diagramma di fase nel piano $P$, $T$.

Nella teoria generale delle transizioni di fase di seconda specie la variazione dello stato di un corpo viene descritta dall'andamento del parametro d'ordine che ne caratterizza le proprietà di simmetria. Per la transizione λ del liquido di Bose il ruolo di questo parametro è svolto dalla funzione d'onda condensata $\Xi$ che descrive, come è stato sottolineato al § 26, l'« ordine distante » nel liquido. La complessità di $\Xi$ significa che il parametro d'ordine ha due componenti e che, fra l'altro, l'operatore hamiltoniano efficace del sistema (vedi V, § 147) dipende unicamente da $|\Xi|^2$, vale a dire che esso è invariante rispetto alla trasformazione $\Xi \to e^{i\alpha}\Xi$ quale che sia $\alpha$ reale.

I dati empirici relativi alla transizione λ nell'elio liquido testimoniano, evidentemente, che per essa non esiste campo di applicabilità della teoria delle transizioni di fase di Landau: il criterio (146,15) del volume V non si verifica in nessun intorno del λ-punto (cioè in nessun punto del dominio $|T - T_\lambda| \ll T_\lambda$). Perciò la descrizione delle proprietà di questa transizione richiede l'uso della teoria fluttuazionale delle transizioni di fase di seconda specie che dà la possibilità di legare tra loro le dipendenze delle varie grandezze dalla temperatura.

La dipendenza del parametro d'ordine (e, quindi, anche della densità del condensato $n_0$) dalla temperatura è data, per $T \to T_\lambda$, dall'indice critico $\beta$ (vedi V, § 148):

$$|\Xi| = \sqrt{n_0} \sim (T_\lambda - T)^\beta. \tag{28,1}$$

Tuttavia, la questione relativa all'andamento della densità superfluida $\rho_s$ presenta maggiore interesse. Per il suo calcolo consideriamo un liquido in cui la fase $\Phi$ della funzione d'onda condensata

[1]) Per dettaglio vedi *J. W. Kane, L. Kadanoff*, Phys. Rev. **155**, 80 (1967).

varia lentamente nello spazio. Ciò significa che nel liquido si produce un moto superfluido macroscopico di velocità (26,12) e, rispettivamente, di energia cinetica (per l'unità di volume del liquido)

$$\frac{\rho_s v_s^2}{2} = \rho_s \frac{\hbar^2}{2m^2} (\nabla\Phi)^2. \qquad (28,2)$$

Questa espressione si può applicare anche alle fluttuazioni del parametro d'ordine nel dominio delle lunghezze d'onda grandi. In accordo con l'ipotesi dell'invarianza di scala, l'unico parametro di lunghezza, che descrive il quadro fluttuazionale nell'intorno del punto di transizione, è il raggio di correlazione $r_c$ delle fluttuazioni. Di conseguenza, sempre questo raggio definisce l'ordine di grandezza delle distanze sulle quali la variazione fluttuazionale della fase $\Phi$ è dell'ordine dell'unità; pertanto la media del quadrato della velocità di fluttuazione varia con la temperatura in base alla legge

$$\overline{v_s^2} \backsim r_c^{-2} \backsim (T_\lambda - T)^{2\nu},$$

dove $\nu$ è l'indice critico del raggio correlativo. D'altra parte, siccome la singolarità delle grandezze termodinamiche nel punto di transizione è legata proprio alle fluttuazioni nel dominio delle grandi lunghezze d'onda, è naturale supporre che nell'intorno di questo punto l'energia cinetica fluttuazionale (28,2) varii con la temperatura in base alla stessa legge della parte singolare del potenziale termodinamico del liquido, cioè come $(T_\lambda - T)^{2-\alpha}$ (dove $\alpha$ è l'indice critico del calore specifico $C_p$). Troviamo così che

$$\rho_s \overline{v_s^2} \backsim \rho_s (T_\lambda - T)^{2\nu} \backsim (T_\lambda - T)^{2-\alpha},$$

da cui $\rho_s \backsim (T_\lambda - T)^{2-\alpha-2\nu}$. Infine, tenuto conto della relazione $3\nu = 2 - \alpha$ (la quale discende dall'ipotesi dell'invarianza di scala; vedi V, § 149), otteniamo

$$\rho_s \backsim (T_\lambda - T)^{(2-\alpha)/3}. \qquad (28,3)$$

Con ciò abbiamo stabilito il legame fra le dipendenze di $\rho_s$ e del calore specifico dalla temperatura in prossimità del $\lambda$-punto (*B. D. Josephson*, 1966) [1]).

## § 29. *Linee di vortice quantizzate*

Un liquido ordinario contenuto in un recipiente cilindrico ruotante attorno al proprio asse viene trascinato dall'attrito contro le pareti del recipiente e, infine, comincia a ruotare come un tutt'uno con il recipiente. Nel liquido superfluido viene trascinata dalla rotazione soltanto la sua componente normale; quanto alla componente

---

[1]) Infatti, gli indici $\alpha$ e $\zeta$ per l'elio liquido sono molto piccoli; pertanto con buona approssimazione si ha $\beta \approx 1/3$ in modo che $\rho_s \backsim n_0 \backsim (T_\lambda - T)^{2/3}$.

superfluida, essa resta fissa in accordo con il fatto che, in generale, questa componente non può ruotare come un tutt'uno, poiché in questo caso sarebbe violata la potenzialità del movimento superfluido [1]).

Tuttavia, a velocità di rotazione sufficientemente grandi, questo stato diventa termodinamicamente svantaggioso. La condizione di equilibrio termodinamico è che debba essere minima la grandezza

$$E_{\text{rot}} = E - \mathbf{M}\Omega, \tag{29,1}$$

che rappresenta l'energia rispetto a un sistema di coordinate rotante; qui $E$ e $\mathbf{M}$ sono rispettivamente l'energia e il momento dell'impulso del sistema relativamente a un sistema di coordinate fisso (vedi V, § 26). In questa espressione è il termine $-\mathbf{M}\Omega$ a fornire il vantaggio termodinamico (per $\Omega$ sufficientemente grandi) allo stato con $\mathbf{M}\Omega > 0$ rispetto allo stato con $\mathbf{M} = 0$.

Quindi, all'aumentare della velocità di rotazione del recipiente, deve comparire, in fin dei conti, il movimento superfluido. La contraddizione apparente fra questa affermazione e la condizione di potenzialità del movimento superfluido può essere eliminata supponendo che la potenzialità venga violata soltanto su certe linee singolari del liquido, le *linee di vortice* [2]). Attorno a queste linee il liquido è animato da un movimento che si potrebbe chiamare *rotazione potenziale*, cosicché in tutto il volume all'esterno delle dette linee si ha rot $\mathbf{v}_s = 0$.

Le linee di vortice nel liquido sono di spessore misurabile in unità atomiche e, dal punto di vista macroscopico, si devono considerare come infinitamente sottili [3]). La loro esistenza non contraddice l'espressione della velocità nella formula (26,12), in quanto quest'ultima parte dall'ipotesi che la variazione di $\mathbf{v}_s$ nello spazio sia sufficientemente lenta, mentre in prossimità di una linea di vortice $\mathbf{v}_s$ ha una variazione rapida a piacere (vedi più avanti la formula (29,3)). Essa non contraddice neanche la giustificazione della potenzialità del movimento superfluido, data al § 23 in base alle proprietà dello spettro energetico del liquido di Bose, poiché a una linea di vortice è legata una determinata energia macroscopicamente grande (vedi più avanti la formula (29,8)), per cui lo stato del liquido avente una tale linea non può più essere considerato debolmente eccitato.

---

[1]) Al ruotare del liquido come un tutt'uno la velocità vale $\mathbf{v} = [\mathbf{\Omega r}]$, dove $\mathbf{\Omega}$ è la velocità angolare e il raggio vettore $\mathbf{r}$ viene calcolato a partire da un punto giacente sull'asse. Inoltre, rot $\mathbf{v} = 2\mathbf{\Omega} \neq 0$.

[2]) Questa supposizione è stata avanzata da *L. Onsager* (1949) e in seguito sviluppata da *R.P. Feynman* (1955).

[3]) Questa affermazione non si riferisce, tuttavia, a un intorno vicino del $\lambda$-punto; qui la linea di vortice è di uno spessore dell'ordine di grandezza del raggio di correlazione delle fluttuazioni.

Consideriamo dapprima le linee di vortice da un punto di vista puramente cinematico, ossia come linee singolari nella distribuzione delle velocità per un moto potenziale del liquido. Ogni linea di vortice è caratterizzata da un determinato valore della circuitazione (denotiamolo con $2\pi\varkappa$) della velocità lungo un contorno chiuso che contiene questa linea:

$$\oint \mathbf{v}_s \, d\mathbf{l} = 2\pi\varkappa. \tag{29,2}$$

Questo valore è indipendente dalla scelta del cammino di integrazione. Infatti, se $C_1$ e $C_2$ sono due contorni che delimitano una linea di vortice, allora la differenza tra le circuitazioni della velocità lungo questi contorni è uguale, secondo il teorema di Stokes, al flusso del vettore rot $\mathbf{v}_s$ attraverso una superficie costruita fra $C_1$ e $C_2$; siccome la detta superficie non interseca da nessuna parte la linea di vortice, in tutti i suoi punti rot $\mathbf{v}_s = 0$, cosicché l'integrale si annulla. Ne consegue ugualmente che la linea di vortice non si interrompe: essa o è chiusa o termina sulla frontiera del liquido (quando questi è illimitato, i due estremi della curva si trovano all'infinito). Infatti, l'esistenza di un estremo libero della linea di vortice significherebbe la possibilità di costruire sul contorno $C$ una superficie non intersecantesi in nessun punto con la linea e, come risultato, l'integrale a primo membro della formula (29,2) si annullerebbe.

La condizione (29,2) permette di determinare la distribuzione delle velocità in un liquido che si muove intorno alla linea di vortice. Nel caso più semplice di linea di vortice in un liquido illimitato, le linee di corrente sono delle circonferenze su piani perpendicolari alla linea e con centri giacenti su di essa. La circuitazione della velocità lungo una tale linea è $2\pi r v_s$, in modo che

$$v_s = \frac{\varkappa}{r}, \tag{29,3}$$

essendo $r$ la distanza dalla linea. Notiamo che per rotazione potenziale la velocità cala allontanandosi dall'asse di rotazione (linea di vortice) contrariamente alla rotazione come un tutt'uno, in cui la velocità cresce proporzionalmente a $r$.

Per una linea di vortice di forma arbitraria la distribuzione delle velocità è data dalla formula

$$\mathbf{v}_s = \frac{\varkappa}{2} \int \frac{[d\mathbf{l} \cdot \mathbf{R}]}{R^3}, \tag{29,4}$$

dove si integra lungo la linea e $\mathbf{R}$ è il raggio vettore tracciato da $d\mathbf{l}$ al punto di osservazione della velocità [1]). A distanze dalla linea di

[1]) Si potrebbe scrivere direttamente questa espressione per analogia con la nota formula di Biot-Savart per un campo magnetico di correnti lineari. La coincidenza formale di entrambi i problemi è immediata dal confronto della

vortice piccole rispetto al suo raggio di curvatura è ovvio che la formula (29,4) si riduce approssimativamente alla (29,3).

Come è stato già detto, le formule (29,2-4) sono conseguenze della sola potenzialità del movimento del liquido. Quanto alla natura quantistica delle linee di vortice nel liquido superfluido, essa si manifesta nel fatto che la costante $\varkappa$ non assume altri valori che quelli di una serie discreta. Utilizzando infatti la formula (26,12) per la velocità $\mathbf{v}_s$ espressa dalla fase $\Phi$ della funzione d'onda condensata, troviamo che la sua circuitazione è

$$\oint \mathbf{v}_s\, d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{m}\Delta\Phi, \tag{29,5}$$

dove $\Delta\Phi$ è la variazione della fase al descrivere il contorno. Poiché la funzione d'onda è monodroma, la variazione della sua fase nel tornare al punto di partenza non può essere altro che un multiplo intero di $2\pi$. Ne segue che

$$\varkappa = n\hbar/m, \tag{29,6}$$

dove $n$ è un intero. Noi vedremo più avanti che di fatto sono termodinamicamente stabili soltanto le linee di vortice con il valore minimo possibile di circuitazione ($n = 1$). Perciò porremo nel seguito

$$\varkappa = \hbar/m. \tag{29,7}$$

Determiniamo ora la velocità di rotazione critica di un recipiente cilindrico per la quale compare per la prima volta una linea di vortice. Da considerazioni di simmetria è evidente che questa linea sarà disposta lungo l'asse del recipiente. La variazione dell'energia a causa della linea di vortice comparsa è

$$\Delta E = \int \frac{\rho_s v_s^2}{2}\, dV = \frac{\rho_s}{2} L \int v_s^2 \cdot 2\pi r\, dr = L\rho_s \pi \varkappa^2 \int \frac{dr}{r}$$

($L$ è la lunghezza del recipiente). Si deve integrare in $dr$ nei limiti fra il raggio $R$ del recipiente e un certo valore $r \sim a$ dell'ordine di grandezza delle distanze atomiche, sulle quali la considerazione macroscopica perde senso; data la divergenza logaritmica dell'integrale, il suo valore è poco sensibile a una scelta esatta del valore di $a$. Quindi,

$$\Delta E = L\pi\rho_s \frac{\hbar^2}{m^2} \ln \frac{R}{a} \tag{29,8}$$

(questa espressione ha, come si dice, precisione logaritmica, vale a dire che è supposto grande non soltanto il rapporto $R/a$, ma anche

---

circuitazione della velocità (29,2) con quella del campo magnetico $\mathbf{H}$ attorno alla corrente lineare $J$: $\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} J$. Un problema discende dall'altro cambiando le notazioni: $\mathbf{H} \to \mathbf{v}_s$, $J/c \to \varkappa/2$.

il suo logaritmo) [1]). Quanto al momento della quantità di moto del liquido rotante, esso vale

$$M = \int \rho_s v_s r \, dV = \rho_s \varkappa \int dV = L\pi R^2 \frac{\hbar}{m} \rho_s. \qquad (29,9)$$

La comparsa di una linea di vortice è termodinamicamente vantaggiosa se $\Delta E_{\text{rot}} = \Delta E - M\Omega < 0$, cioè se

$$\Omega > \Omega_{\text{cr}} = \frac{\hbar}{mR^2} \ln \frac{R}{a}. \qquad (29,10)$$

I ragionamenti esposti permettono ugualmente di capire la ragione per cui le linee di vortice con $n > 1$ nella (29,6) risultano essere termodinamicamente instabili. Infatti, sostituendo al valore $n = 1$ quello $n > 1$, l'energia $\Delta E$ aumenta di $n^2$ volte e il momento $M$ di $n$ volte; in questo caso $\Delta E_{\text{rot}}$ aumenterà automaticamente.

All'aumentare ulteriore della velocità di rotazione del recipiente cilindrico (oltre il valore critico (29,10)) compaiono linee di vortice nuove, e per $\Omega \gg \Omega_{\text{cr}}$ il numero di queste linee sarà già molto grande. La loro distribuzione nella sezione del recipiente tende, in questo caso, ad essere uniforme e al limite la loro totalità imita la rotazione di tutta la parte superfluida del liquido come un tutt'uno [2]). È facile determinare il numero di linee di vortice per un dato (grande) valore di $\Omega$ a condizione che il valore della circuitazione della velocità su un contorno che delimita un grande numero di curve corrisponda alla rotazione del liquido come un tutt'uno. Se questo contorno include l'area unitaria (nel piano perpendicolare all'asse di rotazione), allora

$$\oint \mathbf{v}_s \, d\mathbf{l} = \nu \cdot 2\pi\varkappa = 2\pi\nu \frac{\hbar}{m},$$

dove $\nu$ è la densità di distribuzione delle linee di vortice nella sezione del recipiente. D'altra parte, per rotazione del liquido come un tutt'uno si ha $\operatorname{rot} \mathbf{v}_s = 2\Omega$ e la stessa circuitazione vale $2\Omega$. Eguagliando i due valori, troviamo che

$$\nu = m\Omega/\pi\hbar. \qquad (29,11)$$

---

[1]) Il movimento attorno alla linea di vortice è accompagnato, in generale, dalla variazione di densità del liquido. Il fatto che nel calcolo esposto è stata trascurata questa variazione può essere giustificato da quanto segue: il contributo fondamentale all'energia (29,8) proviene (data la divergenza logaritmica dell'integrale) da grandi distanze $r$ sulle quali la variazione della densità è ormai piccola. Per la stessa ragione si può trascurare il contributo proveniente dalla variazione dell'energia interna del liquido in $\Delta E$.

[2]) È facile convincersene osservando quanto segue: poiché il numero di linee cresce proporzionalmente a $\Omega$ (vedi più avanti la formula (29,11)), il secondo termine nella relazione $\Delta E_{\text{rot}} = \Delta E - M\Omega$ cresce come $\Omega^2$ e il primo come $\Omega$, perciò lo si può trascurare per $\Omega \gg \Omega_{\text{cr}}$. Allora la minimizzazione di $\Delta E_{\text{rot}}$ si riduce alla massimizzazione di $M$, che si ottiene appunto per rotazione del liquido come un tutt'uno.

La comparsa di linee di vortice viola in un certo senso la proprietà di superfluidità del liquido. Le eccitazioni elementari, che costituiscono la componente normale del liquido, verranno diffuse ora sulle linee, cedendo ad esse (e, quindi, alla componente superfluida del liquido) parte del loro impulso. In altre parole, ciò significa la comparsa di una *forza d'attrito reciproco* fra ambedue le componenti del liquido.

In generale, le linee di vortice si spostano nello spazio assieme al liquido in moto. Per $T = 0$, allorché il liquido è totalmente superfluido, ogni elemento $d\mathbf{l}$ della linea si muove alla stessa velocità $\mathbf{v}_s$ che il liquido possiede nel punto in cui si trova questo elemento. A temperature non nulle la forza d'attrito applicata alla linea di vortice implica la comparsa di una certa velocità di spostamento relativamente alla componente superfluida.

Le linee di vortice che compaiono per rotazione hanno forma rettilinea. Il flusso del liquido attraverso capillari, fenditure ecc. può essere accompagnato, invece, da formazione di linee di vortice chiuse, ossia di *anelli vorticosi*. Ciò implica la violazione della superfluidità per correnti con velocità superiori a un dato valore critico. In effetti, i valori di queste *velocità critiche* dipendono dalle condizioni concrete per le quali si verifica il flusso; essi sono di gran lunga inferiori a quel valore, oltre il quale la condizione (23,3) risulta violata.

Contrariamente alle linee di vortice rettilinee, che possono essere ferme in un liquido in quiete (lontano da queste linee), gli anelli vorticosi si muovono relativamente al liquido. La velocità di spostamento di ogni elemento di lunghezza della curva è quel valore di $\mathbf{v}_s$ che è dato (secondo la formula (29,4)), nel punto in cui l'elemento si trova, da tutti gli altri elementi della linea; in generale, questo valore per le linee incurvate è non nullo. Come risultato gli anelli vorticosi posseggono non soltanto determinate energie, ma anche determinati impulsi e rappresentano, in questo senso, un tipo particolare di eccitazioni elementari.

## PROBLEMI

**1. Determinare la velocità e l'impulso di un anello circolare vorticoso.**

*Soluzione.* Ogni elemento dell'anello si sposta a velocità $\mathbf{v}_s$ in un dato punto; data la simmetria dell'anello circolare, questa velocità in tutti i suoi punti è identica. Pertanto è sufficiente determinare la velocità $\mathbf{v}_s$ data in un certo punto dell'anello $P$ dagli altri suoi elementi. Gli elementi $d\mathbf{l}$ dell'anello e i raggi vettori $\mathbf{R}$ tracciati da $d\mathbf{l}$ al punto $P$ giacciono nel piano dell'anello; perciò la velocità nel punto $P$ data dalla formula (29,4) è perpendicolare al piano dell'anello (per cui l'anello si sposta conservando invariate la sua forma e le dimensioni).

Determiniamo la posizione dell'elemento $d\mathbf{l}$ mediante l'angolo $\vartheta$ (fig. 3). Allora

$$d\mathbf{l} = R_0\, d\vartheta, \qquad R = 2R_0 \operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}, \qquad |[d\mathbf{l}\cdot\mathbf{R}]| = R \operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}\, dl,$$

dove $R_0$ è il raggio dell'anello; dalla (29,4) ricaviamo la seguente espressione per la velocità $v$ dell'anello:

$$v = \frac{\varkappa}{8R_0}\, 2 \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{\operatorname{sen}(\vartheta/2)}.$$

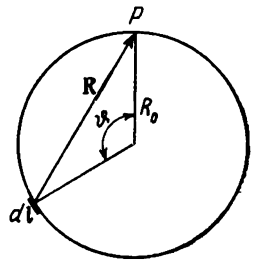


Fig. 3

Tuttavia, questo integrale diverge logaritmicamente nel limite inferiore e deve essere tagliato al valore $\vartheta \sim a/R_0$ corrispondente alle distanze atomiche ($\sim a$) fra l'elemento $d\mathbf{l}$ e il punto $P$. Con precisione logaritmica l'integrale viene determinato dal dominio dei valori $a/R_0 \ll \vartheta \ll \pi$ e vale

$$\int_{\sim a/R_0}^{\sim 1} \frac{2\, d\vartheta}{\vartheta} = 2 \ln \frac{R_0}{a},$$

in modo che

$$v = \frac{\varkappa}{2R_0} \ln \frac{R_0}{a} = \frac{\hbar}{2mR_0} \ln \frac{R_0}{a}. \qquad (1)$$

Con la stessa precisione logaritmica l'energia dell'anello vorticoso è

$$\varepsilon = 2\pi^2 R_0 \rho_s \frac{\hbar^2}{m^2} \ln \frac{R_0}{a} \qquad (2)$$

(utilizzando la formula (29,8) dopo avervi effettuato le sostituzioni $R \to R_0$, $L \to 2\pi R_0$). L'energia $\varepsilon$ è legata alla velocità $v$ dalla relazione $d\varepsilon/dp = v$, dove $p$ è l'impulso dell'anello. Di qui abbiamo

$$dp = \frac{d\varepsilon}{v} = 4\pi^2 \rho_s \frac{\hbar}{m} R_0\, dR_0$$

(con precisione logaritmica si deve supporre costante, derivando, il logaritmo grande) e infine

$$p = 2\pi^2 \rho_s \frac{\hbar}{m} R_0^2. \qquad (3)$$

Le formule (2) e (3) definiscono in forma parametrica (parametro $R_0$) la dipendenza funzionale $\varepsilon(p)$ per gli anelli vorticosi.

Notiamo che per la natura logaritmica dell'integrazione, con cui si ottiene la formula (1), quest'ultima resta valida (con certe modifiche nelle notazioni) anche per la velocità di spostamento $\mathbf{v}$ di ogni dato elemento di una linea di vortice di forma qualsiasi:

$$\mathbf{v} = \frac{\varkappa}{2R_0}\, \mathbf{b} \ln \frac{\lambda}{a}. \qquad (4)$$

Qui $\mathbf{b}$ è il versore perpendicolare al piano tangente in un dato punto alla curva (vettore binormale); $R_0$ il raggio di curvatura della curva nello stesso punto; $\lambda$ la distanza caratteristica alla quale varia la curvatura della curva.

2. Determinare la legge di dispersione delle piccole vibrazioni di una linea di vortice rettilinea (*W. Thomson*, 1880).

*Soluzione.* Consideriamo la linea di vortice come asse $z$ e supponiamo che il vettore $\mathbf{r} = (x, y)$ dia la deviazione dei punti della linea per le vibrazioni; questo vettore è una funzione di $z$ e del tempo $t$ della forma $\exp[i(kz - \omega t)]$. La velocità dei punti della linea è data dalla formula (4), nella quale con $\lambda$ si deve intendere nel dato caso la lunghezza d'onda delle vibrazioni ($\lambda \sim 1/k$):

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -i\omega\mathbf{r} = \frac{\varkappa}{2} \ln \frac{1}{ak} \frac{\mathbf{b}}{R_0}.$$

Il vettore binormale è $\mathbf{b} = [\mathbf{tn}]$, dove $\mathbf{t}$ e $\mathbf{n}$ sono i versori della tangente e della normale principale alla curva, rispettivamente. In accordo con la nota formula della geometria differenziale abbiamo $d^2\mathbf{r}/dl^2 = \mathbf{n}/R_0$, dove $l$ è la lunghezza calcolata lungo la curva. Per piccole vibrazioni la linea è debolmente incurvata in modo che si può porre $l \approx z$ e $\mathbf{t} = \mathbf{n}_z$ (versore lungo l'asse $z$); allora

$$\frac{\mathbf{b}}{R_0} \approx \left[\mathbf{n}_z \frac{d^2\mathbf{r}}{dz^2}\right] = -k^2 [\mathbf{n}_z\mathbf{r}].$$

Troviamo così l'equazione di moto della linea

$$-i\omega\mathbf{r} = -\frac{\varkappa k^2}{2} [\mathbf{n}_z\mathbf{r}] \ln \frac{1}{ak}.$$

Sviluppandola otteniamo un sistema di due equazioni omogenee lineari in $x$ e $y$; eguagliando a zero il determinante del sistema, otteniamo la relazione cercata fra $\omega$ e $k$:

$$\omega = \frac{\varkappa k^2}{2} \ln \frac{1}{ak}.$$

## § 30. *Linea di vortice in un gas di Bose quasi-perfetto*

Come è stato già detto, lo spessore della linea di vortice stessa nel liquido è misurabile in distanze atomiche. Fa eccezione, però, il caso di un gas di Bose quasi-perfetto. Qui il « midollo » della linea di vortice, in cui le proprietà del mezzo sono essenzialmente modificate, ha (come vedremo più avanti) uno spessore macroscopico e la sua struttura può essere descritta macroscopicamente (*V. L. Ginzburg*, *L. P. Pitaevskij*, 1958; *L. P. Pitaevskij*, 1961; *E. P. Gross*, 1961).

Consideriamo un gas debolmente non perfetto alla temperatura dello zero assoluto. In questo gas quasi tutte le particelle si trovano allo stato condensato. Ciò vuol dire in termini degli operatori $\psi$ che la parte « sopra condensato » dell'operatore ($\hat{\Psi}'$) è piccola rispetto alla sua media, cioè rispetto alla funzione d'onda condensata $\Xi$. Se questa piccola parte è completamente trascurata, la funzione $\Xi$ verificherà la stessa equazione di Schrödinger (7,8) che sussiste per

l'operatore completo $\hat{\Psi}$. Tenuto conto delle sole interazioni a due a due, essa ha la forma (per particelle senza spin)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Xi(t, \mathbf{r}) = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \mu\right) \Xi(t, \mathbf{r}) + \\ + \Xi(t, \mathbf{r}) \int |\Xi(t, \mathbf{r}')|^2 U(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, d^3x'. \quad (30,1)$$

Supponendo la funzione $\Xi(t, \mathbf{r}')$ poco variabile alle distanze interatomiche, possiamo portarla (sostituendo con $\Xi(t, \mathbf{r})$) fuori dal segno dell'integrale che si riduce a $\int U(r)\, d^3x \equiv U_0$. Sostituendo

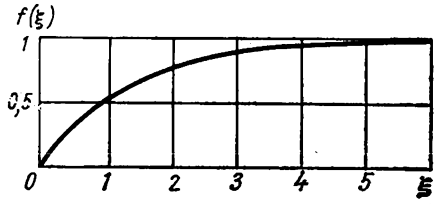



Fig. 4

anche il valore $\mu = nU_0$ (vedi la (25,6); $n$ è la densità imperturbata del numero di particelle nel gas), otteniamo l'equazione

$$i\hbar \frac{\partial \Xi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Xi + U_0\{\Xi\,|\Xi|^2 - n\Xi\}. \quad (30,2)$$

Nello stato stazionario $\Xi$ è indipendente dal tempo [1]). Alla linea di vortice rettilinea corrisponde una soluzione della forma

$$\Xi = \sqrt{n} e^{i\varphi} f\left(\frac{r}{r_0}\right), \quad r_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2mU_0 n}}, \quad (30,3)$$

dove $r$ e $\varphi$ sono rispettivamente la distanza dall'asse del rotore e l'angolo polare attorno ad esso. La fase di questa funzione corrisponde al valore della circuitazione (29,7). Il quadrato $|\Xi|^2$ è la densità del numero di particelle nel condensato; nell'approssimazione considerata essa coincide con la densità totale del gas. Per $r \to \infty$ quest'ultima deve tendere a un dato valore $n$, e la funzione $f$, rispettivamente, a 1.

Introducendo la variabile adimensionale $\xi = r/r_0$, otteniamo per la funzione $f(\xi)$ l'equazione

$$\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi \frac{df}{d\xi}\right) - \frac{f}{\xi^2} + f - f^3 = 0. \quad (30,4)$$

---

[1]) Ricordiamo che l'equazione (30,1) corrisponde già all'operatore hamiltoniano $\hat{H}' = \hat{H} - \hat{N}\mu$!

La fig. 4 rappresenta la soluzione ricavata dalla (30,4) per integrazione numerica. Per $\xi \to 0$ essa si annulla proporzionalmente a $\xi$, e per $\xi \to \infty$ tende a 1 in base alla legge $f = 1 - 1/2\xi^2$.

Il parametro $r_0$ determina l'ordine di grandezza del raggio del « midollo » del rotore. Introducendo al posto di $U_0$ la lunghezza di diffusione, in base a $U_0 = 4\pi\hbar^2 a/m$ (vedi la (6,2)), troviamo che

$$r_0 \sim n^{-1/3}\eta^{-1/2} \gg n^{-1/3},$$

dove $\eta = an^{1/3}$ è il parametro gassoso. Quindi, questo raggio è effettivamente grande rispetto alle distanze interatomiche, se il parametro $\eta$ è sufficientemente piccolo.

## PROBLEMA

Trovare lo spettro delle eccitazioni elementari in un gas di Bose quasi-perfetto, considerandolo come la legge di dispersione delle piccole vibrazioni della funzione d'onda condensata.

*Soluzione.* Consideriamo le vibrazioni piccole di $\Xi$ attorno alla media costante $\sqrt{n}$:

$$\Xi = \sqrt{n} + Ae^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} + B^* e^{-i(\mathbf{kr}-\omega t)},$$

dove $A$, $B^*$ sono ampiezze complesse piccole. Sostituendo questa espressione nell'equazione (30,2), linearizzandola e separando i termini con fattori esponenziali distinti, otteniamo il sistema in due equazioni

$$\hbar\omega A = \frac{p^2}{2m} A + nU_0 (A + B),$$

$$-\hbar\omega B = \frac{p^2}{2m} B + nU_0 (A + B)$$

($p = \hbar k$). Di qui, uguagliando a zero il determinante del sistema, ricaviamo

$$(\hbar\omega)^2 = \left(\frac{p^2}{2m}\right)^2 + \frac{p^2}{m} nU_0,$$

che coincide con la (25,10).

## § 31. *Funzioni di Green del liquido di Bose* [1])

Il formalismo matematico delle funzioni di Green per il liquido di Bose è sotto molti aspetti analogo a quello per il sistema di Fermi. Senza ripetere tutti i ragionamenti, daremo qui soprattutto le definizioni e le formule fondamentali sottolineando frattanto le distinzioni dovute sia a una diversa statistica delle particelle sia all'esistenza del condensato [2]). Come nei paragrafi precedenti del presente capitolo, le particelle del liquido sono supposte senza spin.

---

[1]) Nei §§ 31-33 e 35 viene utilizzato il sistema di unità in cui $\hbar = 1$.

[2]) L'applicazione del formalismo matematico delle funzioni di Green ai sistemi di Bose con condensato appartiene a *S.T. Beljaev* (1958).

Per definire la funzione di Green del liquido di Bose, occorre separare negli operatori $\psi$ di Heisenberg la parte condensata e rappresentarli nella forma (26,4). La funzione di Green verrà definita rispetto alla parte « sopra condensato » degli operatori come

$$G(X_1, X_2) = -i\langle T\Psi'(X_1)\Psi'^{+}(X_2)\rangle, \tag{31,1}$$

dove di nuovo la parentesi $\langle\ldots\rangle$ significa la media rispetto allo stato fondamentale e T è il segno di prodotto cronologico. In questo caso, tuttavia, a differenza del caso dei fermioni, la permutazione degli operatori $\psi$, al fine della loro riduzione a una disposizione necessaria, non deve implicare il cambiamento di segno del prodotto; quindi (a differenza della (7,10)) abbiamo

$$iG(X_1, X_2) = \begin{cases} \langle\hat{\Psi}'(X_1)\hat{\Psi}'^{+}(X_2)\rangle, & t_1 > t_2, \\ \langle\hat{\Psi}'^{+}(X_2)\hat{\Psi}'(X_1)\rangle, & t_1 < t_2. \end{cases} \tag{31,2}$$

La stessa media come la (31,1), ma con gli operatori $\psi$ completi al posto di quelli « sopra condensato » darebbe

$$-i\langle T\hat{\Psi}(X_1)\hat{\Psi}^{+}(X_2)\rangle = -in_0 + G(X_1, X_2), \tag{31,3}$$

dove $n_0$ è la densità del numero di particelle nel condensato [1]. In un liquido omogeneo la funzione di Green dipende, ovviamente, dalla sola differenza $X = X_1 - X_2$.

La matrice densità « sopra condensato » $\rho'$ si esprime mediante la funzione di Green in accordo con la formula

$$N\rho'(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = iG(t_1, \mathbf{r}_1; t_1 + 0, \mathbf{r}_2) = iG(t = -0, \mathbf{r}) \tag{31,4}$$

(porre attenzione al diverso segno comune rispetto alla formula (7,18)). In particolare, per $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ si ottiene la densità completa del numero di particelle « sopra condensato »

$$\frac{N}{V} - n_0 = iG(t = -0, \mathbf{r} = 0) \tag{31,5}$$

(cfr. la (7,19)).

Il passaggio alla rappresentazione degli impulsi va eseguito in base alle stesse formule (7,21-22). La normalizzazione della funzione $G(\omega, \mathbf{p})$ è data dalla formula

$$\frac{N}{V} = n_0 + i\lim_{t\to -0}\int G(\omega, \mathbf{p})e^{-i\omega t}\frac{d\omega\, d^3p}{(2\pi)^4} \tag{31,6}$$

(cfr. la (7,24)).

[1]) Come nel caso di sistemi di Fermi, considereremo gli stati di un sistema di Bose per un dato valore del potenziale chimico $\mu$ (anziché del numero $N$). Rispettivamente la differenza $\hat{H}' = \hat{H} - \mu\hat{N}$ (7,1) funge da operatore hamiltoniano del sistema. In questo caso la parte « sopra condensato » dell'operatore $\psi$ è indipendente dal tempo.

Per la funzione di Green di un sistema di Bose nella rappresentazione degli impulsi si può ottenere uno sviluppo simile a quello che abbiamo ottenuto al § 8 per i sistemi di Fermi. I calcoli, del tutto analoghi, conducono dapprima alla formula

$$G(\omega, \mathbf{p}) = (2\pi)^3 \sum_m \left\{ \frac{A_m \delta(\mathbf{p}-\mathbf{P}_m)}{\omega + E_0(N) - E_m(N+1) + \mu + i0} - \right.$$

$$\left. - \frac{B_m \delta(\mathbf{p}+\mathbf{P}_m)}{\omega - E_0(N) + E_m(N-1) + \mu - i0} \right\}, \qquad (31,7)$$

dove

$$A_m = |\langle 0| \hat{\psi}'(0) |m\rangle|^2, \quad B_m = |\langle m| \hat{\psi}'(0) |0\rangle|^2$$

($\hat{\psi}'(\mathbf{r})$ è l'operatore di Schrödinger « sopra condensato ») [1]. Per ridurre questo sviluppo alla forma definitiva, osserviamo che le energie di eccitazione $\varepsilon_m(N)$ nel sistema di Bose vengono definite come differenze (sempre positive) fra le energie degli stati eccitati del sistema e l'energia del suo stato fondamentale per il numero di particelle $N$ invariato. Tenendo conto che $E_0(N) + \mu \approx E_0(N+1)$, troviamo che

$$E_m(N+1) - E_0(N) - \mu \approx E_m(N+1) - E_0(N+1) =$$
$$= \varepsilon_m(N+1) > 0,$$
$$E_m(N-1) - E_0(N) + \mu \approx E_m(N-1) - E_0(N-1) =$$
$$= \varepsilon_m(N-1) > 0.$$

Ma l'aggiunta o la sottrazione di una particella cambia le proprietà del sistema soltanto nei termini dell'ordine relativo di grandezza di $\sim 1/N$; per un sistema macroscopico questi termini sono trascurabilmente piccoli in modo che le energie di eccitazione $\varepsilon_m(N \pm 1)$ vanno supposte mutuamente coincidenti e coincidenti con $\varepsilon_m(N)$. Infine otteniamo così

$$G(\omega, \mathbf{p}) = (2\pi)^3 \sum_m \left\{ \frac{A_m \delta_m(\mathbf{p}-\mathbf{P}_m)}{\omega - \varepsilon_m + i0} - \frac{B_m \delta_m(\mathbf{p}+\mathbf{P}_m)}{\omega + \varepsilon_m - i0} \right\}. \qquad (31,8)$$

Allo stesso modo in cui è stata ottenuta la (8,14), di qui è facile trovare che per un sistema di Bose la parte immaginaria della funzione di Green è sempre negativa

$$\operatorname{Im} G(\omega, \mathbf{p}) < 0. \qquad (31,9)$$

[1]) La formula (31,7) corrisponde alla formula (8,7). Ora il fattore 1/2 è assente in quanto le particelle sono supposte senza spin. Badiamo che, a differenza della (8,7), il secondo termine nella formula (31,7) è preceduto da un altro segno.

La forma asintotica della funzione di Green per $\omega \to \infty$ resta la stessa che nel caso dei sistemi di Fermi:.

$$G(\omega, \mathbf{p}) \to 1/\omega \quad \text{per} \quad |\omega| \to \infty \tag{31,10}$$

(cfr. la (8,15)). Nel dedurre questa formula si deve tener conto della regola di commutazione

$$\hat{\Psi}(t, \mathbf{r}_1)\hat{\Psi}^+(t, \mathbf{r}_2) - \hat{\Psi}^+(t, \mathbf{r}_2)\hat{\Psi}(t, \mathbf{r}_1) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

in cui al posto dell'anticommutatore figura ora il commutatore degli operatori $\hat{\Psi}$ e $\hat{\Psi}^+$ [1]).

In seguito, gli stessi ragionamenti del § 8 permettono di concludere che i poli della funzione di Green definiscono lo spettro di eccitazioni elementari

$$G^{-1}(\varepsilon, \mathbf{p}) = 0 \tag{31,11}$$

e che in questa equazione si devono calcolare soltanto le radici positive; a differenza della (8,16), qui non occorre sottrarre $\mu$ da $\varepsilon$.

In prossimità del suo polo la funzione di Green assume la forma

$$G(\omega, \mathbf{p}) \approx \frac{Z_\pm}{\omega \mp \varepsilon(\mathbf{p})}, \quad Z_+ > 0, \quad Z_- < 0; \tag{31,12}$$

il segno del residuo nel polo coincide con il segno di $\omega$, ciò che deriva dalla positività dei coefficienti $A_m$, $B_m$ nella (31,8) (il valore del residuo, invece, non è limitato da nessuna condizione simile, ad esempio, alla condizione (10,4) nel caso dei sistemi di Fermi). Utilizzando l'espressione (31,12) è facile vedere (così come abbiamo fatto al § 8) che la disuguaglianza (31,9) garantisce automaticamente la positività del coefficiente di smorzamento delle quasi-particelle, cioè il segno necessario di $-\mathrm{Im}\,\varepsilon > 0$ allorché i valori di $\varepsilon$ si spostano nel dominio complesso.

La possibilità di transizione delle particelle « sopra condensato » nel condensato e viceversa fa sì che nell'apparato matematico delle funzioni di Green per i sistemi di Bose, accanto alla funzione (31,1), compaiano automaticamente (come vedremo al § 33) anche le funzioni

$$iF(X_1, X_2) = \langle N-2 \,|\, \mathrm{T}\hat{\Psi}'(X_1)\hat{\Psi}'(X_2) \,|\, N\rangle, \tag{31,13}$$

$$\begin{aligned} iF^+(X_1, X_2) &= \langle N \,|\, \mathrm{T}\hat{\Psi}'^+(X_1)\hat{\Psi}'^+(X_2) \,|\, N-2\rangle = \\ &= \langle N+2 \,|\, \mathrm{T}\hat{\Psi}'^+(X_1)\hat{\Psi}'^+(X_2) \,|\, N\rangle, \end{aligned} \tag{31,14}$$

[1]) Il fatto che nella definizione di $G$ è distinta la parte condensata degli operatori $\psi$ qui non ha importanza: al termine costante $-in_0$ della (31,3) nella rappresentazione degli impulsi corrisponde la funzione $\delta\,\delta(\omega)\,\delta(\mathbf{p})$ che non incide sulla (31,10).

dove l'elemento matriciale è calcolato per le transizioni con variazione del numero totale di particelle nel sistema e il simbolo $|N\rangle$ significa lo stato fondamentale del sistema di $N$ particelle (l'ultima uguaglianza nella (31,14) è valida a meno di grandezze $\sim 1/N$; vedi la nota alla pag. 135). Le funzioni $F$ e $F^+$ così definite sono dette *funzioni anomale di Green*. Mostriamo che in un liquido omogeneo in quiete le funzioni $F$ e $F^+$ coincidono.

Così come la funzione $G$, le funzioni $F$ e $F^+$ per un liquido omogeneo dipendono unicamente dalla differenza $X = X_1 - X_2$ [1]. Inoltre, dato che la permutazione di $X_1$ e $X_2$ cambia soltanto l'ordine di disposizione degli operatori nel prodotto, il quale viene comunque stabilito mediante l'operazione di cronologizzazione, si ha

$$F(X) = F(-X). \tag{31,15}$$

Ne segue, ovviamente, che nella rappresentazione degli impulsi $F$ è una funzione pari del suo argomento

$$F(P) = F(-P). \tag{31,16}$$

Inoltre, una relazione definita fra $F$ e $F^+$ compare come risultato della seguente proprietà dell'operatore $\psi$ di Heisenberg per un liquido in quiete [2]:

$$\hat{\Psi}^+(t, \mathbf{r}) = \tilde{\hat{\Psi}}(-t, -\mathbf{r}). \tag{31,17}$$

---

[1]) L'indipendenza della funzione $F$ dalla somma dei tempi $t_1 + t_2$ è dovuta al fatto che nella definizione dell'operatore hamiltoniano $\hat{H}' = \hat{H} - \mu\hat{N}$ è stato introdotto il termine $-\mu\hat{N}$, mentre dalla differenza fra gli autovalori dell'energia dei sistemi con numeri di particelle diversi è stato escluso il termine

$$E(N+2) - E(N) \approx 2\partial E/\partial N = 2\mu,$$

e dagli elementi matriciali dell'operatore $\hat{\Psi}_1'$, $\hat{\Psi}_2'$ rispettivamente il fattore $\exp[-i\mu(t_1 + t_2)]$.

[2]) Si può convincersene nel seguente modo. Tutti gli elementi matriciali non nulli degli operatori $\hat{a}_{\mathbf{p}}$, $\hat{a}_{\mathbf{p}}^+$ si possono definire come grandezze reali (vedi III, le formule (64,7-8)); in questo senso gli operatori sono reali, cioè $\hat{a}_{\mathbf{p}}^+ = \tilde{\hat{a}}_{\mathbf{p}}^* = \tilde{\hat{a}}_{\mathbf{p}}$. Pertanto l'operatore $\psi$ di Schrödinger

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = V^{-1/2} \sum_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{pr}}$$

gode della proprietà $\hat{\psi}^+(\mathbf{r}) = \tilde{\hat{\psi}}(-\mathbf{r})$. Ne discende, a sua volta, l'uguaglianza (31,17) per l'operatore di Heisenberg

$$\hat{\Psi}(t, \mathbf{r}) = \exp(i\hat{H}t)\,\hat{\psi}(\mathbf{r})\exp(-i\hat{H}t),$$

di cui è facile convincersi osservando che l'operatore hamiltoniano $\hat{H}$ (per un sistema senza interazioni di spin) è reale (in modo che $\hat{H}^+ = \hat{H}$) ed è invariante rispetto all'inversione. Sottolineiamo tuttavia che la natura reale dell'opera-

Ponendo, ad esempio, $t_2 > t_1$, abbiamo perciò

$$iF^+(X_1, X_2) = \langle N+2 | \hat{\Psi}'^+(X_2)\, \hat{\Psi}'^+(X_1) | N \rangle =$$
$$= \langle N | \tilde{\hat{\Psi}}'^+(X_1)\, \tilde{\hat{\Psi}}'^+(X_2) | N+2 \rangle =$$
$$= \langle N | \hat{\Psi}'(-X_1)\, \hat{\Psi}'(-X_2) | N+2 \rangle = iF(-X_1, -X_2),$$

ossia $F^+(X) = F(-X)$. Tenuto conto della (31,15), ne deriva l'uguaglianza cercata

$$F^+(X) = F(X). \tag{31,18}$$

Esprimendo la funzione $F(X)$ attraverso gli elementi matriciali degli operatori $\psi$, si può ottenere per $F(\omega, \mathbf{p})$ uno sviluppo analogo a quello (31,8) e precisare in questo modo la questione relativa ai poli di questa funzione; senza soffermarci su ciò, limitiamoci ad indicare che i poli della funzione $F(\omega, \mathbf{p})$ coincidono con quelli della funzione $G(\omega, \mathbf{p})$.

Per concludere questo paragrafo, calcoliamo la funzione di Green $G^{(0)}$ per un gas di Bose perfetto. Poiché tutte le particelle di questo gas sono condensate nello stato fondamentale, si deve osservare che l'operatore di distruzione delle particelle « sopra condensato » $\hat{\Psi}'$, agendo sulla funzione d'onda dello stato fondamentale, l'annulla. Pertanto la funzione $G^{(0)}(t, \mathbf{r})$ è non nulla soltanto per $t = t_1 - t_2 > 0$ (quando, secondo la (31,2), il primo ad agire è l'operatore di creazione $\hat{\Psi}'^+$).

Sebbene per un gas perfetto il potenziale chimico $\mu = 0$, trascuriamo questo fatto considerando $\mu$ un parametro libero non definito preliminarmente; ciò è necessario per l'uso ulteriore della funzione $G^{(0)}$ nella tecnica dei diagrammi per un liquido qualsiasi in cui $\mu$ funge da parametro di questo tipo. Ciò premesso, scriviamo l'operatore $\hat{\Psi}'_0(t, \mathbf{r})$ nella forma

$$\hat{\Psi}'_0(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \hat{a}_{\mathbf{p}} \exp\left[ i \left( \mathbf{pr} - \frac{p^2}{2m} t + \mu t \right) \right] \tag{31,19}$$

(differente dalla (26,1) per il termine $i\mu t$ nell'esponenziale). Sostituendo questa espressione nella definizione di $G^{(0)}$, secondo la (31,2), osserviamo che, prendendo la media (calcolando cioè l'elemento matriciale diagonale), soltanto i prodotti $\hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}^+_{\mathbf{p}}$ e $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}$ possono fornire

---

tore hamiltoniano suppone l'assenza di movimento superfluido macroscopico nel liquido. Per il sistema di Bose con condensato l'operatore hamiltoniano dipende da un parametro macroscopico, ossia dalla funzione d'onda condensata $\Xi$. In un liquido animato dal moto questo parametro è complesso e con esso è complesso (ma, ovviamente, hermitiano) anche l'operatore hamiltoniano.

un risultato non nullo; ma poiché nello stato fondamentale del gas i numeri di riempimento di tutti gli stati delle particelle con $\mathbf{p} \neq 0$ sono nulli, allora

$$\langle \hat{a}_{\mathbf{p}}^{+} \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle = 0, \quad \langle \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^{+} \rangle = 1.$$

Passando in seguito, nel modo usuale, dalla sommatoria su $\mathbf{p}$ all'integrazione, otteniamo

$$G^{(0)}(t, \mathbf{r}) = \\ = \begin{cases} -i \int \exp\left[-i \frac{p^2}{2m} t + i\mu t + i\mathbf{pr}\right] \frac{d^3p}{(2\pi)^3} & \text{per} \quad t > 0, \\ 0 \quad \text{per} \quad t < 0. \end{cases} \tag{31,20}$$

Di qui ricaviamo la funzione di Green nella rappresentazione degli mpulsi

$$G^{(0)}(\omega, \mathbf{p}) = -i \int_0^\infty \exp\left(-i \frac{p^2}{2m} t + i\mu t + i\omega t\right) dt.$$

L'integrazione va eseguita mediante la formula

$$\int_0^\infty e^{i\alpha t} dt = \frac{i}{\alpha + i0} \tag{31,21}$$

(nell'espressione integranda introduciamo il fattore $e^{-\lambda t}$ con $\lambda > 0$ dopo di che passiamo al limite per $\lambda \to 0$). Infine otteniamo

$$G^{(0)}(\omega, \mathbf{p}) = \left[\omega - \frac{p^2}{2m} + \mu + i0\right]^{-1}. \tag{31,22}$$

Per quanto riguarda la funzione $F$, per un gas perfetto si ha $F^{(0)}(X) = 0$, come è immediato dalla definizione (31,13), nella quale entrambi gli operatori annichilano le particelle « sopra condensato ». Pertanto anche nella rappresentazione degli impulsi si ha

$$F^{(0)}(\omega, \mathbf{p}) = 0. \tag{31,23}$$

Questa uguaglianza esprime il fatto che le particelle « sopra condensato » compaiono (per $T = 0$) soltanto per interazione.

## PROBLEMA

Trovare la funzione di Green del campo fononico, definita come

$$D(X_1, X_2) \equiv D(X_1 - X_2) = -i \langle T\hat{\rho}'(X_1)\hat{\rho}'(X_2)\rangle, \tag{1}$$

dove la parentesi angolare significa la media rispetto allo stato fondamentale del campo; $\hat{\rho}'$ è l'operatore di densità ricavato dalla (24,10) e il prodotto cronologico si sviluppa in base alla regola (31,2).

*Soluzione.* Portando la (24,10) nella definizione (1) vediamo che, essendo nulli nello stato fondamentale tutti i numeri di riempimento degli stati fononici, soltanto le medie $\langle \hat{c}_{\mathbf{k}} \hat{c}^{+}_{\mathbf{k}} \rangle = 1$ sono diverse da zero. Passando in seguito dalla somma su $\mathbf{k}$ all'integrazione, otteniamo

$$D(t, \mathbf{r}) = \int \frac{\rho k}{2iu} e^{i(\mathbf{kr} \mp ukt)} \frac{d^3k}{(2\pi)^3},$$

dove i segni negativo e positivo all'esponente si riferiscono a $t > 0$ e $t < 0$, rispettivamente (nell'integrale per $t < 0$ è stato eseguito il cambiamento di variabile d'integrazione $\mathbf{k} \to -\mathbf{k}$). L'espressione integranda (senza il fattore $e^{i\mathbf{kr}}$) è già una componente dello sviluppo di Fourier della funzione $D(t, \mathbf{r})$ nelle coordinate. Sviluppando allo stesso modo nel tempo, otteniamo la funzione di Green nella rappresentazione degli impulsi

$$D(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\rho k}{2iu} \left\{ \int_0^{\infty} e^{i(\omega - uk)t} dt + \int_{-\infty}^{0} e^{i(\omega + ik)t} dt \right\}.$$

L'integrazione va effettuata in base alla formula (31,21):

$$D(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\rho k}{2u} \left[ \frac{1}{\omega - uk + i0} - \frac{1}{\omega + uk - i0} \right] = \frac{\rho k^2}{\omega^2 - u^2 k^2 + i0}.$$

## § 32. *Tecnica dei diagrammi per il liquido di Bose*

La costruzione ulteriore della tecnica dei diagrammi per il calcolo delle funzioni di Green di un sistema di Bose è la stessa che è stata fatta nei §§ 12-13 per i sistemi di Fermi. Come là, formuliamo le regole di questa tecnica per un sistema con interazione a due a due fra le particelle, che viene descritta dall'operatore

$$\hat{V}(t) = \frac{1}{2} \int \hat{\Psi}^{+}(t, \mathbf{r}_1) \hat{\Psi}^{+}(t, \mathbf{r}_2) U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times$$
$$\times \hat{\Psi}(t, \mathbf{r}_2) \hat{\Psi}(t, \mathbf{r}_1) d^3x_1 d^3x_2. \qquad (32,1)$$

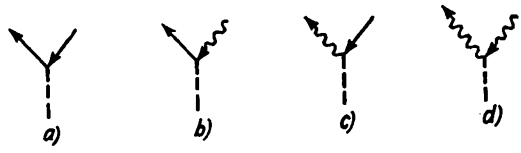
La cosa specifica dei liquidi di Bose con condensato è, soprattutto, che tutti gli operatori $\psi$ di Heisenberg devono essere rappresentati nella forma $\hat{\Psi} = \hat{\Psi}' + \Xi$, dove $\hat{\Psi}'$ è la loro parte « sopra condensato » e $\Xi$ la funzione d'onda condensata rappresentante semplicemente un numero reale $\sqrt{n_0}$ [1]) (per un liquido fisso). Dopo questa sostituzione l'operatore (32,1) si decompone in più termini contenenti da quattro a zero operatori $\hat{\Psi}'$ (assieme con un numero additivo corrispondente di fattori $\sqrt{n_0}$).

Quanto detto al § 12 relativamente al passaggio alla rappresentazione dell'interazione resta completamente in vigore, e lo sviluppo ulteriore delle espressioni che si ottengono viene realizzato

[1]) Sottolineiamo quanto segue: siccome questa grandezza si ottiene per separazione in parti di un operatore $\psi$ (di Heisenberg) esatto, allora $n_0$ è il valore esatto della densità del condensato nel liquido (per $T = 0$).

mediante il teorema di Wick (con la sola differenza che la permutazione degli operatori $\psi$ nel prodotto, la cui media deve essere calcolata, non richiede il cambiamento di segno). La diversità dei termini in cui si decompone l'operatore (32,1) implica, tuttavia, la comparsa di elementi nuovi nei diagrammi di Feynman. Descriviamo questi elementi nuovi direttamente nella rappresentazione degli impulsi definitiva.

A ciascun vertice del diagramma convergono, come prima, tre linee: una tratteggiata (cui è messo in corrispondenza il fattore $-iU(Q)$ di quadrimpulso $Q = (q_0, \mathbf{q})$) e due linee di particelle (una d'entrata e l'altra d'uscita). Ma in questo caso si devono distinguere le particelle condensate da quelle « sopra condensato ». Le linee continue esprimeranno ora le particelle « sopra condensato », e a una linea di questo tipo (di quadrimpulso $P = (\omega, \mathbf{p})$) corrisponde, come prima, il fattore $iG^{(0)}(P)$. Le linee di particelle condensate, invece, verranno rappresentate ondulate; a queste linee viene attribuito il quadrimpulso $P = 0$ e messo in corrispondenza il fattore $\sqrt{n_0}$ [1]. Quindi, otteniamo vertici di quattro tipi:




(32,2)

(i vertici con una o due linee ondulate sono detti *incompleti*). In ogni vertice deve essere verificata la « legge di conservazione del quadrimpulso »; perciò nei vertici *b* e *c* il quadrimpulso della linea tratteggiata coincide con quello della linea continua, e nel vertice *d* il quadrimpulso è nullo. Le linee ondulate sono sempre linee esterne del diagramma, cioè aventi soltanto un estremo congiunto mentre l'altro resta libero.

Ogni diagramma, che fa parte della definizione della funzione di Green $G(P)$, ha due linee esterne continue di quadrimpulso $P$ (una d'entrata e l'altra d'uscita) e, per di più, può possedere un certo numero (pari) di linee esterne ondulate; i numeri completi di estremi d'entrata e d'uscita in ogni diagramma sono gli stessi (il che esprime la conservazione del numero completo di particelle nel sistema: condensate insieme con quelle « sopra condensato »). Così come per i sistemi di Fermi (e per la stessa ragione; vedi il § 13), sono ammissibili soltanto diagrammi che non si dividono in due

[1]) Più precisamente, alla linea ondulata d'entrata deve corrispondere nel vertice il fattore $\Xi$ e a quella d'uscita il fattore $\Xi^*$; data la natura reale di $\Xi$, questi fattori sono di fatto identici.

(o più) parti non connesse reciprocamente. A differenza del caso di un sistema di Fermi, la regola, che definisce il segno generale con il quale i diagrammi entrano in $iG$, cambia: tutti i diagrammi entrano con segno uguale (cioè va eliminata la regola 3, data alla pag. 74).

Ognuna delle linee tratteggiate del diagramma ha ai suoi due estremi un vertice completo o incompleto. Tuttavia, questi non possono essere due vertici del tipo (32,2d): non avendo un estremo continuo, in generale, tale figura non può essere associata al diagramma della funzione di Green. Non possono esserlo neanche i vertici dei tipi (32,2d) e (32,2c) (oppure dei tipi (32,2d) e (32,2b)): in presenza di tre estremi ondulati la conservazione del quadrimpulso nei vertici implicherebbe in questa figura l'annullamento anche del quadrimpulso del quarto estremo, vale a dire che si avrebbe una figura a quattro estremi condensati (ondulati).

Tuttavia, un numero notevole di diagrammi in ogni ordine della teoria delle perturbazioni, costruiti in base alle regole suindicate, si annulla identicamente. La causa di questa scomparsa è dovuta all'assenza nello stato fondamentale del gas di Bose perfetto di particelle « sopra condensato ». Ciò si vede in modo particolarmente chiaro studiando l'origine dei diagrammi nella rappresentazione delle coordinate: sono nulle tutte le convoluzioni della forma $\langle \hat{\Psi}'^{+} \hat{\Psi}' \rangle$ in cui l'operatore di annichilazione delle particelle « sopra condensato » sta a destra e agisce per primo sullo stato fondamentale; restano unicamente convoluzioni della forma $\langle \hat{\Psi}' \Psi'^{+} \rangle$ [1].

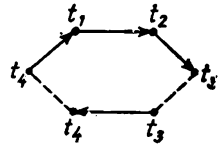
Così si annullano i diagrammi con linea continua « chiusa su se stessa »: questa linea deriva dalla convoluzione $\langle \hat{\Psi}'^{+} (t, \mathbf{r}) \hat{\Psi}' (t, \mathbf{r}) \rangle$ rappresentante la densità di particelle « sopra condensato ». Inoltre, sono nulli i diagrammi contenenti una linea continua chiusa da una curva tratteggiata:

Questa linea deriva dalla convoluzione $\langle \hat{\Psi}'^{+} (t, \mathbf{r}_2) \hat{\Psi}' (t, \mathbf{r}_1) \rangle$ di due operatori $\psi$ all'interno di un medesimo operatore d'interazione $\hat{V}(t)$ in cui gli $\hat{\Psi}'^{+}$ stanno a sinistra di $\hat{\Psi}'$.

Infine, sono nulli tutti i diagrammi nei quali si può percorrere un contorno chiuso lungo una successione di linee continue e tratteggiate in modo tale che le direzioni delle linee continue su tutto il contorno siano identiche. Tracciamo un contorno di questo genere

[1]) Per ragione analoga si annullavano alcuni diagrammi per la diffusione di due particelle nel vuoto; vedi il § 16.

indicando nei punti estremi delle linee gli argomenti temporali degli operatori $\psi$:




Gli argomenti nei punti estremi di ogni linea tratteggiata sono uguali [1]). Quanto agli argomenti delle funzioni $G^{(0)}$ corrispondenti alle linee continue, essi sono uguali alle differenze $t_2 - t_1$, $t_3 - t_2$, $t_4 - t_3$, $t_1 - t_4$; quale che sia il contorno chiuso, la loro somma sarà nulla, in modo che almeno uno degli argomenti è negativo e la funzione corrispondente $G^{(0)}$ si annulla.

Le suddette regole si riferiscono anche ai diagrammi che definiscono una funzione di Green anomala, con la sola differenza che entrambe le linee esterne continue devono essere d'uscita (per la funzione $F$) o entrambe d'entrata (per la funzione $F^+$). Corrispondentemente i numeri di linee ondulate d'entrata e d'uscita in questi diagrammi diventano diversi, affinché il numero generale di tutte le linee d'uscita resti uguale al numero generale di linee d'entrata. A una delle linee continue esterne si attribuisce il quadrimpulso $P$ e all'altra il quadrimpulso $-P$ (dove $P$ è l'argomento della funzione da definire $F(P)$ o $F^+(P)$) [2]); la somma dei quadrimpulsi di entrambe queste linee deve essere nulla in virtù della « legge di conservazione del quadrimpulso » applicata al diagramma nel suo insieme.

Le funzioni di Green calcolate mediante la tecnica dei diagrammi contengono due parametri: il potenziale chimico $\mu$ e la densità del condensato $n_0$; occorre ancora legare questi parametri alla densità del liquido $n = N/V$. Una relazione fra queste tre grandezze viene fornita dalla formula (31,6) che deriva immediatamente dalla definizione di funzione di Green. Come seconda relazione si può ricorrere all'equazione (33,11), che verrà dedotta più avanti e che esprime esplicitamente $\mu$ in termini di nozioni della tecnica dei diagrammi.

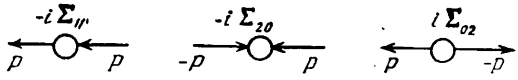
## § 33. *Funzioni autoenergetiche*

Studiamo in modo più dettagliato la struttura dei diagrammi per le funzioni di Green prendendo in considerazione la nozione di *funzione autoenergetica*, così come abbiamo fatto al § 14 per i sistemi di Fermi; consideriamo a tal fine l'insieme di tutti i diagrammi (a due

[1]) Ricordiamo che nella rappresentazione spazio-temporale dei diagrammi alla linea tratteggiata fra i punti 1 e 2 viene messo in corrispondenza il fattore $iU(X_1 - X_2)$ contenente la funzione $\delta(t_1 - t_2)$.

[2]) Essendo $F$ funzione pari del suo argomento, la scelta del segno generale di $P$ è qui inessenziale.

linee continue esterne) che non si possono tagliare in due parti con l'intersezione di una sola linea continua. Tuttavia, contrariamente al § 14, ora esistono più possibilità di orientamento delle linee esterne nei diagrammi: accanto ai diagrammi con una linea d'entrata e un'altra d'uscita esistono anche diagrammi con due linee d'uscita o con due linee d'entrata. In relazione a ciò compaiono parti autoenergetiche di tre specie:




(33,1)

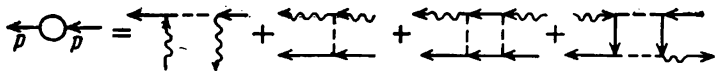
(in queste notazioni il primo indice di $\Sigma$ esprime il numero di linee continue esterne d'entrata e il secondo il numero di quelle d'uscita). Oltre alle linee esterne continue i diagrammi autoenergetici in generale hanno anche estremi liberi ondulati (condensati). Questi estremi entrano in certe funzioni autoenergetiche indicate qui con un cerchietto. Noi vedremo più avanti che le funzioni $\Sigma_{02}(P)$ e $\Sigma_{20}(P)$ di fatto coincidono

$$\Sigma_{02}(P) = \Sigma_{20}(P). \tag{33,2}$$

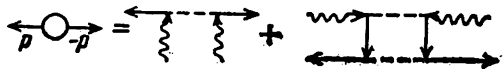
Notiamo subito anche che, data la simmetria con la quale $P$ e $-P$ entrano nella definizione di queste funzioni, queste sono pari rispetto al loro argomento:

$$\Sigma_{02}(P) = \Sigma_{02}(-P). \tag{33,3}$$

A titolo di illustrazione diamo tutti i diagrammi non nulli delle funzioni $\Sigma_{11}$ e $\Sigma_{02}$ nei due primi ordini della teoria delle perturbazioni



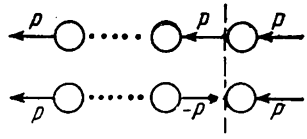

(33,4)



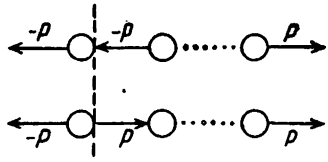

(33,5)

Costruiamo ora le equazioni esprimenti le funzioni esatte $G$ e $F$ mediante le funzioni autoenergetiche.

Nei termini della teoria delle perturbazioni la differenza $G(P) - G^{(0)}(P)$ viene espressa dalla somma di un numero infinito di diagrammi, ossia di successioni della forma

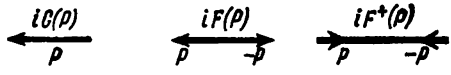



composte di numeri diversi di cerchietti, congiunti in tutti i modi possibili da frecce nelle direzioni diretta e inversa (rispetto a due estremi). Analogamente la funzione esatta $F$ (la funzione $F^{(0)} \equiv 0$) verrà espressa dalla somma di successioni in cui due frecce estreme hanno direzioni opposte:



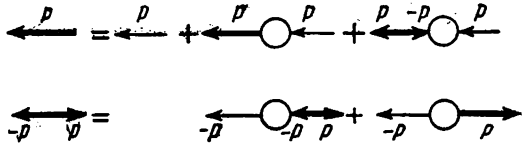

Tagliando in tutte queste successioni l'anello estremo (il cerchietto con la freccia), così come indicato con una verticale tratteggiata, l'insieme dei diagrammi restanti con direzioni identiche delle frecce estreme coinciderà con la funzione esatta $G$, e l'insieme dei diagrammi con direzioni opposte delle frecce estreme darà la funzione esatta $F$.

Introduciamo la notazione grafica di queste funzioni con frecce uni- e bidirezionali in grassetto




(33,6)

Allora le affermazioni fatte si possono scrivere in forma di uguaglianze grafiche composte di diagrammi a scheletro:




(33,7)

(vedi l'equazione analoga (14,4)). In forma analitica queste uguaglianze danno [1])

$$\begin{aligned} G(P) &= [1 + \Sigma_{11}(P)\, G(P) + \Sigma_{20}(P)\, F(P)]\, G^{(0)}(P), \\ F(P) &= G^{(0)}(-P)\, [\Sigma_{11}(-P)\, F(P) + \Sigma_{02}(P)\, G(P)]. \end{aligned} \tag{33,8}$$

Risolvendo queste equazioni rispetto a $G$ e $F$ e sostituendo l'espressione (31,22) per $G^{(0)}$, otteniamo le formule cercate

$$G(P) = \frac{1}{D}\left[\omega + \frac{p^2}{2m} - \mu + \Sigma_{11}(-P)\right], \quad F(P) = -\frac{1}{D}\,\Sigma_{02}(P), \tag{33,9}$$

dove

$$D = [\Sigma_{02}(P)]^2 - \left[\Sigma_{11}(P) - \omega - i0 + \frac{p^2}{2m} - \mu\right] \times \\ \times \left[\Sigma_{11}(-P) + \omega - i0 + \frac{p^2}{2m} - \mu\right]. \tag{33,10}$$

Sottolineiamo che queste relazioni sono indipendenti dalla struttura delle funzioni autoenergetiche e perciò non sono legate all'ipotesi che l'interazione fra le particelle sia a due a due, in modo che sono valide per un liquido di Bose qualsiasi.

L'energia delle eccitazioni elementari nel liquido in dipendenza dell'impulso **p** viene definita dai poli delle funzioni $G$ e $F$ rispetto alla variabile $\omega$. Per impulsi **p** piccoli queste eccitazioni sono dei fononi e la loro energia tende a zero con **p**. Pertanto la funzione (33,10) deve annullarsi per $\mathbf{p} = 0$, $\omega = 0$. Di qui troviamo l'uguaglianza

$$[\Sigma_{11}(0) - \mu]^2 = \Sigma_{02}^2(0).$$

Questa uguaglianza come equazione in $\mu$ ha due radici delle quali si deve considerare

$$\mu = \Sigma_{11}(0) - \Sigma_{02}(0). \tag{33,11}$$

Infatti, nel limite delle onde lunghe l'operatore $\psi$ viene dato dall'espressione (27,2) e la sua parte «sopra condensato» vale $\hat{\Psi}' = \hat{\Psi} - \sqrt{n_0} \approx i\sqrt{n_0}\hat{\Phi}$, in modo che $\hat{\Psi}'^{+} = -\hat{\Psi}'$ e, inoltre, $F \approx -G$; quest'ultima uguaglianza si verifica per la radice (33,11) quando i numeratori nella (33,9) (nel limite $P \to 0$) differiscono soltanto per il segno. L'uguaglianza (33,11) è appunto quella seconda relazione (vedi la fine del § 32) che, assieme alla relazione (31,6) dà la possibilità di esprimere i parametri $\mu$ e $n_0$ in funzione della densità $n$ del liquido.

---

[1]) Si potrebbe scrivere un sistema analogo per $G$ e $F^+$ che differirebbe dalla (33,8) per la sola sostituzione reciproca di $\Sigma_{02}$ e $\Sigma_{20}$. Poiché $F = F^+$, ne segue l'uguaglianza (33,2).

Lo sviluppo ulteriore dell'espressione (33,10) in serie di $\omega$ e $\mathbf{p}$ determina la forma della funzione di Green nel dominio dei valori piccoli dei suoi argomenti. In questo caso si deve tener presente che le funzioni scalari $\Sigma_{11}$ e $\Sigma_{02}$ si sviluppano in potenze di $\mathbf{p}^2$, e lo sviluppo della funzione $\Sigma_{02}$ pari rispetto a tutti i suoi argomenti contiene soltanto le potenze pari anche della variabile $\omega$. Rappresentando la (33,10) nella forma

$$D=\left\{\omega-\frac{1}{2}\left[\Sigma_{11}(P)-\Sigma_{11}(-P)\right]\right\}^2-$$

$$-\left\{\frac{p^2}{2m}-\mu+\frac{1}{2}\left[\Sigma_{11}(P)+\Sigma_{11}(-P)\right]\right\}^2+\Sigma_{02}^2(P),$$

concludiamo immediatamente che i primi termini dello sviluppo che non scompaiono hanno la forma $D=$ costante $(\omega^2-u^2p^2+i0)$, dove $u$ è una costante rappresentante, evidentemente, la velocità del suono nel liquido. Osservando anche che, in virtù della (33,11), i numeratori nella (33,9) per $\omega$, $\mathbf{p}\to 0$ differiscono soltanto per il segno, troviamo che

$$G=-F=\frac{\text{costante}}{\omega^2-u^2p^2+i0}$$

(la regola di aggiramento è definita dal confronto con la (31,81)).

Si può determinare il valore della costante a numeratore calcolando in base a questa funzione di Green la distribuzione degli impulsi delle particelle $N(\mathbf{p})$ (per $\mathbf{p}$ piccoli) e confrontandola con la già nota distribuzione (27,7). L'integrale

$$N(\mathbf{p})=i\lim_{t\to -0}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega,\mathbf{p})\,e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}$$

(vedi la (7,23)) si calcola chiudendo il cammino d'integrazione con una semicirconferenza indefinitamente lontana nel semipiano superiore (vedi la nota alla fine del § 7) e si trova corrispondentemente mediante il residuo nel polo $\omega=-up+i0$. Infine otteniamo $N(\mathbf{p})=$ costante$/2up$ e il confronto con la (27,7) dà costante $=$ $=n_0mu^2/n$. Quindi, otteniamo la seguente espressione per le funzioni di Green per $\omega$ e $\mathbf{p}$ piccoli:

$$G=-F=\frac{n_0mu^2}{n(\omega^2-u^2p^2+i0)}. \qquad (33,12)$$

Notiamo che il coefficiente di questa funzione coincide (a meno del coefficiente di normalizzazione) con la funzione di Green del campo fononico (vedi il problema del § 31), risultato del tutto naturale in quanto nel dominio degli $\omega$, $\mathbf{p}$ piccoli tutte le eccitazioni elementari in un liquido di Bose sono dei fononi.

Illustriamo infine le formule ottenute applicandole al modello di un gas di Bose quasi-perfetto con interazione a due a due fra le particelle, studiato al § 25. Nella prima approssimazione della teoria delle perturbazioni, $\Sigma_{11}$ e $\Sigma_{02}$ vengono determinate dai due primi diagrammi (33,4) e dal primo diagramma (33,5). Sviluppandole in forma analitica, otteniamo

$$\Sigma_{11} = n_0 [U_0 + U(\mathbf{p})], \quad \Sigma_{02} = n_0 U(\mathbf{p}).$$

Con la stessa approssimazione si può sostituire la densità del condensato $n_0$ in queste formule con la densità totale del gas $n$. Come è stato detto al § 25, in questo modello gli impulsi delle particelle del gas si possono supporre piccoli per cui le componenti di Fourier $U(\mathbf{p})$ si possono sostituire con il loro valore $U_0$ per $\mathbf{p} = 0$. Allora

$$\Sigma_{11} = 2nU_0, \quad \Sigma_{02} = nU_0. \tag{33,13}$$

La sostituzione di queste espressioni nella (33,11) dà $\mu = nU_0$, ciò che è in pieno accordo con la (25,6). La sostituzione, invece, nelle (33,9-10) conduce alle seguenti formule per le funzioni di Green:

$$\begin{aligned} G(\omega, \mathbf{p}) &= \frac{\omega + p^2/2m + nU_0}{\omega^2 - \varepsilon^2(p) + i0}, \\ F(\omega, \mathbf{p}) &= \frac{-nU_0}{\omega^2 - \varepsilon^2(p) + i0}, \end{aligned} \tag{33,14}$$

dove

$$\varepsilon(p) = \left[\left(\frac{p^2}{2m}\right)^2 + \frac{p^2}{m} nU_0\right]^{1/2}.$$

Dalla forma dei denominatori di queste funzioni risulta con chiarezza che $\varepsilon(p)$ è l'energia delle eccitazioni elementari in pieno accordo con i risultati (25,10-11) ottenuti prima in un altro modo.

## § 34. *Disintegrazione delle quasi-particelle*

La durata finita della vita (smorzamento) della quasi-particella nel liquido quantistico può essere legata sia alle sue collisioni con altre quasi-particelle, sia alla sua disintegrazione spontanea in due (o più) nuove quasi-particelle. Alla temperatura $T \to 0$ la prima sorgente di smorzamento scompare (poiché la probabilità di collisioni tende a zero assieme alla densità del numero di quasi-particelle), e allora lo smorzamento è dovuto unicamente alla disintegrazione delle quasi-particelle.

Consideriamo la disintegrazione di una quasi-particella (con impulso $\mathbf{p}$) in due. Se $\mathbf{q}$ è l'impulso di una delle quasi-particelle comparse, allora l'impulso dell'altra è $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ e la legge di conservazione dell'energia fornisce la condizione

$$\varepsilon(p) = \varepsilon(q) + \varepsilon(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|). \tag{34,1}$$

Può succedere che in un certo dominio dei valori di $p$ questa uguaglianza non si verifichi per nessun $\mathbf{q}$; allora in questo dominio le quasi-particelle saranno in generale non smorzate (qualora sia impossibile anche la disintegrazione in un numero più grande di quasi-particelle). Al variare di $p$ lo smorzamento si produce per il valore $p = p_c$ (soglia di disintegrazione) per il quale compaiono per la prima volta le radici dell'equazione (34,1).

Notiamo anzitutto che nel punto $p = p_c$ il secondo membro dell'uguaglianza (34,1) come funzione di $\mathbf{q}$ ha un estremo. Infatti, il valore estremale della somma $\varepsilon(q) + \varepsilon(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|)$ per un dato $p$ sia $E(p)$ (per fissare le idee, supporremo minimo questo valore). Allora il secondo membro dell'equazione

$$\varepsilon(p) - E(p) = \varepsilon(q) + \varepsilon(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|) - E(p)$$

è non negativo. Per questa ragione l'equazione a priori non ha radici per i valori di $p$ per i quali $\varepsilon(p) - E(p) < 0$; la radice compare soltanto nel punto $p = p_c$ in cui $\varepsilon(p_c) = E(p_c)$.

Rappresentando l'equazione (34,1) nella forma simmetrica

$$\varepsilon(p) = \varepsilon(q_1) + \varepsilon(q_2), \quad \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \mathbf{p},$$

vediamo che la condizione di estremo per il suo secondo membro si può scrivere come $\partial\varepsilon/\partial\mathbf{q}_1 = \partial\varepsilon/\partial\mathbf{q}_2$ ossia

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2, \tag{34,2}$$

vale a dire che nel punto di soglia due particelle disintegrate hanno velocità uguali. Qui si possono distinguere più casi (*L. P. Pitaevskij*, 1959).

a) La velocità della quasi-particella nel liquido di Bose è nulla per impulso $p = p_0$ corrispondente al minimo rotonico sulla curva della fig. 2. Pertanto se $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = 0$, ciò significa che nel punto di soglia la quasi-particella si decompone in due rotoni di impulsi $p_0$ ed energie $\Delta$. Rispettivamente l'energia della quasi-particella che si disintegra è $\varepsilon(p_c) = 2\Delta$ e il suo impulso $p_c$ è legato a $p_0$ dalla condizione $\mathbf{p}_c = \mathbf{p}_{01} + \mathbf{p}_{02}$, cioè $2p_0 \cos\theta = p_c$, dove $2\theta$ è l'angolo formato dalle direzioni di volo dei due rotoni. Ne consegue che in ogni caso deve essere

$$p_c < 2p_0. \tag{34,3}$$

b) Se le velocità $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ non sono nulle e se gli impulsi corrispondenti $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{q}_2$ sono finiti, ciò significa che la disintegrazione nel punto di soglia produce due quasi-particelle con impulsi collineari (paralleli o antiparalleli) [1].

[1]) In virtù dell'isotropia del liquido le direzioni dell'impulso $\mathbf{p}$ della quasi-particella e della sua velocità $\mathbf{v} = \partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$ sono collineari, ma possono essere orientate sia in direzioni uguali che opposte.

c) Se le velocità $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono diverse da zero, ma uno degli impulsi ($\mathbf{q}_1$, ad esempio) tende a zero nell'intorno del punto di soglia, la quasi-particella corrispondente sarà un fonone e la velocità $v_1 = u$. In questo caso abbiamo a che fare con una soglia oltre la quale è possibile la creazione di un fonone dalla quasi-particella. Nel punto di soglia stesso l'energia del fonone è nulla, mentre la velocità della quasi-particella raggiunge la velocità del suono (coincidendo con le velocità $v_1 = v_2 = u$).

d) Infine, ancora un caso particolare è la disintegrazione del fonone in due fononi allorché la soglia è il punto iniziale dello spettro $p = 0$. Tuttavia, questa disintegrazione è possibile soltanto per un determinato segno di curvatura della zona iniziale (fononica) dello spettro: deve essere $d^2\varepsilon(p)/dp^2 > 0$, vale a dire che la curva $\varepsilon(p)$ si deve incurvare in alto rispetto alla tangente iniziale $\varepsilon = up$. È facile convincersene rappresentando questa zona dello spettro nella forma

$$\varepsilon(p) \approx up + \alpha p^3, \tag{34,4}$$

in cui si è tenuto conto, oltre che del termine lineare, anche del termine successivo dello sviluppo in potenze dell'impulso piccolo [1]. Allora l'equazione di conservazione dell'energia (34,1) dà

$$u(p - q - |\mathbf{p} - \mathbf{q}|) = -\alpha(p^3 - q^3 - |\mathbf{p} - \mathbf{q}|^3).$$

In prossimità della soglia il fonone viene emesso sotto un angolo piccolo $\theta$ nella direzione dell'impulso iniziale $\mathbf{p}$ della quasi-particella; a primo membro dell'equazione abbiamo

$$p - q - |\mathbf{p} - \mathbf{q}| \approx -\frac{pq}{p-q}(1 - \cos\theta), \tag{34,5}$$

e a secondo membro è sufficiente porre $|\mathbf{p} - \mathbf{q}| \approx p - q$. Allora troviamo che

$$1 - \cos\theta = 3\alpha(p - q)^2. \tag{34,6}$$

Ne risulta immediatamente che deve essere $\alpha > 0$.

Noi vedremo più avanti (§ 35) che nei casi a) e b) la funzione $\varepsilon(p)$ in generale non può essere prolungata oltre il punto di soglia che, quindi, risulta essere punto finale dello spettro. Quanto ai casi c) e d), la disintegrazione della quasi-particella accompagnata dall'emissione di un fonone di grande lunghezza d'onda conduce alla

---

[1]) L'equazione della dispersione delle vibrazioni sonore determina il quadrato della frequenza $\omega^2$ quale funzione del vettore d'onda. Ciò premesso, il quadrato dell'energia del fonone $\varepsilon^2(p)$ si sviluppa regolarmente in potenze dell'impulso $\mathbf{p}$; lo sviluppo inizia dal termine $\sim \mathbf{p}^2$ e, in virtù dell'isotropia del liquido, prosegue in potenze di $\mathbf{p}^2$. Quanto allo sviluppo della funzione stessa $\varepsilon(p)$, esso contiene quindi le potenze dispari di $p$.

comparsa di uno smorzamento debole, che può essere determinato mediante la teoria delle perturbazioni [1]).

Calcoliamo lo smorzamento del fonone dovuto alla sua disintegrazione in due fononi (caso d)). Gli elementi matriciali di questo processo sono presenti nei termini del terzo ordine dell'operatore hamiltoniano, che sono dati dall'espressione (24,12). Durante il passaggio dallo stato iniziale ($i$) con un fonone $\mathbf{p}$ a quello finale ($f$) con due fononi $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{q}_2$ l'elemento matriciale dell'operatore di perturbazione vale

$$V_{fi} = -i\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)\frac{3!\,(2\pi\hbar)^3}{2\,(2V)^{3/2}}\left(\frac{u}{\rho}\,pq_1q_2\right)^{1/2}\left\{1+\frac{\rho^2}{3u^2}\frac{d}{d\rho}\frac{u^2}{\rho}\right\} \qquad (34,7)$$

(l'indice 0 della densità imperturbata $\rho_0$ è omesso). Notiamo la presenza del fattore $(pq_1q_2)^{1/2}$ la cui piccolezza (si tratta della disintegrazione di un fonone di grande lunghezza d'onda) garantisce l'applicabilità della teoria delle perturbazioni [2]).

La probabilità differenziale di disintegrazione (in 1 s) è data dalla formula

$$dw = \frac{2\pi}{\hbar}\,|V_{fi}|^2\,\delta(E_f-E_i)\,\frac{V^2 d^3q_1 d^3q_2}{(2\pi\hbar)^6}$$

(vedi III, la formula (43,1)). Sostituendovi l'espressione (34,7), compare il quadrato della funzione $\delta$, il quale deve essere inteso come [3])

$$[\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)]^2 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2). \qquad (34,8)$$

La funzione delta restante va eliminata per integrazione in $d^3q_2$; ponendo inoltre $E_i = up$, $E_f = u\,(q_1+q_2)$, otteniamo

$$w = \frac{1}{2}\left\{1+\frac{\rho^2}{3u^2}\frac{d}{d\rho}\frac{u^2}{\rho}\right\}^2\frac{9\pi}{4\hbar\rho}\int pq_1\,(p-q_1)\,\delta(p-q_1-|\mathbf{p}-\mathbf{q}_1|)\,\frac{d^3q_1}{(2\pi\hbar)^3}$$

---

[1]) Quali dei casi elencati possono effettivamente essere realizzati, dipende dall'andamento concreto della curva $\varepsilon\,(p)$ dello spettro delle quasi-particelle. I dati empirici relativi all'elio liquido ($He^4$) testimoniano che esiste (a pressioni $<15$ atm) una piccola zona iniziale dello spettro fononico che ha instabilità del tipo del caso d). Lo spettro nell'elio liquido ha termine in un punto del tipo del caso a).

[2]) Calcolando l'elemento matriciale (34,7), si deve tener conto che ognuno degli operatori fononici $\hat{c}_{\mathbf{p}}$ e $\hat{c}^{+}_{\mathbf{p}}$ può essere ricavato da ciascuno dei tre fattori di $\hat{\rho}$ o $\hat{\mathbf{v}}$; di qui il fattore 3!. La funzione delta nella (34,7) compare per integrazione del fattore $\exp\,[i\,(\mathbf{p}-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)\,\mathbf{r}/\hbar]$. Infine, si è tenuto conto che le direzioni $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{q}_2$ sono quasi coincidenti.

[3]) Infatti, la funzione delta $\delta\,(\mathbf{k})$ viene dall'integrale $\int e^{i\mathbf{kr}}\,d^3x/(2\pi)^3$. Se calcoliamo un altro integrale di questo tipo per $\mathbf{k}=0$ (poiché una funzione delta già esiste) ed estendiamo l'integrazione a un volume finito $V$, allora otteniamo $V/(2\pi)^3$, ciò che è espresso dalla formula (34,8).

(per integrazione separata in $d^3q_1$ e in $d^3q_2$ la risposta deve essere divisa per 2 così da tener conto dell'identità dei due fononi). Infine, esprimendo l'argomento della funzione delta nella forma (34,5) ed eseguendo l'integrazione in $d^3q_1 = 2\pi q_1^2\, dq_1 d\cos\theta$ (nel dominio $b_1 \leqslant p$), troviamo la probabilità totale di disintegrazione

$$w = \frac{3p^5}{320\pi\rho\hbar^4}\left\{1 + \frac{\rho^2}{3u^2}\frac{d}{d\rho}\frac{u^2}{\rho}\right\}^2. \tag{34,9}$$

Il coefficiente di smorzamento del fonone è $\gamma \equiv -\mathrm{Im}\,\varepsilon = \hbar w/2$. In particolare, per un gas quasi-perfetto la grandezza $u^2/\rho \approx 4\pi\hbar^2 a/m^3$ è indipendente dalla densità in accordo con la (25,11). In questo caso

$$\gamma = \frac{3p^5}{640\pi\hbar^3\rho} \tag{34,10}$$

(*S. T. Beljaev*, 1958).

Per il processo di emissione di un fonone dalla quasi-particella in prossimità della soglia del tipo c) la forma dell'operatore di perturbazione viene stabilita considerando la variazione dell'energia della quasi-particella in un'onda sonora. Questa variazione è composta di due parti

$$\delta\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\rho' + \mathbf{vp}.$$

Il primo termine è legato alla variazione della densità del liquido dalla quale l'energia della quasi-particella dipende come da un parametro. Il secondo termine (in cui $\mathbf{v}$ rappresenta la velocità del liquido nell'onda sonora) è la variazione dell'energia della quasi-particella grazie al movimento macroscopico del liquido; poiché la lunghezza d'onda del fonone emesso (in prossimità della soglia) è grande rispetto alla lunghezza d'onda della quasi-particella, si può supporre che quest'ultima si trovi in un flusso omogeneo di liquido, e allora la variazione dell'energia va determinata così come è stato indicato all'inizio del § 23. L'operatore di perturbazione si ricava da $\delta\varepsilon$ sostituendo $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ e $\rho'$ con gli operatori di seconda quantizzazione (24,10) e $\mathbf{p}$ con l'operatore d'impulso della quasi-particella $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$:

$$\hat{V} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\hat{\rho}' + \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{v}}) \tag{34,11}$$

(nel secondo termine è stata eseguita la simmetrizzazione del prodotto per ridurlo alla forma hermitiana). In seguito, il calcolo della probabilità di emissione di un fonone è analogo a quello eseguito sopra per la disintegrazione del fonone (vedi il problema).

PROBLEMA

Determinare la probabilità di emissione di un fonone da parte di una quasi-particella di impulso $p$ vicino al valore di soglia $p_c$, per cui la velocità della quasi-particella raggiunge quella del suono.

*Soluzione.* L'elemento matriciale dell'operatore (34,11) viene calcolato per la creazione di un fonone (di impulso $\mathbf{q}$) con la transizione contemporanea della quasi-particella fra gli stati (onde piane) di impulsi $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}'$. In prossimità della soglia l'impulso del fonone è $q \ll p_c$, mentre la direzione $\mathbf{q}$ quasi coincide con la direzione $\mathbf{p}$ [1]). Tenendone conto troviamo

$$V_{fi} = -i\,(2\pi\hbar)^3\,\delta\,(\mathbf{p}-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)\,\frac{A}{V^{3/2}}\left(\frac{qu}{2\rho}\right)^{1/2},$$

dove

$$A = p_c + \frac{\rho}{u}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\bigg|_{p=p_c}.$$

Di qui la probabilità differenziale di emissione di un fonone è

$$dw = \frac{\pi q u}{\hbar\rho}\,A^2\delta\,[\varepsilon\,(p) - \varepsilon\,(\,|\mathbf{p}-\mathbf{q}\,|\,) - uq]\,\frac{d^3q}{(2\pi\hbar)^3}$$

(la funzione delta degli impulsi è stata già eliminata con l'integrazione in $d^3p'$). Scrivendo l'argomento della funzione delta in forma approssimata $-uq\,(1-\cos\theta)$ e integrando in $d^3q$, otteniamo

$$w = \frac{2A^2\,(p-p_c)^3}{3\pi\rho\hbar^4}.$$

## § 35. *Proprietà dello spettro in prossimità del suo punto finale*

Nel presente paragrafo studieremo le proprietà dello spettro del liquido di Bose in prossimità delle soglie di disintegrazione delle eccitazioni elementari in due quasi-particelle di cui nessuna sia un fonone (i casi a) e b) del § 34) [2]). Contrariamente alle disintegrazioni accompagnate dalla creazione di un fonone, la teoria delle perturbazioni è inapplicabile a questi casi e il loro studio richiede che sia precisata la natura delle singolarità delle funzioni di Green del liquido nei punti di soglia. D'altra parte, il fatto che ci interesseranno soltanto queste singolarità permette di schematizzare sostanzialmente e, quindi, di semplificare i calcoli. In particolare, si può fare a meno della distinzione fra le funzioni $G$ e $F$ (essendone identi-

[1]) Per fissare le idee, consideriamo il caso in cui il fonone viene emesso proprio in questa direzione (e non in quella opposta). A tal fine la funzione $\varepsilon\,(p)$ in prossimità della soglia deve avere la forma

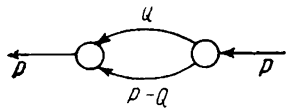
$$\varepsilon\,(p) \approx \varepsilon\,(p_c) + (p-p_c)\,u + \alpha\,(p-p_c)^2$$

(con il segno positivo del termine lineare). È facile vedere dalla legge di conservazione dell'energia che l'emissione di un fonone è possibile in questo caso se $\alpha > 0$, e si produce per $p > p_c$; l'impulso del fonone emesso assume valori nell'intervallo $0 \leqslant q \leqslant 2\,(p-p_c)$.

[2]) Il contenuto di questo paragrafo appartiene a *L. P. Pitaevskij* (1959).

che le proprietà analitiche) e agire in modo tale come se esistesse un solo tipo di funzioni di Green; se tenessimo conto della distinzione fra $G$ e $F$, ciò implicherebbe soltanto la comparsa nelle equazioni di alcuni termini analoghi (per le loro proprietà analitiche) e non inciderebbe sui risultati.

Il fatto che la singolarità in questione della funzione di Green è dovuta alla disintegrazione della quasi-particella in altre due significa, nei termini della tecnica dei diagrammi, che essa proviene da diagrammi della forma




(35,1)

che si possono tagliare in due linee continue, vale a dire che questi diagrammi contengono stati intermedi a due particelle. L'integrazione in questi diagrammi viene effettuata nel quadrimpulso intermedio $Q = (q_0, \mathbf{q})$, e il ruolo determinante (nel senso della comparsa di una singolarità) appartiene al dominio dei valori di $Q$ e $P - Q$. con i quali le quasi-particelle disintegrate (prodotti della disintegrazione) sono generate in prossimità della soglia. Per la teoria, che verrà esposta più avanti, fondamentale è l'affermazione che questo dominio di valori del quadrimpulso non è singolare per la funzione di Green $G(Q)$, che in esso ha forma ordinaria polare

$$G(Q) \equiv G(q_0, \mathbf{q}) \backsim [q_0 - \varepsilon(q) + i0]^{-1}, \qquad (35,2)$$

dove l'energia $\varepsilon(q)$ delle quasi-particelle disintegrate non ha nessuna singolarità. La specifica fisica di questo dominio consiste unicamente nel fatto che una quasi-particella potrebbe « incollarsi » in esso con un'altra; ma alla temperatura $T = 0$ questo processo è impossibile per assenza di eccitazioni reali. Per la funzione di Green il dominio singolare è rappresentato unicamente dai valori di $P$ (linee esterne dei diagrammi (35,1)) in prossimità della soglia di disintegrazione della quasi-particella iniziale.

Alle due linee congiungenti nel diagramma (35,1) corrispondono i fattori $G(Q)\,G(P - Q)$ e l'integrazione si effettua in $Q$. In questo caso, essendo essenziale soltanto un piccolo dominio di valori di $Q$, gli altri fattori del diagramma si possono supporre costanti durante l'integrazione, uguali al loro valore per il valore di soglia $Q = Q_c$ [1]).

[1]) Questa affermazione deve essere precisata. Infatti, i fattori $G(Q)\,G(P-Q)$ sono indipendenti dall'angolo $\varphi$ che determina la posizione del piano $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Perciò l'integrazione in $d\varphi$ si riduce alla media della parte restante dell'espressione integranda in $\varphi$, dopo di che $d^4Q$ si può intendere come $2\pi q^2\, dq_0\, dq\, d\cos\theta$. È per tale integrazione in $d^4Q$ che diventa essenziale il dominio piccolo. Queste osservazioni riguardano anche altri casi analoghi di calcoli che verranno eseguiti più avanti.

Quindi, nel diagramma compare un fattore che è espresso dall'integrale

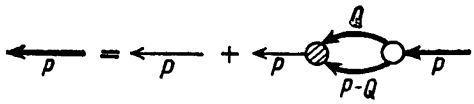
$$\Pi(P) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4Q}{[q_0 - \varepsilon(q) + i0]\,[\omega - q_0 - \varepsilon(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|) + i0]},$$

dove $P = (\omega, \mathbf{p})$. L'integrazione in $dq_0$ va eseguita chiudendo il cammino di integrazione con una semicirconferenza posta all'infinito in uno dei semipiani della variabile complessa $q_0$ e dà

$$\Pi(P) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{\omega - \varepsilon(q) - \varepsilon(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|) + i0}. \qquad (35,3)$$

Torneremo più avanti allo studio di questo integrale; e per il momento esprimiamo tramite suo la funzione esatta cercata $G(P)$ sommando a tal fine tutti i diagrammi della forma (35,1).

Per la funzione $G(P)$ si può scrivere l'equazione in diagrammi di Dyson




(35,4)

Qui le linee in grassetto rappresentano la funzione esatta $iG$ e quelle sottili la parte « non singolare » di questa funzione definibile dall'insieme dei diagrammi « non divisibili in due linee ». Il secondo termine, invece, a secondo membro della (35,4) rappresenta l'insieme dei diagrammi della forma (35,1). In questo caso, il cerchietto chiaro esprime la funzione di vertice esatta « a tre uscite » (indichiamola con $\Gamma(Q, P-Q, P)$), e il cerchietto tratteggiato ne dà la parte non singolare, dalla quale sono esclusi i diagrammi che si possono tagliare in due linee continue [1]). Come è stato precisato sopra, l'integrazione in $d^4Q$ implica la comparsa del fattore $\Pi(P)$, mentre gli altri fattori nel diagramma vanno sostituiti con il loro valore per $Q = Q_c$. In tal modo l'uguaglianza (35,4) significa che

$$G(P) = a(P) + b(P)\,G(P)\,\Gamma_c(P)\,\Pi(P), \qquad (35,5)$$

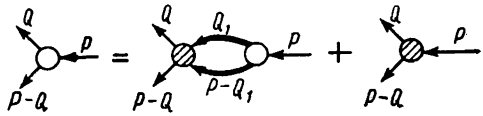
dove $\Gamma_c(P) = \Gamma(Q_c, P - Q_c, P)$ e $a(P)$, $b(P)$ sono certe funzioni regolari (in prossimità della soglia $P = P_c$).

Nella (35,5) figurano due funzioni singolari, $G$ e $\Gamma_c$; per esprimerle in funzione di $\Pi$ occorre quindi ancora un'equazione. Possiamo

[1]) La situazione è analoga qui all'equazione di Dyson in elettrodinamica quantistica (cfr. IV, § 104): come là, l'intero insieme di diagrammi richiesto si ottiene introducendo termini correttivi per una sola delle funzioni di vertice.

ottenerla osservando che la funzione di vertice $\Gamma$ è rappresentabile da una serie della forma « a scala »

analoga alla serie (17,3) per la funzione di vertice a quattro estremi. La sua sommatoria conduce all'equazione




(vedi la (17,4)); in forma analitica, per $Q \approx Q_c$, essa dà

$$\Gamma_c(P) = c(P) + d(P)\,\Pi(P)\,\Gamma_c(P),$$

dove $c(P)$ e $d(P)$ sono funzioni regolari. Escludendo ora $\Gamma_c$ dalle due equazioni ottenute, troviamo l'espressione cercata della funzione di Green attraverso $\Pi$:

$$G^{-1}(P) = \frac{A(P)\,\Pi(P)}{1 + B(P)\,\Pi(P)} + C(P), \tag{35,6}$$

dove $A$, $B$, $C$ sono di nuovo funzioni regolari (in prossimità di $P = P_c$).

Diamo i calcoli ulteriori che sono diversi per i diversi tipi di disintegrazione delle quasi-particelle.

a) *Soglia di disintegrazione in due rotoni che si disintegrano*

In questo caso l'energia $\varepsilon(q)$ delle particelle in prossimità della soglia è data dalla formula (22,6) e l'integrale (35,3) diventa

$$\Pi(\omega, q) = \int \left\{\omega - 2\Delta - \frac{1}{2m^*}\left[(q - p_0)^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (|\mathbf{p} - \mathbf{q}| - p_0)^2\right]\right\}^{-1} \frac{d^3q}{(2\pi)^3}. \tag{35,7}$$

Introduciamo le nuove variabili d'integrazione $q'_z$, $q'_\rho$ in base alla definizione

$$q_x = (p_0 \operatorname{sen}\theta + q'_\rho)\cos\varphi, \quad q_y = (p_0 \operatorname{sen}\theta + q'_\rho)\operatorname{sen}\varphi,$$
$$q_z = p_0\cos\theta + q'_z,$$

dove l'asse $z$ è diretto lungo $\mathbf{p}$ e l'angolo $\theta$ è definito dall'uguaglianza $2p_0\cos\theta = p$. In prossimità della soglia le variabili $q'_z$, $q'_\rho$ sono

piccole e con l'approssimazione necessaria otteniamo

$$q \approx p_0 + q'_\rho \operatorname{sen}\theta + q'_z \cos\theta, \quad |\mathbf{p} - \mathbf{q}| \approx p_0 + q'_\rho \operatorname{sen}\theta - q'_z \cos\theta,$$

$$d^3q \approx p_0 \operatorname{sen}\theta \, dq'_\rho \, dq'_z \, d\varphi.$$

L'espressione fra parentesi graffa nella (35,7) diventa

$$\left\{\omega - 2\Delta - \frac{1}{m^*}\left(q'^2_\rho \operatorname{sen}^2\theta + q'^2_z \cos^2\theta\right)\right\}$$

e dopo un cambio di variabili reiterato

$$q'_\rho \operatorname{sen}\theta = \sqrt{m^*}\rho\cos\psi, \quad q'_z \cos\theta = \sqrt{m^*}\rho \operatorname{sen}\psi$$

troviamo, integrando in $\psi$,

$$\Pi(\omega, \mathbf{p}) = -\frac{m^* p_0}{2\pi\cos\theta}\int \frac{\rho\, d\rho}{-\omega + 2\Delta + \rho^2}.$$

La divergenza di questo integrale per grandi $\rho$, dovuta unicamente alle omissioni fatte, è inessenziale; il taglio dell'integrale per un certo valore $\rho^2 \gg |2\Delta - \omega|$ darà un contributo soltanto alla parte regolare di $\Pi$. La parte singolare di questa funzione, che presenta interesse, proviene dal dominio in prossimità del limite d'integrazione inferiore; troviamo che essa vale

$$\Pi \backsim \ln\frac{1}{2\Delta - \omega}. \tag{35,8}$$

Per piccoli valori $2\Delta - \omega$ questo logaritmo è grande; sostituendo la (35,8) nella (35,6) e sviluppando nelle sue potenze inverse otteniamo

$$G^{-1}(\omega, p) = b + c \ln^{-1}\frac{a}{2\Delta - \omega},$$

dove $a$, $b$, $c$ sono funzioni regolari nuove di $\omega$ e $\mathbf{p}$. Nel punto di soglia ($p = p_c$) l'energia della quasi-particella che si disintegra vale $2\Delta$. Poiché l'energia delle quasi-particelle è definita dagli zeri della funzione $G^{-1}$, ciò significa che $G^{-1}(2\Delta, p_c) = 0$ e per questo deve anche essere $b(2\Delta, p_c) = 0$. Ma la funzione regolare $b(\omega, p)$ è sviluppabile in potenze intere delle differenze $p - p_c$ e $\omega - 2\Delta$; sostituendo anche le funzioni regolari $a(\omega, p)$ e $c(\omega, p)$ con i loro valori nel punto di soglia, otteniamo infine la seguente espressione per la funzione di Green nel dominio in prossimità della soglia:

$$G^{-1}(\omega, \mathbf{p}) = \beta\left[p - p_c + \alpha \ln^{-1}\frac{a}{2\Delta - \omega}\right], \tag{35,9}$$

dove $a$, $\alpha$, $\beta$ sono costanti.

Eguagliando a zero questa espressione, otterremo la forma dello spettro $\varepsilon(p)$ in prossimità della soglia. Se il dominio di impossibili-

tà di disintegrazione si trova in $p < p_c$, $\varepsilon < 2\Delta$, le costanti $\alpha$ ed $a$ devono essere positive e l'equazione $G^{-1} = 0$ ha qui la soluzione non smorzata

$$\varepsilon = 2\Delta - a \exp\left(-\frac{\alpha}{p_c - p}\right). \tag{35,10}$$

Vediamo che la curva dello spettro si avvicina al punto di soglia dalla parte della tangente orizzontale di ordine infinito. Quanto al dominio $p > p_c$, l'equazione $G^{-1} = 0$ non ha soluzioni né reali né complesse con $\varepsilon \approx 2\Delta$ per $p \approx p_c$. In questo senso la curva, in generale, non si estende oltre il punto di soglia e termina in esso [1]).

b) *Soglia di disintegrazione in due quasi-particelle con impulsi paralleli*

Poiché nel punto di soglia, per $p = p_c$, l'espressione $\varepsilon(q) + \varepsilon(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|)$ quale funzione di $\mathbf{q}$ deve avere un minimo, allora in prossimità della soglia essa diventa

$$\varepsilon(q) + \varepsilon(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|) = \varepsilon_c + v_c(p - p_c) + \alpha(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^2 + \beta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_c)^2, \tag{35,11}$$

dove $\alpha$, $\beta$ sono costanti; $v_c$ è la velocità di ognuna delle quasi-particelle generate nel punto di soglia e $\mathbf{q}_0$ l'impulso di una di esse. Sostituendo la (35,11) nella (35,3) e introducendo nuove variabili d'integrazione in base a

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0, \quad \boldsymbol{\rho}\mathbf{p}_c = \rho p_c \cos\psi,$$

otteniamo

$$\Pi(\omega, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{\rho^2\, d\rho\, d\cos\psi}{\varepsilon - \varepsilon_c - v_c(p - p_c)\, \alpha\rho^2 - \beta\rho^2 p_c^2 \cos^2\psi}.$$

Questo integrale ha nel punto di soglia la radice singolare

$$\Pi \backsim [v_c(p - p_c) - (\varepsilon - \varepsilon_c)]^{1/2}. \tag{35,12}$$

Sostituendo questa espressione nella (35,6), troviamo la funzione di Green nel dominio in prossimità della soglia

$$G^{-1}(\omega, \mathbf{p}) = A(\omega, \mathbf{p}) + B(\omega, \mathbf{p})\,[v_c(p - p_c) - (\omega - \varepsilon_c)]^{1/2}.$$

Poiché $G^{-1}(\varepsilon_c, \mathbf{p}_c) = 0$ ed $A$ e $B$ sono funzioni regolari, allora, sviluppando queste ultime in potenze di $p - p_c$ ed $\omega - \varepsilon_c$, troviamo infine

$$G^{-1} \backsim [v_c(p - p_c) - (\omega - \varepsilon_c)]^{1/2} + [a(p - p_c) + b(\omega - \varepsilon_c)], \tag{35,13}$$

dove $a$ e $b$ sono costanti.

---

[1]) Come è stato già sottolineato nella nota alla pag. 170, lo spettro nell'elio liquido termina in un punto di questo tipo (la curva della fig. 2 si avvicina alla retta $\varepsilon = 2\Delta$ dalla parte della tangente orizzontale).

La forma dello spettro è determinata dall'equazione $G^{-1}(\varepsilon, \mathbf{p}) = 0$. Cerchiamo la soluzione nella forma $\varepsilon - \varepsilon_c = v_c(p - p) + \text{costante}\,(p - p_c)^2$; affinché questa soluzione esista per $p < p_c$, è necessario che si abbia $a + bv_c > 0$, e allora

$$\varepsilon = \varepsilon_c + v_c(p - p_c) - (a + bv_c)^2 (p - p_c)^2. \tag{35,14}$$

Per la stessa condizione nel dominio $p > p_c$ l'equazione $G^{-1} = 0$ non ha soluzioni con $\varepsilon \approx \varepsilon_c$ per $p \approx p_c$. Ciò vuol dire che anche in questo caso lo spettro si interrompe nel punto di soglia.

Capitolo IV

# FUNZIONI DI GREEN A TEMPERATURE FINITE

## § 36. *Funzioni di Green a temperature finite* [1])

La definizione della funzione di Green di un sistema macroscopico a temperature non nulle differisce dalla sua definizione a temperatura nulla soltanto per il fatto che la media rispetto allo stato fondamentale del sistema chiuso va sostituita con la media rispetto alla distribuzione di Gibbs: il simbolo $\langle \ldots \rangle$ significherà ora

$$\langle \ldots \rangle = \sum_n w_n \langle n | \ldots | n \rangle, \quad w_n = \exp\left(\frac{\Omega - E'_n}{T}\right), \tag{36,1}$$

dove la sommatoria è estesa a tutti gli stati del sistema (che si differenziano sia per l'energia $E_n$ che per il numero di particelle $N_n$) $E'_n = E_n - \mu N_n$ e $\langle n \mid \ldots \mid n \rangle$ rappresenta l'elemento matriciale diagonale dell'$n$-esimo stato. Le medie così definite sono funzioni delle variabili termodinamiche $T$, $\mu$, $V$.

Analizzando le proprietà analitiche delle funzioni di Green a temperature finite (*L. D. Landau*, 1958), è opportuno ricorrere alle funzioni di Green, dette ritardate e anticipate, le cui proprietà analitiche risultano essere più semplici [2]). Per fissare le idee, parleremo dapprima dei sistemi di Fermi.

La *funzione ritardata di Green* è definita come segue:

$$iG^R_{\alpha\beta}(X_1, X_2) = \begin{cases} \langle \hat{\Psi}_\alpha(X_1)\hat{\Psi}^+_\beta(X_2) + \hat{\Psi}^+_\beta(X_2)\Psi_\alpha(X_1)\rangle, & t_1 > t_2, \\ 0, & t_1 < t_2, \end{cases} \tag{36,2}$$

Per un sistema non ferromagnetico omogeneo microscopico in assenza di campo esterno questa funzione (come anche $G_{\alpha\beta}$ ordinaria) si

[1]) Nei §§ 36-38 adoperiamo il sistema di unità di misura con $\hbar = 1$.

[2]) Si suole distinguere queste funzioni con gli indici $R$ ed $A$ dall'inglese retarded e advanced.

riduce a una funzione scalare dipendente unicamente dalla differenza $X = X_1 - X_2$:

$$G^R_{\alpha\beta}(X_1, X_2) = \delta_{\alpha\beta} G^R(X), \quad G^R = \frac{1}{2} G^R_{\alpha\alpha}. \tag{36,3}$$

Il passaggio alla rappresentazione degli impulsi viene effettuato in modo ordinario. Ma poiché $G^R(t, \mathbf{r}) = 0$ per $t < 0$, l'integrazione in $t$ nella definizione

$$G^R(\omega, \mathbf{p}) = \int \int_0^\infty e^{i(\omega t - \mathbf{pr})} G^R(t, \mathbf{r})\, dt\, d^3x \tag{36,4}$$

viene effettuata in effetti soltanto da 0 a $\infty$. Lo spostamento della variabile $\omega$ nel semipiano superiore non fa altro che migliorare la convergenza di questo integrale. Pertanto l'integrale (36,4) definisce nel semipiano superiore della variabile $\omega$ una funzione analitica non avente delle singolarità [1]). Quanto al semipiano inferiore, dove la funzione $G^R$ viene definita per prolungamento analitico, essa ha dei poli (vedi più avanti).

Sviluppiamo la funzione $G^R$ in modo analogo a quello che ha permesso di ottenere al § 8 lo sviluppo (8,7) della funzione $G$ per $T = 0$.

Sviluppando l'elemento matriciale $\langle n \mid \ldots \mid n \rangle$ del prodotto di operatori $\psi$ in base alla regola di moltiplicazione matriciale ed esprimendo gli elementi matriciali nella forma (8,4), otteniamo

$$iG^R(t, \mathbf{r}) =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{n,m} w_n \{ e^{-i(\omega_{mn} t - \mathbf{k}_{mn} \mathbf{r})} \langle n | \hat{\psi}_\alpha(0) | m \rangle \langle m | \hat{\psi}^+_\alpha(0) | n \rangle +$$
$$+ e^{i(\omega_{mn} t - \mathbf{k}_{mn} \mathbf{r})} \langle n | \hat{\psi}^+_\alpha(0) | m \rangle \langle m | \hat{\psi}_\alpha(0) | n \rangle \},$$

dove

$$\omega_{mn} = E'_m - E'_n, \quad \mathbf{k}_{mn} = \mathbf{P}_m - \mathbf{P}_n.$$

Per i due termini fra parentesi graffa la sommatoria su $n$ e $m$ ha un significato un po' diverso: nel primo termine i numeri di particelle negli stati $n$ e $m$ sono legati dalla relazione $N_m = N_n + 1$, e nel secondo da $N_m = N_n - 1$. Per eliminare questa differenza, invertiamo la notazione degli indici $m$ e $n$ nella seconda somma. Osservando inoltre che

$$\langle n | \hat{\psi}_\alpha(0) | m \rangle \langle m | \hat{\psi}^+_\alpha(0) | n \rangle = | \langle n | \hat{\psi}_\alpha(0) | m \rangle |^2 \equiv A_{mn},$$

---

[1]) Vedi ragionamenti analoghi per la funzione $\alpha(\omega)$ nel volume V, § 123. È ovvio che la coincidenza fra le proprietà analitiche delle funzioni $G^R$ ed $\alpha$ non è casuale: in accordo con la formula (126,8) del volume V l'ultima funzione si esprime analogamente attraverso un determinato commutatore operatoriale.

riduciamo tutta l'espressione alla forma

$$iG^R(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_{n,m} w_n e^{-i(\omega_{mn} t - \mathbf{k}_{mn} \mathbf{r})} A_{mn} (1 + e^{-\omega_{mn}/T}), \quad t > 0. \tag{36,5}$$

Infine, calcolando l'integrale (36,4), sostituiamo (così come al § 8) $\omega \to \omega + i0$ e troviamo infine

$$G^R(\omega, \mathbf{p}) = \frac{(2\pi)^3}{2} \sum_{m,n} w_n \frac{A_{mn} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}_{mn})}{\omega - \omega_{mn} + i0} (1 + e^{-\omega_{mn}/T}). \tag{36,6}$$

È da notare che tutti i poli di questa espressione sono disposti (in accordo con quanto detto sopra) sotto l'asse reale, nel semipiano inferiore della variabile $\omega$.

L'ultima proprietà è sufficiente per stabilire un certo legame fra le parti reale ed immaginaria della funzione, la cosiddetta *relazione di Kramers-Kronig*, o relazione *di dispersione*

$$\operatorname{Re} G^R(\omega, \mathbf{p}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} G^R(u, \mathbf{p})}{u - \omega} du \tag{36,7}$$

(vedi la deduzione della stessa relazione per $\alpha(\omega)$ nel vol. V, § 123). Ci si può convincere della sua validità anche mediante una verifica diretta, separando nella (36,6) le parti reale ed immaginaria con l'ausilio della formula (8,11). Notiamo anche che la stessa formula permette di riscrivere la (36,7) nella forma

$$G^R(\omega, \mathbf{p}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(u, \mathbf{p})}{u - \omega - i0} du, \tag{36,8}$$

dove

$$\rho(u, \mathbf{p}) = -4\pi^4 \sum_{m,n} w_n A_{mn} \delta(u - \omega_{mn}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}_{mn}) (1 + e^{-\omega_{mn}/T}).$$

Per $\omega$ reali si ha $\rho = \operatorname{Im} G^R$.

La rappresentazione (36,8) acquista un significato più profondo passando al « limite macroscopico » $V \to \infty$ (per un dato rapporto $N/V$). In questo limite i poli $\omega_{mn}$ si fondono e la funzione $\rho(u)$ diventa diversa da zero per tutti gli $u$ (e non uguale semplicemente alla somma delle funzioni delta nei punti discreti). Inoltre la formula (36,8) definisce direttamente $G^R(\omega)$ nel semipiano superiore della variabile $\omega$ e sull'asse reale. Per definire $G^R(\omega)$ nel semipiano inferiore della variabile $\omega$, è necessario invece prolungare analiticamente l'integrale, per cui si deve deformare il contorno d'integrazione in modo tale che esso aggiri sempre il punto $u = \omega$ dal basso. Allora $G^R(\omega)$ può avere delle singolarità nel semipiano inferiore (a distanza

finita dall'asse reale) allorché il contorno viene « stretto » fra il polo $u = \omega$ e la singolarità del numeratore.

La *funzione di Green anticipata* si introduce analogamente in base alla definizione

$$iG^A_{\alpha\beta}(X_1, X_2) = \begin{cases} 0 & , \ t_1 > t_2, \\ -\langle \hat{\Psi}_\alpha(X_1)\, \hat{\Psi}^\dagger_\beta(X_2) + \hat{\Psi}^\dagger_\beta(X_2)\, \hat{\Psi}_\alpha(X_1)\rangle, & t_1 < t_2. \end{cases} \tag{36,9}$$

La funzione $G^A(\omega, \mathbf{p})$ nella rappresentazione degli impulsi è una funzione analitica della variabile $\omega$, non avente delle singolarità nel semipiano inferiore. Il suo sviluppo differisce da quello (36,6) per il cambiamento di segno davanti a $i0$ ai denominatori. Ciò significa che sull'asse reale si ha $G^A(\omega) = G^{R*}(\omega)$ e in tutto il piano della variabile $\omega$

$$G^A(\omega^*) = G^{R*}(\omega). \tag{36,10}$$

Per $\omega \to \infty$ le funzioni $G^R$ e $G^A$ tendono a zero in base alla stessa legge della funzione $G$, e cioè

$$G^R,\ G^A \to 1/\omega \quad \text{per} \quad |\,\omega\,| \to \infty. \tag{36,11}$$

Ricordiamo (vedi la deduzione della (8,15)) che il coefficiente (l'unità) in questa espressione asintotica è determinato dal valore del salto della funzione per $t_2 = t_1$; questo salto non dipende dalla temperatura ed è identico per tutte e tre le funzioni $G^R$, $G^A$ e $G$, come risulta chiaramente dalle loro definizioni.

Per stabilire un legame fra le funzioni $G^R$, $G^A$ così introdotte e la funzione di Green ordinaria

$$iG_{\alpha\beta}(X_1, X_2) = \langle \mathrm{T}\hat{\Psi}_\alpha(X_1)\, \hat{\Psi}^\dagger_\beta(X_2)\rangle \tag{36,12}$$

otteniamo per quest'ultima uno sviluppo analogo a quello (36,5). I calcoli, del tutto analoghi a quelli esposti sopra, danno il seguente risultato [1]):

$$G(\omega, \mathbf{p}) = -\frac{(2\pi)^3}{2} \sum_{m,n} w_n A_{mn} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}_{mn}) \left\{ \frac{1}{\omega_{mn} - \omega} (1 + e^{-\omega_{mn}/T}) + i\pi\delta(\omega - \omega_{mn})\,(1 - e^{-\omega_{mn}/T}) \right\}. \tag{36,13}$$

Confrontando le (36,13) e (36,6), troviamo che

$$\left.\begin{matrix} G^R(\omega, \mathbf{p}) \\ G^A(\omega, \mathbf{p}) \end{matrix}\right\} = \mathrm{Re}\, G(\omega, \mathbf{p}) \pm i \operatorname{cth} \frac{\omega}{2T} \mathrm{Im}\, G(\omega, \mathbf{p}). \tag{36,14}$$

---

[1]) Passando alla rappresentazione degli impulsi, l'integrale in $t$ viene diviso in due parti: da $-\infty$ a 0 e da 0 a $+\infty$, e su una di queste parti va cambiata la notazione degli indici di sommatoria $m$, $n$.

In questo caso, come si vede dall'espressione stessa (36,13).

$$\operatorname{sign} \operatorname{Im} G(\omega, \mathbf{p}) = -\operatorname{sign} \omega. \tag{36,15}$$

È da notare che, a differenza delle $G^R$ e $G^A$, la funzione $G$ non è funzione analitica di $\omega$.

Per $T \to 0$ si ha $\operatorname{cth}(\omega/2T) \to \operatorname{sign} \omega$, e dalla (36,14) risulta che sull'asse reale

$$G = \begin{cases} G^R, & \omega > 0, \\ G^A, & \omega < 0. \end{cases} \tag{36,16}$$

Quindi, per $T = 0$ la funzione $G(\omega)$ rappresenta sui due semiassi reali della variabile $\omega$ i valori limite (per $|\operatorname{Im} \omega| \to 0$) di due funzioni analitiche distinte: $G^R(\omega)$ sul semiasse destro e $G^A(\omega)$ su quello sinistro.

Si possono scrivere facilmente le espressioni delle funzioni $G^R$ e $G^A$ per un gas di Fermi perfetto. È sufficiente osservare che esse verificano la stessa equazione (9,6) per la cui deduzione è stato utilizzato soltanto il valore del salto della funzione per $t_1 = t_2$. Quanto al modo di aggiramento del polo, è noto che per $G^{(0)R}$ il polo deve trovarsi sotto l'asse reale e per $G^{(0)A}$ sopra questo asse. Ne consegue l'espressione

$$G^{(0)R,A}(\omega, \mathbf{p}) = \left[\omega - \frac{p^2}{2m} + \mu \pm i0\right]^{-1}, \tag{36,17}$$

valida sia per la temperatura allo zero che per temperature finite. Quanto alla funzione $G^{(0)}$, in accordo con la (36,14), troviamo che

$$G^{(0)}(\omega, \mathbf{p}) = \mathrm{P}\frac{1}{\omega - p^2/2m + \mu} - i\pi \operatorname{th}\frac{\omega}{2T} \cdot \delta\left(\omega - \frac{p^2}{2m} + \mu\right). \tag{36,18}$$

Per $T \to 0$ torniamo alla formula (9,7) che differisce dalla (36,17) per la sostituzione di $\pm i0$ con $i0 \cdot \operatorname{sign} \omega$.

Diamo le formule analoghe per il caso di un sistema di Bose. Le funzioni di Green ritardata e anticipata sono definite come segue:

$$\begin{aligned} iG^R(X_1, X_2) &= \begin{cases} \langle \hat{\Psi}(X_1)\hat{\Psi}^+(X_2) - \hat{\Psi}^+(X_2)\hat{\Psi}(X_1)\rangle & , t_1 > t_2, \\ 0 & , t_1 < t_2, \end{cases} \\ iG^A(X_1, X_2) &= \begin{cases} 0 & , t_1 > t_2, \\ -\langle \hat{\Psi}(X_1)\hat{\Psi}^+(X_2) - \hat{\Psi}^+(X_2)\hat{\Psi}(X_1)\rangle, & t_1 < t_2. \end{cases} \end{aligned} \tag{36,19}$$

Se inoltre si tratta di temperature sopra il punto $\lambda$, in queste definizioni figurano gli operatori $\psi$ completi; a temperature sotto il punto $\lambda$ la definizione si riferisce ad operatori « sopra condensato ». Al posto della (36,6) ora abbiamo

$$G^R(\omega, \mathbf{p}) = (2\pi)^3 \sum_{m,n} w_n \frac{A_{mn}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}_{mn})}{\omega - \omega_{mn} + i0}(1 - e^{-\omega_{mn}/T}). \tag{36,20}$$

Quanto al legame fra questa funzione e $G$, esso è dato dalla formula

$$G^R(\omega, \mathbf{p}) = \mathrm{Re}\, G(\omega, \mathbf{p}) + i \,\mathrm{th}\, \frac{\omega}{2T} \cdot \mathrm{Im}\, G(\omega, \mathbf{p}), \qquad (36,21)$$

inoltre, sull'asse reale

$$\mathrm{Im}\, G(\omega, \mathbf{p}) < 0 \qquad (36,22)$$

(la funzione $G$ è definita in accordo con la (31,1) con la media rispetto alla distribuzione di Gibbs anziché rispetto allo stato fondamentale). Per un gas di Bose perfetto la funzione $G^R$ è data dalla stessa formula (36,17), mentre la funzione $G$ è data da

$$G^{(0)}(\omega, \mathbf{p}) = \mathrm{P}\, \frac{1}{\omega - p^2/2m + \mu} - i\pi \,\mathrm{cth}\, \frac{\omega}{2T} \cdot \delta\left(\omega - \frac{p^2}{2m} + \mu\right). \qquad (36,23)$$

Il significato fisico delle funzioni di Green a temperature diverse da zero coincide essenzialmente con il loro significato per $T = 0$. È ovvio che restano valide le formule che legano la funzione di Green $G$ alla distribuzione degli impulsi delle particelle (7,23) e, in generale, alla matrice di densità (7,18) e (31,4).

Le affermazioni fondamentali circa la coincidenza dei poli della funzione di Green con l'energia delle eccitazioni elementari restano anch'esse in vigore (poiché, tuttavia, la funzione stessa $G$ non è analitica, è più opportuno parlare in questo caso dei poli che la funzione analitica $G^R$ ha nel semipiano inferiore della variabile $\omega$, oppure dei poli della funzione $G^A$ nel semipiano superiore). Questa affermazione deriva di nuovo (così come al § 8) dallo sviluppo (36,6). Benché in diversi termini di questo sviluppo figurino ora le frequenze delle transizioni $\omega_{mn}$ fra due stati qualsiasi del sistema, cionondimeno (dopo il passaggio al limite macroscopico) i poli restano come prima corrispondenti unicamente alle transizioni dallo stato fondamentale a quelli con un'eccitazione elementare. Quanto alle transizioni fra due stati eccitati, esse non conducono alla comparsa del polo nella funzione di Green macroscopica a una sola componente per la stessa ragione per la quale le transizioni dallo stato fondamentale a stati con più quasi-particelle non implicano la comparsa di un polo (vedi il § 8): la differenza di energie di questi stati non è definibile univocamente mediante la differenza dei loro impulsi.

Sottolineiamo intanto che a temperature diverse da zero la durata di vita delle quasi-particelle è legata non soltanto alla loro propria instabilità, ma anche alle mutue collisioni. Lo smorzamento proveniente da queste due sorgenti deve essere debole affinché il concetto di quasi-particelle continui ad aver senso.

## § 37. *Funzioni di Green termiche*

Per costruire la tecnica dei diagrammi che permetta di calcolare le funzioni di Green a temperature finite, occorrerebbe passare dalla rappresentazione degli operatori $\psi$ di Heisenberg a quella dell'interazione, così come è stato fatto al § 12. Allora giungeremmo di nuovo a un'espressione differente dalla (12,12) soltanto per il fatto che la media in essa non è calcolata rispetto allo stato fondamentale. Questa differenza, tuttavia, è molto essenziale: la media dell'operatore $\hat{S}^{-1}$ non può più essere separata dalla media degli altri fattori, così come è stato fatto passando dalla (12,12) alla (12,14); infatti, uno stato non fondamentale sotto l'azione dell'operatore $\hat{S}^{-1}$ non si trasforma in se stesso, ma in una sovrapposizione di stati eccitati con la stessa energia (includente in sé i risultati di tutti i processi possibili di diffusione reciproca delle quasi-particelle). Questa circostanza rende essenzialmente complicata la tecnica dei diagrammi in quanto compaiono termini nuovi dalle convoluzioni in cui compaiono anche gli operatori $\psi$ di $\hat{S}^{-1}$.

Ciononostante si può modificare la definizione delle funzioni di Green in modo tale da escludere complicazioni del genere. Su questa definizione è basato un formalismo matematico elaborato da *T. Matsubara* (1955), che è particolarmente opportuno per il calcolo delle grandezze termodinamiche di un sistema macroscopico.

Introduciamo i cosiddetti operatori $\psi$ *di Matsubara* in base alla definizione [1])

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}^M_\alpha(\tau, \mathbf{r}) &= e^{\tau\hat{H}'}\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r})\, e^{-\tau\hat{H}'}, \\ \hat{\bar{\Psi}}^M_\alpha(\tau, \mathbf{r}) &= e^{\tau\hat{H}'}\hat{\psi}^+_\alpha(\mathbf{r})\, e^{-\tau\hat{H}'}, \end{aligned} \tag{37,1}$$

dove $\tau$ è una variabile reale ausiliare; questi operatori differiscono formalmente da quelli di Heisenberg per la sostituzione in questi ultimi della variabile reale $t$ con la grandezza immaginaria $-i\tau$ [2]). Con tale sostituzione ($\hat{\Psi} \to \hat{\Psi}^M$, $\hat{\Psi}^+ \to \hat{\bar{\Psi}}^M$, $i\partial/\partial t \to -\partial/\partial\tau$) nella (7,8), ad esempio, si ottengono delle equazioni verificate dagli operatori (37,1). Mediante questi operatori la nuova funzione di Green $\mathcal{G}$ viene definita analogamente alla definizione di funzione di Green ordinaria $G$ attraverso gli operatori $\psi$ di Heisenberg:

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}(\tau_1, \mathbf{r}_1; \tau_2, \mathbf{r}_2) = -\langle \mathrm{T}_\tau \hat{\Psi}^M_\alpha(\tau_1, \mathbf{r}_1)\, \hat{\bar{\Psi}}^M_\beta(\tau_2, \mathbf{r}_2)\rangle, \tag{37,2}$$

---

[1]) Nel presente paragrafo scriveremo le formule contemporaneamente per i sistemi di Fermi e per quelli di Bose (sopra il punto $\lambda$). Per distinguerli, ai sistemi di Fermi corrisponderanno i segni superiori e ai sistemi di Bose i segni inferiori. Inoltre, per i sistemi di Bose gli indici di spin vanno omessi.

[2]) Sottolineiamo che per questa differenza l'operatore $\hat{\bar{\Psi}}^M$ non coincide affatto con $\hat{\Psi}^{M+}$.

dove il simbolo $T_\tau$ significa la « $\tau$-cronologizzazione », ossia la disposizione degli operatori nel senso crescente di $\tau$ da destra a sinistra (con cambiamento di segno per permutazione degli operatori nel caso dei sistemi di Fermi); la parentesi angolare $\langle \ldots \rangle$ indica la media rispetto alla distribuzione di Gibbs. Questa media può essere scritta in forma esplicita riscrivendo la definizione (37,2) come segue:

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} = -\mathrm{Tr}\,\{\hat{w}\mathrm{T}_\tau \hat{\Psi}^M_\alpha(\tau_1, \mathbf{r}_1)\,\hat{\bar{\Psi}}^M_\beta(\tau_2, \mathbf{r}_2)\}, \quad \hat{w} = \exp\left(\frac{\Omega - \hat{H}'}{T}\right), \tag{37,3}$$

dove Tr indica la somma di tutti gli elementi matriciali diagonali. La funzione di Green così definita è detta *termica* a differenza della funzione di Green « ordinaria » $G$ (detta in questo caso *temporale*).

Così come $G_{\alpha\beta}$, la funzione $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ per un sistema non ferromagnetico in assenza di campo magnetico esterno si riduce anch'essa allo scalare: $\mathcal{G}_{\alpha\beta} = \mathcal{G}\delta_{\alpha\beta}$. Nel caso di un sistema spazialmente omogeneo la sua dipendenza da $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ si riduce di nuovo alla dipendenza dalla differenza $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

Si vede anche facilmente che già per la definizione stessa (37,3) la funzione $\mathcal{G}$ dipende unicamente dalla differenza $\tau = \tau_1 - \tau_2$. Sia, ad esempio, $\tau_1 < \tau_2$; allora abbiamo [1])

$$\mathcal{G} = \pm\frac{1}{(2)}\, e^{\Omega/T}\,\mathrm{Tr}\,\{e^{-\hat{H}'/T} e^{\tau_2\hat{H}'}\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}_2)\, e^{(-\tau_2+\tau_1)\hat{H}'}\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}_1)\, e^{-\tau_1\hat{H}'}\}$$

ossia, effettuando sotto il segno Tr la permutazione ciclica dei fattori,

$$\mathcal{G} = \pm\frac{1}{(2)}\, e^{\Omega/T}\,\mathrm{Tr}\,\{e^{-(1/T+\tau)\hat{H}'}\hat{\psi}^+_\alpha(\mathbf{r}_2)\, e^{\tau\hat{H}'}\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}_1)\}, \quad \tau < 0, \tag{37,4}$$

da cui in modo immediato discende l'affermazione fatta.

In effetti, la variabile $\tau$ assumerà valori soltanto nell'intervallo finito

$$-1/T \leqslant \tau \leqslant 1/T. \tag{37,5}$$

Inoltre i valori della funzione $\mathcal{G}(\tau)$ per $\tau < 0$ e $\tau > 0$ sono legati da una semplice relazione. Per $\tau = \tau_1 - \tau_2 > 0$ troviamo, analogamente alla deduzione della (37,4), che

$$\mathcal{G} = -\frac{1}{(2)}\, e^{\Omega/T}\,\mathrm{Tr}\,\{e^{-(1/T-\tau)\hat{H}'}\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}_1)\, e^{-\tau\hat{H}'}\psi^+_\alpha(\mathbf{r}_2)\} =$$

$$= -\frac{1}{(2)}\, e^{\Omega/T}\,\mathrm{Tr}\,\{e^{-\tau\hat{H}'}\hat{\psi}^+_\alpha(\mathbf{r}_2)\, e^{-(1/T-\tau)\hat{H}'}\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r})\}, \quad \tau > 0,$$

[1]) Il fattore 2 fra parentesi si riferisce ai sistemi di Fermi, e per i sistemi di Bose va sostituito con 1.

e confrontando questa espressione con la (37,4), otteniamo

$$\mathcal{G}(\tau) = \mp \mathcal{G}\left(\tau + \frac{1}{T}\right), \quad \tau < 0 \tag{37,6}$$

(tenendo conto della (37,5), l'argomento della funzione a secondo membro è positivo per $\tau < 0$).

Sviluppiamo ora la funzione $\mathcal{G}(\tau, \mathbf{r})$ in integrale di Fourier nelle coordinate e in serie di Fourier in $\tau$ (sull'intervallo (37,5)) [1]:

$$\mathcal{G}(\tau, \mathbf{r}) = T \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int e^{i(\mathbf{pr} - \zeta_s \tau)} \mathcal{G}(\zeta_s, \mathbf{p}) \frac{d^3p}{(2\pi)^3}, \tag{37,7}$$

dove per i sistemi di Fermi

$$\zeta_s = (2s + 1)\pi T, \tag{37,8a}$$

e per i sistemi di Bose

$$\zeta_s = 2s\pi T \tag{37,8b}$$

($s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); in questo caso la condizione (37,6) si verifica automaticamente. La trasformazione inversa della (37,7) ha la forma

$$\mathcal{G}(\zeta_s, \mathbf{p}) = \int_0^{1/T} \int e^{-i(\mathbf{pr} - \zeta_s \tau)} \mathcal{G}(\tau, \mathbf{r})\, d^3x\, d\tau \tag{37,9}$$

(l'integrale sul dominio $-1/T \leqslant \tau \leqslant 1/T$ è stato trasformato in quello da 0 a $1/T$ tenendo conto delle (37,6) e (37,8)).

Calcoli analoghi a quelli del § 36 permettono di esprimere $\mathcal{G}(\zeta_s, \mathbf{p})$ in funzione degli elementi matriciali degli operatori $\psi$ di Schrödinger e di ottenere quanto segue:

$$\mathcal{G}(\zeta_s, \mathbf{p}) = \frac{(2\pi)^3}{(2)} \sum_{m,n} w_n \frac{A_{mn}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}_{mn})}{i\zeta_s - \omega_{mn}} (1 \pm e^{-\omega_{mn}/T}). \tag{37,10}$$

Di qui si vede soprattutto che

$$\mathcal{G}(-\zeta_s, \mathbf{p}) = \mathcal{G}^*(\zeta_s, \mathbf{p}). \tag{37,11}$$

In seguito, confrontando l'espressione (37,10) con gli sviluppi (36,6) e (36,20) per $G^R$, troviamo che

$$\mathcal{G}(\zeta_s, \mathbf{p}) = G^R(i\zeta_s, \mathbf{p}), \qquad \zeta_s > 0. \tag{37,12}$$

La condizione $\zeta_s > 0$ è legata al fatto che le espressioni (36,6) e (36,20) sono valide immediatamente solo nel semipiano superiore della variabile $\omega$, in accordo con quanto detto alla pag. 181. In modo analogo troviamo che $\mathcal{G}(\zeta_s, \mathbf{p}) = G^A(i\zeta_s, \mathbf{p})$, $\zeta_s < 0$. Quindi,

---

[1]) Questo procedimento appartiene ad *A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, I. E. Dzjalošinskij* (1959) e a *E. S. Fradkin* (1959).

la funzione di Green termica nelle componenti di Fourier coincide con la funzione di Green ritardata o anticipata, calcolata in punti discreti dell'asse immaginario $\omega$. In particolare, questo risultato consente di scrivere immediatamente un'espressione per la funzione di Green termica di un gas perfetto: mediante la sostituzione $\omega \to i\zeta_s$ dalla (36,17) ricaviamo

$$\mathcal{G}^{(0)}(\zeta_s, \mathbf{p}) = \left[ i\zeta_s - \frac{p^2}{2m} + \mu \right]^{-1}. \tag{37,13}$$

Nel prossimo paragrafo verrà data la tecnica dei diagrammi per calcolare le funzioni $\mathcal{G}(\zeta_s, \mathbf{p})$. Per quanto riguarda la definizione della funzione $G^R(\omega, \mathbf{p})$ (e quindi, in particolare, la definizione dello spettro energetico del sistema), occorre costruire una funzione analitica coincidente con $\mathcal{G}(\zeta_s, \mathbf{p})$ nei punti $\omega = i\zeta_s$ e non avente delle singolarità nel semipiano superiore della variabile $\omega$. Questo procedimento è univoco se si aggiunge la condizione $G^R(\omega, \mathbf{p}) \to 0$ per $|\omega| \to \infty$ (vedi la (36,11)). Cionondimeno, nei casi concreti questo prolungamento analitico può essere legato a certe difficoltà. Ma non occorre effettuarlo per il calcolo delle grandezze termodinamiche.

Così per calcolare il potenziale $\Omega$, si può partire dall'espressione della media della matrice di densità rispetto alla distribuzione di Gibbs

$$N\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \pm\, \mathcal{G}_{\alpha\beta}(\tau_1, \mathbf{r}_1;\ \tau_1 + 0, \mathbf{r}_2) \tag{37,14}$$

(che è evidente dalla definizione (37,2); cfr. la (7,17)). Ponendo $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1$ (e sommando su $\alpha = \beta$), otteniamo la seguente espressione per la densità del sistema:

$$\frac{N}{V} = \pm T \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int \mathcal{G}(\zeta_s, \mathbf{p})\, e^{-i\zeta_s\tau} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \bigg|_{\tau \to -0}. \tag{37,15}$$

Questa espressione definisce $N$ quale funzione di $\mu$, $T$, $V$ dopo di che $\Omega(\mu, T, V)$ si calcola integrando l'uguaglianza $N = -\partial\Omega/\partial\mu$.

## § 38. *Tecnica dei diagrammi per le funzioni di Green termiche*

La tecnica dei diagrammi per il calcolo della funzione di Green termica $\mathcal{G}$ viene costruita così come è stato fatto ai §§ 12 e 13 per la funzione temporale $G$. Il fatto che la definizione degli operatori $\psi$ di Matsubara (37,1) differisce da quella degli operatori di Heisenberg per la sola sostituzione formale $it \to \tau$ permette di sfruttare sotto molti aspetti l'analogia diretta.

Prima di tutto introduciamo gli operatori di Matsubara nella « rappresentazione dell'interazione » che differisce dalla (37,1) per

la sostituzione dell'operatore hamiltoniano esatto $\hat{H}'$ con l'operatore hamiltoniano delle particelle libere $\hat{H}'_0$:

$$\hat{\Psi}^M_{0\alpha}(\tau, \mathbf{r}) = \exp(\tau\hat{H}'_0)\,\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r})\exp(-\tau\hat{H}'_0). \tag{38,1}$$

Il legame fra gli operatori $\hat{\Psi}^M_{0\alpha}$ e $\hat{\Psi}^M_\alpha$ è realizzato mediante una matrice $S$ di Matsubara costruita analogamente alla (12,8):

$$\hat{\sigma}(\tau_2, \tau_1) = \mathrm{T}_\tau \exp\left\{-\int_{\tau_1}^{\tau_2} \hat{V}_0(\tau)\,d\tau\right\}, \tag{38,2}$$

dove

$$\hat{V}_0(\tau) = \exp(\tau\hat{H}'_0)\,\hat{V}\exp(-\tau\hat{H}'_0) \tag{38,3}$$

è l'operatore di interazione nella stessa rappresentazione. Ma mentre al § 12 il legame fra $\hat{\Psi}$ e $\hat{\Psi}_0$ è stato stabilito per la condizione iniziale di « inclusione » dell'interazione per $t = -\infty$, ora come condizione « iniziale » deve fungere la coincidenza fra $\hat{\Psi}^M$ e $\hat{\Psi}^M_0$ per $\tau = 0$. Rispettivamente al posto della (12,11) scriviamo

$$\hat{\Psi}^M_\alpha(\tau) = \hat{\sigma}^{-1}(\tau, 0)\,\hat{\Psi}^M_{0\alpha}(\tau)\,\hat{\sigma}(\tau, 0). \tag{38,4}$$

Sostituiamo questa espressione nella definizione di funzione di Green (37,3); ponendo, per fissare le idee, $\tau_1 > \tau_2$, abbiamo

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}(\tau_1, \tau_2) = -\mathrm{Tr}\{\hat{w}\hat{\sigma}^{-1}(\tau_1, 0)\,\hat{\Psi}^M_{0\alpha}(\tau_1)\,\hat{\sigma}\times$$
$$\times(\tau_1, 0)\,\hat{\sigma}^{-1}(\tau_2, 0)\,\hat{\bar{\Psi}}^M_{0\beta}(\tau_2)\,\hat{\sigma}(\tau_2, 0)\}$$

(per brevità, omettiamo gli argomenti $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$). Osservando che per $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$

$$\hat{\sigma}(\tau_1, \tau_3) = \hat{\sigma}(\tau_1, \tau_2)\,\hat{\sigma}(\tau_2, \tau_3),$$
$$\hat{\sigma}(\tau_2, \tau_1)\,\hat{\sigma}^{-1}(\tau_3, \tau_1) = \hat{\sigma}(\tau_2, \tau_3),$$

riscriviamo nella forma

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}(\tau_1, \tau_2) = -\mathrm{Tr}\left\{\hat{w}\hat{\sigma}^{-1}\left(\frac{1}{T}, 0\right)\left[\hat{\sigma}\left(\frac{1}{T}, \tau_1\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\,\hat{\Psi}^M_{0\alpha}(\tau_1)\,\hat{\sigma}(\tau_1, \tau_2)\,\hat{\bar{\Psi}}^M_{0\beta}(\tau_2)\,\hat{\sigma}(\tau_2, 0)\right]\right\}.$$

I fattori fra parentesi quadra sono già disposti in ordine crescente da destra a sinistra. Perciò si può scrivere

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}(\tau_1, \tau_2) = -\mathrm{Tr}\{\hat{w}\hat{\sigma}^{-1}[\mathrm{T}_\tau\,\hat{\Psi}^M_{0\alpha}(\tau_1)\,\hat{\bar{\Psi}}^M_{0\beta}(\tau_2)\,\hat{\sigma}]\}, \tag{38,5}$$

dove

$$\hat{\sigma} \equiv \hat{\sigma}\left(\frac{1}{T}, 0\right).$$

È facile provare che l'espressione scritta in questa forma resta valida anche per $\tau_1 < \tau_2$.

A differenza della (12,12), l'espressione (38,5) contiene un fattore di più (quello di Gibbs) e, inoltre, la media viene effettuata ancora rispetto agli stati del sistema di particelle interagenti. Mostriamo che queste due distinzioni « si smorzano mutuamente » per cui si ristabilisce l'analogia completa con la (12,14). A tal fine ricorriamo alla formula

$$e^{-\tau\hat{H}'} = e^{-\tau\hat{H}'_0}\hat{\sigma}(\tau, 0), \tag{38,6}$$

che si ottiene sostituendo la (38,1) nella (38,4) e confrontando in seguito l'espressione così ottenuta con la definizione di $\hat{\Psi}^M$ in base alla (37,1). Mediante questa formula facciamo la sostituzione nella (38,5)

$$e^{-\hat{H}'/T}\hat{\sigma}^{-1}\left(\frac{1}{T}, 0\right) = e^{-\hat{H}'_0/T}.$$

Portiamo il fattore $e^{\Omega/T}$ fuori dal segno Tr, trasportandolo dal numeratore al denominatore e rappresentandolo nella forma

$$e^{-\Omega/T} = \mathrm{Tr}\, e^{-\hat{H}'/T} = \mathrm{Tr}\, e^{-\hat{H}'_0/T}\hat{\sigma}\left(\frac{1}{T}, 0\right).$$

Infine, moltiplicando il numeratore e il denominatore per exp $(\Omega_0/T)$ (dove $\Omega_0$ è il potenziale termodinamico del gas perfetto per gli stessi valori $\mu$, $T$, $V$), otteniamo

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}(\tau_1, \tau_2) = -\frac{1}{\langle\hat{\sigma}\rangle_0}\langle \mathrm{T}_\tau \hat{\Psi}^M_{0\alpha}(\tau_1)\hat{\bar{\Psi}}^M_{0\beta}(\tau_2)\hat{\sigma}\rangle_0, \tag{38,7}$$

dove la media viene calcolata rispetto agli stati di un sistema di particelle non interagenti:

$$\langle . \; . \rangle_0 = \mathrm{Tr}\{\hat{w}_0 \ldots\}.$$

L'analogia di questo risultato con la (12,14) è immediata.

Per passare ai diagrammi della teoria delle perturbazioni, così come al § 13, sviluppiamo l'espressione (38,7) in potenze dell'operatore d'interazione $\hat{V}_0(\tau)$. Per un sistema ad interazione a coppie fra le particelle, questo operatore differisce da quello (13,2) per la sola sostituzione degli operatori di Heisenberg $\hat{\Psi}_0$, $\hat{\Psi}^+_0$ con gli operatori di Matsubara $\hat{\Psi}^M$, $\hat{\bar{\Psi}}^M$. Le medie dei prodotti degli operatori $\psi$ si sviluppano di nuovo in base al teorema di Wick (cioè scegliendo in tutti i modi possibili le convoluzioni a due a due di operatori); l'applicabilità di questo teorema al limite macroscopico si dimostra, in questo caso, mediante gli stessi ragionamenti che al § 13.

Le regole di tecnica dei diagrammi così ottenute sono completamente analoghe a quelle stabilite al § 13 per $T = 0$. La rappresentazione grafica dei diagrammi resta identica. Cambiano un po' soltanto le regole di lettura analitica dei diagrammi.

Nella rappresentazione delle coordinate ad ogni linea continua passante dal punto 2 al punto 1 corrisponde il fattore $-\mathcal{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(\tau_1, \mathbf{r}_1; \tau_2, \mathbf{r}_2)$ (di segno negativo); a ogni linea tratteggiata congiungente i punti 1 e 2 il fattore $-U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\,\delta(\tau_1 - \tau_2)$. Rispetto a tutte le variabili $\tau$, $\mathbf{r}$ dei punti interni del diagramma si integra in $d^3x$ su tutto lo spazio e in $d\tau$ nei limiti da 0 a $1/T$.

Per passare alla rappresentazione degli impulsi, occorre sviluppare tutte le funzioni $\mathcal{G}^{(0)}$ nella forma (37,7). Dopo l'integrazione in tutte le variabili interne $\mathbf{r}$ in ogni vertice del diagramma compare una funzione $\delta$ esprimente la legge di conservazione dell'impulso ($\Sigma\mathbf{p} = 0$). Inoltre, in ogni vertice compare un integrale della forma

$$T \int_0^{1/T} \exp\{-i\tau(\zeta_{s_1} + \zeta_{s_2} + \zeta_{s_3})\}\, d\tau.$$

Questo integrale (tenendo conto della (37,8)) è non nullo soltanto se $\Sigma\zeta_s = 0$, e in questo caso vale 1. Quindi, in ogni vertice si verifica anche la legge di conservazione delle frequenze discrete. Ora, a ogni linea continua corrisponde il fattore $-\mathcal{G}^{(0)}_{\alpha\beta}(\zeta_s, \mathbf{p})$ (quanto alla linea continua chiusa su se stessa, le corrisponde di nuovo il fattore $n^{(0)}(\mu, T)$, ossia la densità del gas perfetto per $\mu$ e $T$ dati). A ogni linea tratteggiata corrisponde il fattore $-U(\mathbf{q})$. Si integra e si somma nella forma

$$T \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \cdots$$

su tutti gli impulsi e le frequenze che sono rimasti indeterminati (dopo aver tenuto conto delle leggi di conservazione in tutti i vertici). Il coefficiente generale con il quale il diagramma entra in $-\mathcal{G}_{\alpha\beta}$, nel caso dei sistemi di Fermi, vale $(-1)^L$, dove $L$ è il numero di successioni chiuse di linee continue nel diagramma. Nel caso dei sistemi di Bose questo coefficiente vale 1.

È ovvio che in questa tecnica (così come nella tecnica per $T = 0$) si può sommare parzialmente e introdurre vari « blocchi » di diagrammi. In particolare, si può determinare la parte di vertice che si esprime mediante la funzione di Green a due componenti. Questa parte di vertice è legata alla funzione di Green $\mathcal{G}$ da un'equazione di Dyson analoga alla (15,14). Non scriveremo qui queste formule, la cui deduzione è completamente analoga a quella nella tecnica dei diagrammi per $T = 0$.

Passando al caso $T = 0$, le somme su $s$ nei diagrammi di Matsubara si trasformano in integrali in $\zeta$ e la tecnica di Matsubara diventa molto simile a quella ordinaria esposta nel capitolo II. La differenza, però, è che per $\zeta$ reali le funzioni di Matsubara coincidono con i valori di $G^R$ e $G^A$ sui semiassi corrispondenti dell'asse immaginario (vedi le (37,11-12)). Per passare alla tecnica ordinaria per $T = 0$, occorre ancora ruotare il contorno d'integrazione finché non coincide con l'asse reale $\omega$.

Capitolo V

# SUPERCONDUTTIVITÀ

## § 39. *Gas di Fermi superfluido. Spettro energetico*

Tutta la teoria di Landau esposta nel capitolo I si riferisce unicamente a una sola categoria di liquidi di Fermi, cioè ai liquidi che godono di uno spettro energetico che non conduce al fenomeno della superfluidità. Questo tipo di spettri non è l'unica possibilità per un liquido di Fermi quantistico, e ora passeremo allo studio dei sistemi di Fermi aventi spettro di altro tipo. L'origine di questo tipo di spettri energetici e le sue proprietà fondamentali si possono precisare in modo più esplicito su un semplice modello che permette di eseguire uno studio teorico completo: si tratta del gas degenere di Fermi quasi-perfetto con attrazione fra le particelle [1]).

Il gas di Fermi debolmente non perfetto con repulsione fra le particelle è stato considerato al § 6. A prima vista, i calcoli che vi sono stati eseguiti sono ugualmente validi sia per il caso di repulsione che di attrazione fra le particelle, cioè sia per una lunghezza $a$ di diffusione positiva che negativa. In realtà, tuttavia, nel caso di attrazione ($a < 0$) lo stato fondamentale del sistema così definito risulta instabile rispetto a una certa ristrutturazione che ne modifica il carattere e diminuisce l'energia.

La natura fisica di questa instabilità consiste nella tendenza delle particelle ad « accoppiarsi », cioè alla formazione di stati connessi da parte di coppie di particelle che si trovano (nello spazio **p**) in prossimità della superficie di Fermi e che hanno impulsi uguali in grandezza e opposti in direzione e spin antiparalleli — il cosiddetto *effetto Cooper* (1957). È notevole che questo effetto si produca nel gas di Fermi già per un'attrazione fra le particelle infinitamente piccola.

Proprio in virtù del detto effetto il sistema di operatori $\hat{a}_{\mathbf{p}\alpha}$, $\hat{a}^{+}_{\mathbf{p}\alpha}$, corrispondenti agli stati liberi delle singole particelle del gas, che è

---

[1]) Questo problema sta alla base della teoria della superconduttività costruita da *J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer* (1957). Il metodo qui esposto appartiene a *N. N. Bogoljubov* (1958).

stato utilizzato nel problema del gas di Fermi con repulsione, non può servire ora come approssimazione iniziale corretta per la teoria delle perturbazioni [1]). Al posto di questi operatori si devono introdurre operatori nuovi che cercheremo nella forma delle combinazioni lineari

$$\begin{aligned} \hat{b}_{\mathbf{p}-} &= u_p \hat{a}_{\mathbf{p}-} + v_p \hat{a}^+_{-\mathbf{p},+}, \\ \hat{b}_{\mathbf{p}+} &= u_p \hat{a}_{\mathbf{p}+} - v_p \hat{a}^+_{-\mathbf{p},-}, \end{aligned} \tag{39,1}$$

che legano gli operatori di particelle con impulsi e spin opposti (gli indici $_+$ e $_-$ si riferiscono ai due valori della proiezione dello spin); per l'isotropia del gas i coefficienti $u_p$, $v_p$ possono dipendere unicamente dal valore assoluto dell'impulso $\mathbf{p}$. Affinché questi nuovi operatori corrispondano alla creazione e all'annichilazione delle quasi-particelle, essi devono soddisfare alle stesse regole di commutazione di Fermi come i vecchi operatori

$$\hat{b}_{\mathbf{p}\alpha}\hat{b}^+_{\mathbf{p}\alpha} + \hat{b}^+_{\mathbf{p}\alpha}\hat{b}_{\mathbf{p}\alpha} = 1, \tag{39,2}$$

mentre tutte le altre coppie di operatori sono anticommutative (l'indice $\alpha$ numera i due valori della proiezione di spin). A tale scopo i coefficienti di trasformazione devono verificare la condizione

$$u_p^2 + v_p^2 = 1. \tag{39,3}$$

($u_p$, $v_p$ possono essere resi reali con una scelta appropriata del fattore di fase). In questo caso la trasformazione inversa (rispetto a quella (39,1)) diventa

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{p}+} &= u_p \hat{b}_{\mathbf{p}+} + v_p \hat{b}^+_{-\mathbf{p},-}, \\ \hat{a}_{\mathbf{p}-} &= u_p \hat{b}_{\mathbf{p}-} - v_p \hat{b}^+_{-\mathbf{p},+}. \end{aligned} \tag{39,4}$$

Per le stesse ragioni (ruolo fondamentale dell'interazione fra coppie di particelle con impulsi e spin opposti) lasciamo nell'operatore hamiltoniano (6,7) soltanto quei termini della seconda somma in cui $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \equiv \mathbf{p}$, $\mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2 \equiv \mathbf{p}'$:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}\alpha} \frac{p^2}{2m} \hat{a}^+_{\mathbf{p}\alpha}\hat{a}_{\mathbf{p}\alpha} - \frac{g}{V} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \hat{a}^+_{\mathbf{p}'+}\hat{a}^+_{-\mathbf{p}',-}\hat{a}_{-\mathbf{p},-}\hat{a}_{\mathbf{p}+}, \tag{39,5}$$

dove di nuovo è introdotta la « costante di legame » $g = 4\pi\hbar^2 \mid a \mid/m$ (lunghezza di diffusione $a < 0$).

---

[1]) La non applicabilità della teoria delle perturbazioni (nella forma utilizzata al § 6) alle coppie di particelle con proiezioni degli spin $\pm 1/2$ e con impulsi $\mathbf{p}_2 \approx -\mathbf{p}_1$ è indicata già dalla singolarità che l'espressione della funzione di interazione delle quasi-particelle (6,16) ottenuta mediante questa teoria ha per $\vartheta = \pi$; questa singolarità esiste soltanto per spin antiparalleli cui corrisponde l'autovalore dell'operatore $\sigma_1\sigma_2$, pari a $-3$.

Nei calcoli ulteriori sarà comodo ricorrere di nuovo al metodo usuale che permette di trascurare la necessità di tener conto in modo esplicito della costanza del numero di particelle nel sistema: quale operatore hamiltoniano nuovo si introduce la differenza $\hat{H}' = \hat{H} - \mu\hat{N}$, dove

$$\hat{N} = \sum_{\mathbf{p}\alpha} \hat{a}^+_{\mathbf{p}\alpha}\hat{a}_{\mathbf{p}\alpha}$$

è l'operatore del numero di particelle; il potenziale chimico verrà definito allora, in linea di principio, dalla condizione di uguaglianza tra la media $\bar{N}$ e il numero dato di particelle nel sistema.

Introduciamo inoltre la notazione

$$\eta_p = \frac{p^2}{2m} - \mu. \tag{39,6}$$

Poiché $\mu \approx p_F^2/2m$, allora in prossimità della superficie di Fermi

$$\eta_p = v_F\,(p - p_F), \tag{39,7}$$

dove $v_F = p_F/m$. Sottraendo $\mu\hat{N}$ dall'espressione (39,5), scriviamo quindi l'operatore hamiltoniano iniziale nella forma

$$\hat{H}' = \sum_{\mathbf{p}\alpha} \eta_p \hat{a}^+_{\mathbf{p}\alpha}\hat{a}_{\mathbf{p}\alpha} - \frac{g}{V}\sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \hat{a}^+_{\mathbf{p}'+}\hat{a}^+_{-\mathbf{p}',-}\hat{a}_{-\mathbf{p},-}\hat{a}_{\mathbf{p}+}. \tag{39,8}$$

Eseguiamo in questo operatore hamiltoniano la trasformazione (39,4). Utilizzando le relazioni (39,2-3) e la possibilità della sostituzione dell'indice di somma $\mathbf{p}$ con $-\mathbf{p}$, avremo

$$\hat{H}' = 2\sum_{\mathbf{p}} \eta_p v_p^2 + \sum_{\mathbf{p}} \eta_p\,(u_p^2 - v_p^2)\,(\hat{b}^+_{\mathbf{p}+}\hat{b}_{\mathbf{p}+} + \hat{b}^+_{\mathbf{p}-}\hat{b}_{\mathbf{p}-}) +$$

$$+ 2\sum_{\mathbf{p}} \eta_p u_p v_p\,(\hat{b}^+_{\mathbf{p}+}\hat{b}^+_{-\mathbf{p},-} + \hat{b}_{-\mathbf{p},-}\hat{b}_{\mathbf{p}+}) - \frac{g}{V}\sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \hat{B}^+_{\mathbf{p}'}\hat{B}_{\mathbf{p}}, \tag{39,9}$$

$$\hat{B}_{\mathbf{p}} = u_p^2\hat{b}_{-\mathbf{p},-}\hat{b}_{\mathbf{p}+} - v_p^2\hat{b}^+_{\mathbf{p}+}\hat{b}^+_{-\mathbf{p},-} + v_p u_p\,(\hat{b}_{-\mathbf{p},-}\hat{b}^+_{-\mathbf{p},-} - \hat{b}^+_{\mathbf{p}+}\hat{b}_{\mathbf{p}+}).$$

Scegliamo ora i coefficienti $u_p$, $v_p$ tenendo conto della condizione che per una data entropia l'energia $E$ del sistema sia minima. Quanto all'entropia, essa è determinata dall'espressione combinatoria

$$S = -\sum_{\mathbf{p}\alpha} [n_{\mathbf{p}\alpha} \ln n_{\mathbf{p}\alpha} + (1 - n_{\mathbf{p}\alpha}) \ln (1 - n_{\mathbf{p}\alpha})].$$

Pertanto la detta condizione è equivalente alla minimizzazione dell'energia per dati numeri di riempimento delle quasi-particelle $n_{\mathbf{p}\alpha}$.

Nell'operatore hamiltoniano (39,9) gli elementi matriciali diagonali hanno soltanto i termini che contengono i prodotti

$$\hat{b}^+_{\mathbf{p}\alpha}\hat{b}_{\mathbf{p}\alpha}=n_{\mathbf{p}\alpha},\quad \hat{b}_{\mathbf{p}\alpha}\hat{b}^+_{\mathbf{p}\alpha}=1-n_{\mathbf{p}\alpha}.$$

Pertanto otteniamo

$$E=2\sum_{\mathbf{p}}\eta_p v_p^2+\sum_{\mathbf{p}}\eta_p\,(u_p^2-v_p^2)\,(n_{\mathbf{p}+}+n_{\mathbf{p}-})-$$
$$-\frac{g}{V}\Big[\sum_{\mathbf{p}}u_p v_p\,(1-n_{\mathbf{p}+}-n_{\mathbf{p}-})\Big]^2. \qquad (39,10)$$

Variando questa espressione rispetto ai parametri $u_p$ (ed intanto tenendo conto del legame (39,3)), otteniamo quale condizione di minimo

$$\frac{\delta E}{\delta u_p}=-\frac{2}{v_p}(1-n_{\mathbf{p}+}-n_{\mathbf{p}-})\Big[2\eta_p u_p v_p-$$
$$-\frac{g}{V}(u_p^2-v_p^2)\sum_{\mathbf{p}'}u_{p'}v_{p'}\,(1-n_{\mathbf{p}'+}-n_{\mathbf{p}'-})\Big]=0.$$

Di qui ricaviamo l'equazione

$$2\eta_p u_p v_p=\Delta\,(u_p^2-v_p^2), \qquad (39,11)$$

dove $\Delta$ indica la somma

$$\Delta=\frac{g}{V}\sum_{\mathbf{p}}u_p v_p\,(1-n_{\mathbf{p}+}-n_{\mathbf{p}-}). \qquad (39,12)$$

Dalle (39,11) e (39,3) esprimiamo $u_p$, $v_p$ mediante $\eta_p$ e $\Delta$:

$$\left.\begin{matrix}u_p^2\\ v_p^2\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\left(1\pm\frac{\eta_p}{\sqrt{\Delta^2+\eta_p^2}}\right). \qquad (39,13)$$

Sostituendo questi valori nella (39,12) otterremo l'equazione che definisce $\Delta$:

$$\frac{g}{2V}\sum_{\mathbf{p}}\frac{1-n_{\mathbf{p}+}-n_{\mathbf{p}-}}{\sqrt{\Delta^2+\eta_p^2}}=1.$$

In equilibrio i numeri di riempimento delle quasi-particelle non dipendono dalla direzione dello spin e vengono dati dalla formula di distribuzione di Fermi (con il potenziale chimico nullo, si veda la nota alla pag. 20):

$$n_{\mathbf{p}+}=n_{\mathbf{p}-}\equiv n_{\mathbf{p}}=[e^{\varepsilon/T}+1]^{-1}. \qquad (39,14)$$

Passando poi dalla somma all'integrazione sullo spazio **p**, scriviamo questa equazione nella forma

$$\frac{g}{2}\int\frac{1-2n_{\mathbf{p}}}{\sqrt{\Delta^2+\eta_p^2}}\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}=1. \tag{39,15}$$

Studiamo ora le relazioni ottenute. Vedremo che la grandezza $\Delta$ gioca il ruolo principale nella teoria degli spettri del tipo considerato. Prima di tutto calcoliamo il valore di questa grandezza per $T = 0$ (indicandolo con $\Delta_0$).

Per $T = 0$ le quasi-particelle non esistono cosicché $n_{\mathbf{p}} = 0$ e l'equazione (39,15) diventa

$$\frac{g}{2\,(2\pi\hbar)^3}\int\frac{4\pi p^2\,dp}{\sqrt{\Delta_0^2+\eta_p^2}}=1. \tag{39,16}$$

È da notare subito che questa equazione non potrebbe avere soluzione a priori (per $\Delta_0$) se $g < 0$, cioè nel caso di repulsione (i segni di entrambi i membri dell'equazione sarebbero opposti a priori).

Il contributo fondamentale nell'integrale dell'espressione (39,16) è dato dal dominio degli impulsi in cui $\Delta_0 \ll v_F\,|\,p_F - p\,| \ll v_F p_F \sim \mu$ e l'integrale è di carattere logaritmico (la piccolezza di $\Delta_0$ rispetto a $\mu$ viene confermata dal risultato). Tagliando l'integrale logaritmico per un certo $\eta = \tilde{\varepsilon} \sim \mu$, abbiamo [1])

$$\int\frac{p^2\,dp}{[\Delta_0^2+v_F^2(p_F-p)^2]^{1/2}}\approx\frac{p_F^2}{v_F}\int\frac{d\eta}{(\Delta_0^2+\eta^2)^{1/2}}\approx\frac{2p_F^2}{v_F}\ln\frac{\tilde{\varepsilon}}{\Delta_0}.$$

Pertanto troviamo

$$\frac{gmp_F}{2\pi^2\hbar^3}\ln\frac{\tilde{\varepsilon}}{\Delta_0}=1, \tag{39,17}$$

da cui

$$\Delta_0=\tilde{\varepsilon}\exp\left(-\frac{2\pi^2\hbar^3}{gmp_F}\right)=\tilde{\varepsilon}\exp\left(-\frac{\pi\hbar}{2p_F\,|\,a\,|}\right). \tag{39,18}$$

Questa espressione si può scrivere anche nella forma

$$\Delta_0 = \tilde{\varepsilon}\exp\,(-2/g\nu_F), \tag{39,19}$$

---

[1]) Per $p \gg p_F$ si ha $\eta_p \backsim p^2$ e l'integrale (39,16) così scritto è divergente, come $p$. In realtà, tuttavia, questa divergenza è fittizia e viene eliminata mediante una rinormalizzazione fra la costante $g$ (cioè la lunghezza di diffusione $a$) e il potenziale di interazione, così come è stato fatto nei §§ 6 e 25. La successiva realizzazione di tale calcolo sufficientemente complicato dà la possibilità di determinare anche il coefficiente di proporzionalità fra il parametro di taglio $\tilde{\varepsilon}$ e il potenziale chimico $\mu$: $\tilde{\varepsilon} = (2/e)^{7/3}\mu = 0{,}49\mu$ (si veda *L. P. Gorkov, T. K. Melik-Barchudarov*, ŽETF **40**, 1452 (1961)).

dove $\nu_F = mp_F/\pi^2\hbar^3$ è la densità energetica del numero di stati della particella sulla superficie di Fermi ($\nu\, d\varepsilon$ è il numero di stati nell'intervallo $d\varepsilon$).

Interesse maggiore presenta la forma dello spettro energetico del sistema, ossia l'energia delle eccitazioni elementari $\varepsilon_{\mathbf{p}+} = \varepsilon_{\mathbf{p}-} \equiv \equiv \varepsilon(\mathbf{p})$. La troveremo in base alla variazione dell'energia di tutto il sistema al variare dei numeri di riempimento delle quasi-particelle, cioè dopo aver fatto variare $E$ della (39,10) rispetto a $n_{\mathbf{p}\alpha}$. Poiché i valori di $u_p$, $v_p$ sono presi già in base alla condizione che le derivate di $E$, rispetto ad essi, siano nulle, la variazione di $E$ al variare di $n_{\mathbf{p}\alpha}$ si può eseguire per $u_p$, $v_p$ costanti. In tal modo

$$\varepsilon = \left(\frac{\delta E}{\delta n_{\mathbf{p}\alpha}}\right)_{u_p v_p}.$$

Il calcolo della derivata, applicando le espressioni (39,11-13), conduce al semplice risultato seguente:

$$\varepsilon(p) = \sqrt{\Delta^2 + \eta_p^2}. \qquad (39,20)$$

Vediamo che l'energia della quasi-particella non può essere inferiore alla grandezza $\Delta$ che si ottiene per $p = p_F$. In altre parole, gli stati eccitati del sistema sono separati dallo stato fondamentale da una fessura energetica. Godendo di spin semintero le quasi-particelle devono comparire accoppiate. In questo senso si può dire che la larghezza della fessura è pari a $2\Delta$. Sottolineiamo come questa grandezza è esponenzialmente piccola: poiché $p_F\,|a|/\hbar \ll 1$, allora $\Delta_0$ è esponenzialmente piccola rispetto a $\mu$. È da notare anche che l'espressione (39,18) non può essere sviluppata in potenze di un piccolo parametro, cioè della costante di legame $g$; quest'ultima compare nel denominatore dell'esponente in modo che il valore $g = 0$ è un punto essenzialmente singolare della funzione $\Delta_0(g)$.

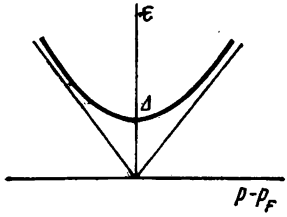


Fig. 5

Lo spettro (39,20) soddisfa la condizione di superfluidità stabilita al § 23: il minimo di $\varepsilon/p$ è diverso da zero. Pertanto il gas di Fermi con attrazione fra le particelle deve godere della proprietà di superfluidità.

La fig. 5 dà un confronto fra le leggi di dispersione delle quasi-particelle nel sistema di Fermi superfluido (la curva superiore) e in quello normale. Nell'ultimo sistema questa legge è rappresentata (in accordo con le considerazioni esposte alla fine del § 1) da due rette $\varepsilon = v_F\,|p - p_F|$.

La grandezza della fessura $\Delta$ dipende dalla temperatura, vale a dire che la forma stessa dello spettro dipende dalla distribuzione

statistica delle quasi-particelle, il che è una situazione analoga a quella per il liquido di Fermi di tipo normale. Poiché all'aumentare della temperatura i numeri di riempimento delle quasi-particelle crescono (tendendo a 1), si vede già dall'equazione (39,15) che $\Delta$ diminuisce in questo caso e si annulla per una certa temperatura finale $T_c$: il sistema passerà dallo stato superfluido a quello normale. Questo punto rappresenta una transizione di fase di seconda specie (simile alla transizione $\lambda$ nel liquido di Bose superfluido).

L'esistenza della fessura energetica nello spettro del gas di Fermi degenere rappresenta l'espressione dell'effetto di «accoppiamento», di cui si è parlato già all'inizio del paragrafo. Si può considerare la grandezza $2\Delta$ come l'energia di legame della coppia di Cooper, che deve essere spesa per spezzare questo legame.

Come è stato già detto al § 6, l'operatore hamiltoniano (39,5) tiene conto dell'interazione soltanto fra le coppie di particelle che si trovano in uno stato di singoletto $s$: il momento orbitale del moto relativo delle particelle è nullo e i loro spin sono antiparalleli. Avendo spin totale nullo, le coppie si comportano come formazioni di Bose e possono accumularsi in numero finito su un livello (del loro moto come un tutt'uno) di energia minore, cioè sul livello di impulso totale nullo. In questa interpretazione intuitiva il fenomeno è completamente analogo all'accumulazione di particelle in uno stato di energia nulla (condensazione di Bose-Einstein) nel gas di Bose; nel caso considerato la totalità di particelle accoppiate è il condensato.

È ovvio che non si deve attribuire un significato troppo letterale alla rappresentazione delle coppie legate. In modo più corretto si deve parlare della correlazione fra gli stati di una coppia di particelle nello spazio **p**, che conduce alla probabilità finita per le particelle di avere la somma degli impulsi uguale a zero. La dispersione $\delta p$ dei valori degli impulsi del dominio di correlazione corrisponde a un'energia dell'ordine $\Delta$, cioè $\delta p \sim \Delta/v_F$. La lunghezza corrispondente $\xi \sim \hbar/\delta p \sim \hbar v_F/\Delta$ definisce l'ordine di grandezza delle distanze fra le particelle ad impulsi correlati. Per $T = 0$ questa lunghezza (detta *lunghezza di coerenza*) vale

$$\xi_0 \sim \frac{\hbar v_F}{\Delta_0} \sim \frac{\hbar}{p_F} \exp\left(\frac{\pi\hbar}{2p_F|a|}\right). \tag{39,21}$$

Poiché nel gas di Fermi degenere $\hbar/p_F$ coincide in ordine di grandezza con le distanze interatomiche, possiamo vedere che $\xi_0$ è molto grande rispetto a queste ultime. Questa circostanza mostra con tutta evidenza quanto sia convenzionale il concetto di coppie legate.

L'origine dell'effetto Cooper è strettamente legata all'esistenza della superficie di Fermi che delimita (nello spazio **p**) il dominio finito di stati riempiti (per $T = 0$); è una proprietà importante che

la densità energetica del numero di stati su questa superficie sia diversa da zero. Questo legame si rivela nella formula (39,19) per la grandezza della fessura $\Delta_0$, che si annulla per $v_F \to 0$.

## § 40. *Gas di Fermi superfluido. Proprietà termodinamiche*

Iniziamo lo studio delle proprietà termodinamiche del gas di Fermi superfluido con il calcolo della dipendenza della grandezza della fessura energetica dalla temperatura. Riscrivendo l'equazione (39,15) nella forma seguente:

$$-1+\frac{g}{2}\int\frac{d^3p}{\varepsilon\,(2\pi\hbar)^3}=g\int\frac{n_p\,d^3p}{\varepsilon\,(2\pi\hbar)^3},$$

osserviamo che l'integrale a primo membro differisce dall'integrale per $T=0$ soltanto per la sostituzione di $\Delta_0$ con $\Delta$. Pertanto, tenendo conto della (39,17), vediamo che il primo membro è uguale a $\frac{gp_Fm}{2\pi^2\hbar^3}\ln\frac{\Delta_0}{\Delta}$. Sostituiamo nel secondo membro $n_p$ ottenuto dalla (39,14) e passiamo all'integrazione su $dp=d\eta/v_F$:

$$\ln\frac{\Delta_0}{\Delta}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\eta}{\varepsilon\,(e^{\varepsilon/T}+1)}=2I\left(\frac{\Delta}{T}\right), \tag{40,1}$$

dove

$$I(u)=\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2+u^2}\,(\exp\sqrt{x^2+u^2}+1)}$$

(data la rapida convergenza dell'integrale i limiti di integrazione si possono estendere fino a $\pm\infty$).

Nel dominio delle basse temperature ($T\ll\Delta_0$) l'integrale si calcola semplicemente [1]) e si ottiene

$$\Delta=\Delta_0\left[1-\sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta_0}}\,e^{-\Delta_0/T}\right]. \tag{40,2}$$

---

[1]) Per $u$ grandi il primo termine dello sviluppo di $I(u)$ in $1/u$ è

$$I(u)\approx\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{u}\exp\left[-u\left(1+\frac{x^2}{2u^2}\right)\right]=\left(\frac{\pi}{2u}\right)^{1/2}e^{-u}.$$

Nel dominio in prossimità del punto di transizione il valore $\Delta$ è piccolo, e i primi termini dello sviluppo dell'integrale $I(\Delta/T)$ danno [1])

$$\ln\frac{\Delta_0}{\Delta}=\ln\frac{\pi T}{\gamma\Delta}+\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2}\frac{\Delta^2}{T^2}. \tag{40,3}$$

Di qui si vede innanzitutto che $\Delta$ si annulla alla temperatura

$$T_c=\gamma\Delta_0/\pi=0{,}57\Delta_0, \tag{40,4}$$

che è piccola rispetto alla temperatura di degenerazione $T_0\sim\mu$. Dopo di che nel primo ordine in $T_c-T$ otteniamo

$$\Delta=T_c\left[\frac{8\pi^2}{7\zeta(3)}\left(1-\frac{T}{T_c}\right)\right]^{1/2}=3{,}06T_c\sqrt{1-\frac{T}{T_c}}. \tag{40,5}$$

---

[1]) Per sviluppare l'integrale $I(u)$, allorché $u\to 0$, sommiamo e sottraiamo da esso l'integrale

$$I_1=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+u^2}}-\frac{1}{x}\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)dx.$$

Allora $I=I_1+I_2$, dove

$$I_2=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(\frac{1}{x}\operatorname{th}\frac{x}{2}-\frac{1}{\sqrt{x^2+u^2}}\operatorname{th}\frac{\sqrt{x^2+u^2}}{2}\right)dx.$$

In $I_1$ il primo termine nell'espressione integranda si può integrare in modo elementare, ma il secondo termine va integrato per parti e si ottiene

$$2I_1=-\ln\frac{u}{2}+\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\ln x}{\operatorname{ch}^2(x/2)}dx.$$

L'integrale che figura in questa espressione è uguale a $2\ln(\pi/2\gamma)$ (dove $\ln\gamma=C=0{,}577$ è la costante di Eulero) di modo che $2I_1=\ln(\pi/\gamma u)$.

L'integrale $I_2$ si annulla per $u=0$. Il primo termine del suo sviluppo in $u^2$ è

$$I_2=-\frac{u^2}{4}\int_0^\infty\frac{dx}{x}\left(\frac{1}{x}\operatorname{th}\frac{x}{2}\right).$$

Sostituendovi lo sviluppo

$$\operatorname{th}\frac{x}{2}=4x\sum_{n=0}^\infty[\pi^2(2n+1)^2+x^2]^{-1}$$

(per la sua deduzione si veda la nota alla pag. 214) otteniamo

$$2I_2=4u^2\sum_{n=0}^\infty\int_0^\infty\frac{dx}{[(2n+1)^2\pi^2+x^2]^2}=\frac{u^2}{\pi^2}\sum_{n=0}^\infty(2n+1)^{-3}=u^2\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2}.$$

Ci restano da calcolare le grandezze termodinamiche del gas. Consideriamo dapprima il dominio delle basse temperature.

Per calcolare il calore specifico in questo dominio, è più semplice partire dalla formula

$$\delta E = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon\,(\delta n_{\mathbf{p}+} + \delta n_{\mathbf{p}-}) = 2\sum_{\mathbf{p}} \varepsilon \delta n_{\mathbf{p}}$$

per la variazione dell'energia totale al variare dei numeri di riempimento delle quasi-particelle. Dividendo per $\delta T$ e passando dalla sommatoria all'integrazione, otteniamo il calore specifico

$$C = V\frac{mp_F}{\pi^2\hbar^3}\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon\,\frac{\partial n}{\partial T}\,d\eta.$$

Per $T \ll \Delta$ la funzione di distribuzione delle quasi-particelle è $n \approx e^{-\varepsilon/T}$ e la loro energia $\varepsilon \approx \Delta_0 + \eta^2/2\Delta_0$; la semplice integrazione dà

$$C = V\frac{\sqrt{2}\,mp_F\Delta_0^{5/2}}{\pi^{3/2}\hbar^3 T^{3/2}}\,e^{-\Delta_0/T}. \tag{40,6}$$

Quindi, per $T \to 0$, il calore specifico decresce secondo una legge esponenziale, ciò che è conseguenza diretta dell'esistenza della fessura nello spettro energetico.

Per i calcoli ulteriori è comodo partire dal potenziale termodinamico $\Omega$, in quanto in tutte le nostre considerazioni supponiamo che il potenziale chimico del sistema (e non i numeri di particelle in esso) sia dato [1]). Usiamo la formula

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\right)_{T,\,V,\,\mu} = \left\langle\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda}\right\rangle, \tag{40,7}$$

dove $\lambda$ è un parametro qualsiasi che caratterizza il sistema (cfr. V, le formule (11,4), (15,11)); nel caso dato prendiamo come parametro la costante di legame $g$ che figura nel secondo termine dell'operatore hamiltoniano (39,8). La media di questo termine è data dall'ultimo addendo della formula (39,10), uguale, secondo la (39,12), a $-V\Delta^2/g \sim g$. Pertanto abbiamo

$$\frac{\partial\Omega}{\partial g} = -\frac{V\Delta^2}{g^2}.$$

Per $g \to 0$ la fessura energetica $\Delta$ tende a zero. Perciò, integrando questa uguaglianza su $dg$ nei limiti da 0 a $g$, troviamo la differenza fra il potenziale termodinamico $\Omega$ nello stato superfluido e il valore

[1]) Non confondere il potenziale chimico del gas come tale con il potenziale chimico (uguale a zero) del gas di quasi-particelle!

che esso avrebbe nello stato normale ($\Delta = 0$) alla stessa temperatura [1]):

$$\Omega_s - \Omega_n = -V \int_0^g \frac{\Delta^2}{g^2}\, dg. \tag{40,8}$$

Secondo il teorema generale delle piccole correzioni (cfr. V (24,16)), la correzione (40,8), qualora sia espressa in variabili convenienti, è uguale per tutti i potenziali termodinamici.

Allo zero assoluto $\Delta = \Delta_0$ e, secondo la (39,18), abbiamo

$$\frac{d\Delta_0}{dg} = \frac{2\pi^2\hbar^3\Delta_0}{mp_F g^2}.$$

Passando nella (40,8) dall'integrazione in $dg$ a quella in $d\Delta_0$, troviamo la seguente espressione per la differenza fra le energie dei livelli fondamentali nel sistema superfluido e in quello normale

$$E_s - E_n = -V \frac{mp_F}{4\pi^2\hbar^3}\Delta_0^2. \tag{40,9}$$

Il segno negativo di questa differenza sta ad esprimere l'instabilità dello stato fondamentale « normale », menzionata all'inizio del paragrafo, nel caso di attrazione fra le particelle del gas. Riferita a una sola particella, la differenza (40,9) è una grandezza $\sim\Delta^2/\mu$.

Passiamo ora al caso opposto: $T \to T_c$. Derivando l'uguaglianza (40,3) rispetto a $g$, troviamo

$$\frac{7\zeta(3)}{4\pi^2T^2}\Delta\, d\Delta = \frac{d\Delta_0}{\Delta_0} = \frac{2\pi^2\hbar^3}{mp_F}\frac{dg}{g^2}.$$

Sostituiamo da qui $dg/g^2$ nella formula (40,8) considerandolo come differenza delle energie libere:

$$F_s - F_n = -V \frac{7\zeta(3)\, mp_F}{8\pi^4\hbar^3T^2} \int_0^\Delta \Delta^3\, d\Delta$$

e definitivamente, tenendo conto della (40,5),

$$F_s - F_n = -V \frac{2mp_F T_c^2}{7\zeta(3)\,\hbar^3}\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2. \tag{40,10}$$

---

[1]) Qui si deve fare un'osservazione circa le approssimazioni da noi fatte sin dall'inizio. Per $g = 0$ nell'operatore hamiltoniano (39,8) non resta in generale interazione fra le particelle, e si potrebbe pensare che si ha il gas di Fermi perfetto e non un gas « normale » non perfetto. In realtà, tuttavia, nell'operatore hamiltoniano (39,8) sono state già fatte delle approssimazioni dopo le quali è impossibile calcolare il valore assoluto dell'energia. Sono stati omessi i i termini d'interazione (inessenziali per determinare la forma dello spettro e la differenza $\Omega_s - \Omega_n$), i quali danno un contributo all'energia, grande rispetto alla grandezza (40,8) esponenzialmente piccola (è esattamente il contributo proporzionale a $Ng$, dato dalla formula (6,13)).

Di qui la differenza delle entropie è

$$S_s - S_n = -V \frac{4mp_F T_c}{7\zeta(3)\hbar^3}\left(1 - \frac{T}{T_c}\right).$$

Quanto alla differenza dei calori specifici, essa per $T \to T_c$ tende a un valore finito

$$C_s - C_n = V \frac{4mp_F T_c}{7\zeta(3)\hbar^3}, \tag{40,11}$$

vale a dire che nel punto di transizione si ha un salto e, inoltre, $C_s > C_n$. Il calore specifico in stato normale è dato (in prima approssimazione) dalla formula per il gas perfetto (cfr. V (58,6)); espresso mediante $p_F$ il calore specifico ha la forma $C_n = Vmp_F T/3\hbar^3$. Pertanto il rapporto fra i calori specifici nel punto di transizione è

$$\frac{C_s(T_c)}{C_n(T_c)} = \frac{12}{7\zeta(3)} + 1 = 2{,}43. \tag{40,12}$$

Quanto alla sua superfluidità, il gas è caratterizzato dalla divisione della sua densità $\rho$ nelle parti normale e superfluida. Secondo la formula (23,6), la parte normale della densità è

$$\rho_n = -\frac{8\pi}{3(2\pi\hbar)^3}\int p^4 \frac{dn}{d\varepsilon}\, dp \approx -\frac{p_F^4}{3\pi^2\hbar^3 v_F}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{d\varepsilon}\, d\eta.$$

Per quanto riguarda la densità totale del gas, essa è legata a $p_F$ mediante

$$\rho = \frac{mN}{V} = \frac{8\pi p_F^3 m}{3(2\pi\hbar)^3}.$$

Pertanto

$$\frac{\rho_n}{\rho} = -2\int_0^{\infty} \frac{dn}{d\varepsilon}\, d\eta. \tag{40,13}$$

Questo integrale non richiede un calcolo particolare poiché può essere ridotto alla funzione già nota $\Delta(T)$. Dopo aver derivato l'equazione (40,1) rispetto a $T$ e confrontato l'integrale così ottenuto con la (40,13) si può vedere che

$$\frac{\rho}{\rho_n} = 1 - \frac{\Delta}{T\Delta'}. \tag{40,14}$$

Sostituendovi le espressioni limite (40,2) e (40,5), otteniamo

$$T \to 0: \frac{\rho_n}{\rho} = \left(\frac{2\pi\Delta_0}{T}\right)^{1/2} e^{-\Delta_0/T}, \tag{40,15}$$

$$T \to T_c: \frac{\rho_s}{\rho} = 2\left(1 - \frac{T}{T_c}\right). \tag{40,16}$$

Infine, è necessario fare ancora due osservazioni circa il dominio di validità delle formule ottenute nella temperatura.

All'avvicinarsi al punto di transizione $T_c$ i processi di interazione fra le quasi-particelle diventano essenziali (di essi non si tiene conto nella teoria qui esposta); sono questi processi a causare nel dato caso la comparsa di singolarità nelle grandezze termodinamiche, caratteristiche per il punto di transizione di fase di seconda specie. In prossimità sufficiente di questo punto le formule sopra ottenute alla fine diventano inapplicabili. Ma in virtù dell'esistenza del piccolo parametro (la costante di legame $g$), ciò si produce nel modello considerato soltanto per valori estremamente piccoli di $T_c - T$; torneremo al § 45 a uno studio più dettagliato di questa questione.

Così come nel liquido di Bose superfluido, nel gas di Fermi in questione (a differenza del gas di Fermi con repulsione, cfr. § 4) può propagarsi il suono (a velocità $u \sim p_F/m$ che viene determinata nel modo consueto dalla compressibilità del mezzo). Ciò vuol dire che, accanto allo spettro di eccitazioni del tipo di Fermi qui studiato, nello spettro di tale gas esiste anche il ramo di eccitazioni fononico, di Bose. Il calore specifico condizionato dai fononi è proporzionale a $T^3$ con un piccolo coefficiente, ma per $T \to 0$, esso, in linea di massima, deve prevalere sul calore specifico esponenzialmente decrescente (40,6).

## § 41. *Funzioni di Green di un gas di Fermi superfluido*

Passiamo ora alla costruzione del formalismo matematico delle funzioni di Green applicate a sistemi di Fermi superfluidi [1]).

Abbiamo visto al § 26 che in termini degli operatori $\psi$ la condensazione di Bose-Einstein nel sistema Bose è espressa dall'esistenza di valori limite non nulli degli elementi matriciali (quando il numero di particelle $N \to \infty$) che legano gli stati che si differenziano soltanto per la variazione di $N$ di un'unità. Il significato fisico di questa affermazione è il seguente: l'eliminazione o l'aggiunta di una particella al condensato non modifica gli stati del sistema macroscopico.

Nel caso del sistema di Fermi superfluido questa affermazione deve essere valida per il condensato composto di coppie di Cooper: lo stato del sistema non deve cambiare al variare di uno del numero di coppie nel condensato. Matematicamente ciò si esprime nell'esistenza di valori limite non nulli ($N \to \infty$) degli elementi matriciali nel prodotto $\hat{\Psi}_\beta(X_2)\hat{\Psi}_\alpha(X_1)$, che è l'operatore di annichilazione di due particelle e nell'operatore hermitiano coniugato di creazione

[1]) Il formalismo matematico qui esposto appartiene a *L. P. Gorkov* (1958).

di una coppia di particelle $\hat{\Psi}^+_\alpha(X_1)\,\hat{\Psi}^+_\beta(X_2)$. Questi elementi matriciali legano gli stati « uguali » dei sistemi, che differiscono soltanto per sottrazione o aggiunta di una coppia di particelle:

$$\lim_{N\to\infty}\langle m, N\,|\,\hat{\Psi}_\beta(X_2)\,\hat{\Psi}_\alpha(X_1)\,|\,m, N+2\rangle =$$
$$= \lim_{N\to\infty}\langle m, N+2\,|\,\hat{\Psi}^+_\alpha(X_1)\,\hat{\Psi}^+_\beta(X_2)\,|\,m, N\rangle^* \neq 0. \qquad (41,1)$$

In seguito ometteremo il segno di limite; per semplicità ometteremo anche l'indice matriciale diagonale $m$, che numera gli stati « uguali » di sistemi con numero diverso di particelle.

Come nel caso dei sistemi di Bose (§ 31), nel formalismo matematico delle funzioni di Green per i sistemi di Fermi superfluidi figurano funzioni distinte. Accanto alla funzione di Green ordinaria

$$iG_{\alpha\beta}(X_1, X_2) = \langle N\,|\,\mathrm{T}\hat{\Psi}_\alpha(X_1)\,\hat{\Psi}^+_\beta(X_2)\,|\,N\rangle \qquad (41,2)$$

è necessario introdurre anche funzioni « anomale » definite come segue:

$$\begin{aligned} iF_{\alpha\beta}(X_1, X_2) &= \langle N\,|\,\mathrm{T}\hat{\Psi}_\alpha(X_1)\,\hat{\Psi}_\beta(X_2)\,|\,N+2\rangle, \\ iF^+_{\alpha\beta}(X_1, X_2) &= \langle N+2\,|\,\mathrm{T}\hat{\Psi}^+_\alpha(X_1)\,\hat{\Psi}^+_\beta(X_2)\,|\,N\rangle. \end{aligned} \qquad (41,3)$$

Poiché ciascuna delle funzioni $F_{\alpha\beta}$ e $F^+_{\alpha\beta}$ è formata da due operatori uguali, allora

$$F_{\alpha\beta}(X_1, X_2) = -F_{\beta\alpha}(X_2, X_1), \quad F^+_{\alpha\beta}(X_1, X_2) = -F^+_{\beta\alpha}(X_2, X_1). \qquad (41,4)$$

Ricordiamo che, secondo i principi fondamentali della statistica, la media statistica non dipende dal fatto che sia stata calcolata rispetto alla funzione d'onda precisa dello stato stazionario del sistema chiuso o rispetto alla distribuzione di Gibbs. L'unica differenza è che nel primo caso la media sarà espressa mediante l'energia $E$ e il numero di particelle $N$, e nel secondo caso mediante $T$ e $\mu$. Per i ragionamenti sviluppati nel presente paragrafo è più comodo il primo metodo.

Nel modello di gas di Fermi studiato al § 39 le coppie legate si trovano nello stato di singoletto. La dipendenza dallo spin degli elementi matriciali negli operatori di annichilazione o creazione di una tale coppia si riduce allo spinore antisimmetrico unitario

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (41,5)$$

Scriviamo perciò la funzione (41,3) nella forma [1])

$$F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}F(X_1, X_2), \quad F^+_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}F^+(X_1, X_2); \qquad (41,6)$$

qui, in virtù della (41,4), $F$ e $F^+$ sono simmetriche in $X_1$ e $X_2$. La dipendenza spinoriale della funzione di Green $G_{\alpha\beta}$ per un sistema non ferromagnetico si riduce a $G_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}G$. In un sistema omogeneo e macroscopicamente fisso le funzioni di Green $G$, $F$ e $F^+$ dipendono unicamente dalle differenze delle coordinate dei punti e dalla differenza dei tempi (si veda la nota alla pag. 156).

Al pari della funzione $\Xi(X)$, introdotta al § 26, che aveva il significato di funzione d'onda delle particelle nel condensato, anche la funzione $iF(t, \mathbf{r}_1; t, \mathbf{r}_2)$ si può considerare come funzione d'onda delle particelle legate nelle coppie di Cooper che si trovano nel condensato. Allora

$$\Xi(X) = iF(X, X) \qquad (41,7)$$

sarà la funzione d'onda del moto di queste coppie come un tutt'uno. Si vede facilmente dalle definizioni (41,3) e (41,5) che in questo caso $F^+(X, X) = i\Xi^*(X)$. In un sistema stazionario macroscopicamente fisso la funzione $\Xi(X)$ si riduce a una costante, la quale può essere resa reale con una scelta appropriata delle fasi degli operatori $\psi$.

Calcoliamo ora le funzioni di Green così definite per il modello del gas di Fermi con un'attrazione debole fra le particelle.

L'operatore $\psi$ di Heisenberg verifica l'equazione (7,8). Essendo piccolo il raggio d'azione delle forze fra le particelle nel gas considerato, nel termine integrale di questa equazione si possono prendere i valori dei fattori $\hat{\Psi}(t, \mathbf{r}')$ nel punto $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ e portarli fuori dal segno di integrazione; allora l'equazione diventa [2])

$$i\frac{\partial\hat{\Psi}_\alpha}{\partial t} = -\left(\frac{\nabla^2}{2m} + \mu\right)\hat{\Psi}_\alpha - g\hat{\Psi}^+_\gamma\hat{\Psi}_\gamma\hat{\Psi}_\alpha. \qquad (41,8)$$

Mediante la coniugazione hermitiana di tutti i termini di questa equazione otteniamo un'equazione analoga per gli operatori $\hat{\Psi}^+$:

$$i\frac{\partial\hat{\Psi}^+_\alpha}{\partial t} = \left(\frac{\nabla^2}{2m} + \mu\right)\hat{\Psi}^+_\alpha + g\hat{\Psi}^+_\alpha\hat{\Psi}^+_\gamma\hat{\Psi}_\gamma. \qquad (41,9)$$

---

[1]) Si veda la nota alla pag. 50. Mentre per la sua struttura di spin $G_{\alpha\beta}$ è uno spinore misto del secondo ordine, le funzioni $F_{\alpha\beta}$ e $F^+_{\alpha\beta}$ rappresentano spinori contro- e covarianti, rispettivamente.

[2]) Come al § 39, indichiamo con $g$ la costante di legame che coincide con la costante $-U_0 = -\int U\, d^3x$. Per non confonderlo con la fessura $\Delta$, indichiamo l'operatore di Laplace con $\nabla^2$. Qui e nei paragrafi successivi poniamo $\hbar = 1$.

Sostituendo l'espressione (41,8) nella derivata $\partial G_{\alpha\beta}/\partial t$ (9,5), otteniamo l'equazione

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right)G_{\alpha\beta}(X-X')-$$
$$-ig\langle N\,|\,\mathrm{T}\hat{\Psi}^+_\gamma(X)\,\hat{\Psi}_\gamma(X)\,\hat{\Psi}_\alpha(X)\,\hat{\Psi}^+_\beta(X')\,|\,N\rangle=\delta_{\alpha\beta}\delta^{(4)}(X-X') \tag{41,10}$$

(cfr. la (15,12)). Qui figura l'elemento matriciale diagonale del prodotto di quattro operatori $\psi$, che può essere scritto, secondo la regola di moltiplicazione delle matrici, come somma di prodotti degli elementi matriciali di due coppie di operatori. Fra tutti questi prodotti lasciamo soltanto quello che contiene gli elementi matriciali per transizioni con cambiamento del numero di particelle $N \leftrightarrow N+2$ e omettiamo tutti gli altri termini:

$$\langle N\,|\,\mathrm{T}\hat{\Psi}^+_\gamma\hat{\Psi}_\gamma\hat{\Psi}_\alpha\hat{\Psi}^{+\prime}_\beta\,|\,N\rangle\rightarrow$$
$$\rightarrow\langle N\,|\,\mathrm{T}\hat{\Psi}_\gamma\hat{\Psi}_\alpha\,|\,N+2\rangle\langle N+2\,|\,\mathrm{T}\hat{\Psi}^+_\gamma\hat{\Psi}^+_\beta\,|\,N\rangle=$$
$$=-F_{\gamma\alpha}(X,X)\,F^+_{\gamma\beta}(X,X')=-\delta_{\alpha\beta}F(0)\,F^+(X-X') \tag{41,11}$$

(nell'ultima trasformazione sono utilizzate le espressioni (41,5)). Fisicamente questo termine corrisponde all'accoppiamento delle particelle e coincide in ordine di grandezza con la densità del condensato.

Sottolineiamo, tuttavia, che questo procedimento differisce in principio dalle approssimazioni fatte nel caso del gas di Bose debolmente non perfetto. In quest'ultimo quasi tutte le particelle si trovano nel condensato per $T=0$, e il numero di particelle « sopra condensato », che compaiono in seguito a una debole interazione, è relativamente piccolo. Nel caso considerato, al contrario, il condensato stesso compare in seguito a una debole interazione e perciò include in sé solo una piccola parte di particelle. In altre parole, i termini omessi con la sostituzione (41,11) non sono piccoli, ma grandi rispetto a quelli lasciati. Gli ultimi, tuttavia, conducono a un effetto qualitativamente nuovo, ossia alla modifica del carattere dello spettro, mentre i primi sarebbero utili soltanto per il calcolo della correzione al livello fondamentale del sistema, che qui non ci interessa (si veda in proposito la nota alla pag. 203).

Dopo la sostituzione (41,11) l'equazione (41,10) si riduce alla forma

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right)G(X)+g\Xi F^+(X)=\delta^{(4)}(X) \tag{41,12}$$

(l'argomento della funzione $X-X'$ è sostituito con $X$ e la costante $iF(0)$ è indicata con $\Xi$, in accordo con la definizione (41,7)). Vi

figurano le due funzioni incognite $G(X)$ e $F^+(X)$ per il cui calcolo occorre ancora un'equazione.

La si può ottenere calcolando la derivata

$$i\frac{\partial F^+_{\alpha\beta}(X-X')}{\partial t}=\left\langle N+2\left|\mathrm{T}\frac{\partial\hat{\Psi}^+_\alpha(X)}{\partial t}\hat{\Psi}^+_\beta(X')\right|N\right\rangle;$$

qui non compare il termine con la funzione $\delta$ (simile al secondo termine nella (9,5)), poiché la funzione $F^+_{\alpha\beta}(X-X')$ (contrariamente alla funzione $G_{\alpha\beta}(X-X')$) è continua per $t=t'$ [1]). Sostituendovi la (41,9) e di nuovo separando il termine condensato (analogamente all'operazione (41,11)), otteniamo infine l'equazione

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\nabla^2}{2m}-\mu\right)F^+(X)+g\Xi^*G(X)=0. \qquad (41,13)$$

Essa contiene le stesse due funzioni $G$ e $F^+$ dell'espressione (41,12); pertanto queste due equazioni sono sufficienti per calcolare le dette funzioni (per il calcolo di $F$ occorrerebbe introdurre in modo analogo una terza equazione).

Passiamo in queste equazioni alla rappresentazione degli impulsi, introducendo in modo usuale le componenti di Fourier $G(P)$ e $F^+(P)$:

$$\begin{aligned}(\omega-\eta_p)\,G(P)+g\Xi F^+(P)&=1,\\(\omega+\eta_p)\,F^+(P)+g\Xi^*G(P)&=0,\end{aligned} \qquad (41,14)$$

dove $P=(\omega,\mathbf{p})$ e $\eta_p=p^2/2m-\mu$. È da notare che, essendo pari la funzione $F^+(X)$, sono pari anche le sue componenti di Fourier $F^+(P)=F^+(-P)$.

Escludendo la funzione $F^+$ dalle due equazioni troviamo per $G$

$$(\omega^2-\eta_p^2-\Delta^2)\,G(P)=\omega+\eta_p, \qquad (41,15)$$

dove si è introdotta la notazione

$$\Delta=g\,|\,\Xi\,|\,. \qquad (41,16)$$

La soluzione formale dell'equazione (41,15) è

$$G(P)=\frac{\omega+\eta_p}{\omega^2-\varepsilon^2(p)}=\frac{u_p^2}{\omega-\varepsilon(p)}+\frac{v_p^2}{\omega+\varepsilon(p)}, \qquad (41,17)$$

dove $\varepsilon(p)=\sqrt{\Delta^2+\eta_p^2}$, mentre $u_p$ e $v_p$ sono dati dalle formule (39,13). Già di qui si vede che lo spettro delle eccitazioni elementari, definito dal polo positivo della funzione di Green, è dato dalla funzione $\varepsilon(p)$ e che noi giungiamo di nuovo al risultato (39,20). Vedia-

[1]) È facile convincersene calcolando il salto della funzione $F^+_{\alpha\beta}$ (come abbiamo già fatto al § 9 per $G_{\alpha\beta}$) e osservando che gli operatori $\hat{\Psi}^+_\alpha(t,\mathbf{r})$ e $\hat{\Psi}^+_\beta(t,\mathbf{r}')$ sono anticommutativi.

mo anche che la fessura energetica $\Delta$ e il modulo della funzione d'onda condensata del moto delle coppie come un tutt'uno sono grandezze mutuamente proporzionali.

Tuttavia l'espressione (41,17) per $G(P)$ non è ancora completa: in essa non è determinato il modo di aggirare i poli. In altre parole, resta ancora indeterminata la parte immaginaria della funzione $G$; questa parte contiene la funzione $\delta\,\delta(\omega \pm \varepsilon)$ e perciò scompare se la si moltiplica per $\omega^2 - \varepsilon^2$ nell'equazione (41,15).

Per $T = 0$ la regola di aggiramento dei poli viene stabilita mediante un confronto diretto fra l'espressione (41,17) e lo sviluppo (8, 7): nei termini con poli positivi e negativi la variabile va sostituita con $\omega + i0$ e $\omega - i0$, rispettivamente; allora l'espressione (41,17) diventa

$$G(\omega, \mathbf{p}) = \frac{u_p^2}{\omega - \varepsilon(p) + i0} + \frac{v_p^2}{\omega + \varepsilon(p) - i0} = \frac{\omega + \eta_p}{(\omega - \varepsilon + i0)(\omega + \varepsilon - i0)}. \tag{41,18}$$

Esprimendo ora $F^+$ dalla seconda equazione (41,14), troviamo

$$F^+(\omega, \mathbf{p}) = \frac{-g\Xi^*}{(\omega - \varepsilon + i0)(\omega + \varepsilon - i0)}. \tag{41,19}$$

D'altra parte, per definizione abbiamo

$$i\Xi^* \equiv F^+(X = 0) = \int \int_{-\infty}^{\infty} F^+(P) \frac{d\omega\, d^3p}{(2\pi)^4} \tag{41,20}$$

Sostituiamovi la (41,19); l'integrazione su $d\omega$ viene eseguita chiudendo il contorno con una semicirconferenza all'infinito nel semipiano superiore, dopo di che l'integrale si esprime mediante il residuo nel polo $\omega = \varepsilon$. Come risultato, dopo la divisione per $\Xi^*$, otteniamo l'uguaglianza (39,16) che definisce $\Delta_0$.

Per $T \neq 0$ è più difficile determinare la parte immaginaria delle funzioni di Green. Per costruire la funzione $G(\omega, \mathbf{p})$, che rispetto alla variabile $\omega$ goda di proprietà analitiche corrette, scriviamo dapprima la funzione ritardata $G^R(\omega, \mathbf{p})$; essa deve essere analitica nel semipiano superiore e perciò si ottiene dall'espressione (41,17) con la sostituzione $\omega \to \omega + i0$. La parte immaginaria di questa funzione è

$$\operatorname{Im} G^R = -\pi\,[u_p^2 \delta(\omega - \varepsilon) + v_p^2 \delta(\omega + \varepsilon)].$$

Quanto alla parte immaginaria della funzione cercata $G$, essa si ottiene di qui mediante la formula (36,14), secondo la quale

$$\operatorname{Im} G(\omega, \mathbf{p}) = \operatorname{th} \frac{\omega}{2T} \operatorname{Im} G^R(\omega, \mathbf{p}) =$$
$$= -(1 - 2n_{\mathbf{p}})\,\pi\,[u_p^2 \delta(\omega - \varepsilon) - v_p^2 \delta(\omega + \varepsilon)],$$

dove $n_{\mathbf{p}}$ è la funzione di distribuzione di Fermi (39,14) (utilizzando questa formula, abbiamo effettuato così il passaggio dalla media rispetto a un dato stato stazionario del sistema alla media rispetto alla distribuzione di Gibbs). La funzione $G$ con questa parte immaginaria si può scrivere nella forma

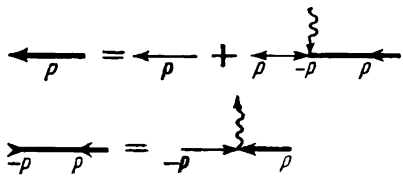
$$G(\omega, \mathbf{p}) = \frac{u_p^2}{\omega - \varepsilon + i0} + \frac{v_p^2}{\omega + \varepsilon - i0} + 2\pi i n_{\mathbf{p}} [u_p^2 \delta(\omega - \varepsilon) - \\ - v_p^2 \delta(\omega + \varepsilon)]. \tag{41,21}$$

Per la funzione $F^+(\omega, \mathbf{p})$ troviamo ora

$$F^+(\omega, \mathbf{p}) = F^+(\omega, \mathbf{p})|_{T=0} - \frac{i\pi g \Xi n_{\mathbf{p}}}{\varepsilon} [\delta(\omega - \varepsilon) + \delta(\omega + \varepsilon)], \tag{41,22}$$

dove il primo termine è la funzione (41,19) riferita a $T = 0$. Sostituendo questa espressione nella (41,20) e integrando, torniamo all'equazione (39,15) che definisce $\Delta(T)$.

L'equazione (41,14) si può rappresentare sotto forma di diagrammi, così come sono state rappresentate le equazioni (33,7) per il sistema di Bose superfluido. In questo caso le funzioni $G$, $F$, $F^+$ vengono rappresentate dagli stessi elementi grafici (33,6), cioè da frecce uni- e bilaterali. Le due equazioni (41,14) si scrivono come segue:




(41,23)

Alla freccia sottile corrisponde il fattore $iG^{(0)}(P)$, dove $G^{(0)}(P)$ è la funzione di Green del gas di Fermi perfetto. Alla linea ondulata, che entra nel suo vertice, e a quella che ne esce corrispondono i fattori $ig\Xi$ e $-ig\Xi^*$, rispettivamente. Confrontando la (41,23) e (33,7), vediamo che questi ultimi fattori corrispondono alle funzioni autoenergetiche $i\Sigma_{02}$ e $i\Sigma_{20}$, cioè rappresentano le prime approssimazioni per queste grandezze. Osserviamo che le particolarità della tecnica dei diagrammi per sistemi di Fermi superfluidi sono limitate agli elementi nuovi suindicati, ossia alle frecce bilaterali e alle linee ondulate; a differenza del caso di sistemi di Bose, i vertici « tripli » qui non compaiono. Pertanto la tecnica dei diagrammi è qui più semplice e più vicina a quella « ordinaria », che per i sistemi di Bose superfluidi.

## § 42. *Funzioni di Green termiche di un gas di Fermi superfluido*

Al § 41 è stato determinato lo spettro energetico di un gas di Fermi superfluido mediante l'applicazione delle funzioni di Green « temporali » ordinarie. Tuttavia per la soluzione di problemi più complessi (e soprattutto per lo studio delle propietà di un sistema in campi esterni) è più comodo il formalismo matematico delle funzioni di Green termiche (*A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov*, 1958).

La funzione termica $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ è definita dalla stessa formula (37,3) che per un gas di Fermi normale. Definiamo invece le funzioni termiche $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ e $\overline{\mathcal{F}}_{\alpha\beta}$ (corrispondenti alle funzioni temporali $F_{\alpha\beta}$ e $F^{+}_{\alpha\beta}$) mediante due formule analoghe

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\alpha\beta}(\tau_1, \mathbf{r}_1; \tau_2, \mathbf{r}_2) &= \sum_m \langle m, N \,|\, \hat{w}\mathrm{T}_\tau \hat{\Psi}^M_{\alpha 1} \hat{\Psi}^M_{\beta 2} \,|\, m, N+2\rangle, \\ \overline{\mathcal{F}}_{\alpha\beta}(\tau_1, \mathbf{r}_1; \tau_2, \mathbf{r}_2) &= \sum_m \langle m, N+2 \,|\, \hat{w}\mathrm{T}_\tau \hat{\overline{\Psi}}^M_{\alpha 1} \hat{\overline{\Psi}}^M_{\beta 2} \,|\, m, N\rangle. \end{aligned} \tag{42,1}$$

La dipendenza spinoriale di queste funzioni viene indicata (analogamente alla (41,6)) dai fattori $g_{\alpha\beta}$ [1]):

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}\mathcal{F}, \quad \overline{\mathcal{F}}_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}\overline{\mathcal{F}}. \tag{42,2}$$

Come $\mathcal{G}$, le funzioni $\mathcal{F}$ e $\overline{\mathcal{F}}$ dipendono soltanto dalla differenza $\tau = \tau_1 - \tau_2$ e soddisfano alle relazioni (37,6) (con il segno superiore):

$$\mathcal{F}(\tau) = -\mathcal{F}\left(\tau + \frac{1}{T}\right), \quad \overline{\mathcal{F}}(\tau) = -\mathcal{F}\left(\tau + \frac{1}{T}\right). \tag{42,3}$$

Le serie di Fourier in $\tau$ per queste funzioni contengono quindi soltanto le « frequenze » dispari (37,8a): $\zeta_s = (2s+1)\,\pi T$.

Gli operatori $\psi$ di Matsubara coincidono per $\tau = 0$ con quelli di Heisenberg per $t = 0$:

$$\hat{\Psi}^M(\tau = 0, \mathbf{r}) = \hat{\Psi}(t = 0, \mathbf{r}).$$

Confrontando le definizioni delle funzioni $\mathcal{F}$, $\overline{\mathcal{F}}$ con le definizioni di $F$, $F^+$ troviamo perciò che

$$\mathcal{F}(0, \mathbf{r}; 0, \mathbf{r}) = \Xi(\mathbf{r}), \quad \overline{\mathcal{F}}(0, \mathbf{r}; 0, \mathbf{r}) = \Xi^*(\mathbf{r}), \tag{42,4}$$

dove con $\Xi$ si deve intendere la funzione d'onda condensata, la cui media è presa secondo Gibbs, cioè espressa mediante la temperatura del sistema.

---

[1]) I segni opposti nelle definizioni di $\mathcal{F}$ e $\overline{\mathcal{F}}$ (a differenza dei segni uguali nella (41,5)) sono appropriati, in quanto nelle definizioni (42,1) non esiste il fattore $i$, che figurava nella (41,3).

Mostriamo in che modo le funzioni di Green termiche permettono di ottenere di nuovo lo spettro energetico del gas di Fermi superfluido a temperature diverse da zero.

Le equazioni per le funzioni termiche $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$, $\overline{\mathcal{F}}$ si deducono analogamente alle equazioni (41,12-13); inoltre, al posto della derivazione rispetto a $t$ si deriva rispetto a $\tau$, e in luogo delle equazioni (41,8-9) sono impiegate equazioni che differiscono dalle (41,8-9) per la sostituzione $it \to \tau$. Così come nella (41,11), nella media del prodotto di quattro operatori $\psi$ di Matsubara vengono separati i termini contenenti gli elementi matriciali per le transizioni con variazione del numero di particelle di 2. Come risultato otteniamo le seguenti equazioni:

$$\begin{gathered}\left(-\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right)\mathcal{G}(\tau,\mathbf{r};\tau',\mathbf{r}')+g\Xi\overline{\mathcal{F}}(\tau,\mathbf{r};\tau',\mathbf{r}')= \\ =\delta(\tau-\tau')\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \\ \left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right)\overline{\mathcal{F}}(\tau,\mathbf{r};\tau',\mathbf{r}')- \\ -g\Xi^*\mathcal{G}(\tau,\mathbf{r};\tau',\mathbf{r}')=0.\end{gathered} \tag{42,5}$$

Dopo il passaggio alle componenti di Fourier queste equazioni diventano

$$\begin{gathered}(i\zeta_s-\eta_p)\,\mathcal{G}(\zeta_s,\mathbf{p})+g\Xi\overline{\mathcal{F}}(\zeta_s,\mathbf{p})=1, \\ -(i\zeta_s+\eta_p)\,\overline{\mathcal{F}}(\zeta_s,\mathbf{p})-g\Xi^*\mathcal{G}(\zeta_s,\mathbf{p})=0.\end{gathered} \tag{42,6}$$

Le soluzioni di queste equazioni sono

$$\mathcal{G}(\zeta_s,\mathbf{p})=-\frac{i\zeta_s+\eta_p}{\zeta_s^2+\varepsilon^2}, \tag{42,7}$$

$$\overline{\mathcal{F}}(\zeta_s,\mathbf{p})=\frac{g\Xi^*}{\zeta_s^2+\varepsilon^2}=F^+(i\zeta_s,\mathbf{p}), \tag{42,8}$$

dove di nuovo $\varepsilon^2=\Delta^2+\eta_p^2$, $\Delta=g\Xi$ (inoltre, questa soluzione è definita univocamente senza contenere nessuna funzione $\delta$, come si verificava per le funzioni $G$ e $F^+$).

La condizione che definisce la fessura energetica nello spettro si ricava ora dall'uguaglianza

$$\Xi^*=\overline{\mathcal{F}}(\tau=0,\ \mathbf{r}=0)=T\sum_{s=-\infty}^{\infty}\int\overline{\mathcal{F}}(\zeta_s,\mathbf{p})\frac{d^3p}{(2\pi)^3},$$

ossia, dopo la sostituzione (42,8),

$$\frac{gT}{(2\pi)^3}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{\zeta_s^2+\varepsilon^2(p)}=1. \tag{42,9}$$

La sommatoria su $s$ è data dalla formula [1])

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} [(2s+1)^2 \pi^2 + a^2]^{-1} = \frac{1}{2a} \operatorname{th} \frac{a}{2} \tag{42,10}$$

e conduce all'uguaglianza

$$\frac{g}{2} \int \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{th} \frac{\varepsilon}{2T} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = 1, \tag{42,11}$$

coincidente con la (39,15).

## § 43. *Superconduttività dei metalli*

Il fenomeno della superconduttività dei metalli consiste nella superfluidità del fluido di Fermi elettronico in essi, simile alla superfluidità del gas di Fermi degenere studiato nei paragrafi precedenti. S'intende che, sotto molti aspetti importanti, il fluido elettronico e il gas di Fermi sono sistemi fisici sostanzialmente distinti. Ma al tempo stesso le caratteristiche fisiche fondamentali, che si riferiscono alle proprietà dello spettro energetico, in entrambi i casi sono uguali. Studiamo qualitativamente la seguente questione: quali caratteristiche del modello esaminato sopra si possono trasportare, e in quale misura, agli elettroni nei metalli?

La caratteristica importante del metallo è l'anisotropia del suo spettro energetico elettronico a differenza dell'isotropia dello spettro del gas di Fermi studiato. Tuttavia questa circostanza non ostacola la comparsa dell'effetto Cooper, per il quale è essenziale il fatto stesso dell'esistenza di una superficie di Fermi ben marcata (qualunque sia la sua forma) e la densità finita del numero di stati su di essa. È necessario anche che elettroni di impulsi e spin opposti abbiano la stessa energia, cioè che tutti e due si trovino sulla superficie di Fermi. Queste condizioni sono garantite automaticamente dalla simmetria rispetto all'inversione del tempo. Si può dire che gli elettroni si accoppiano negli stati che si producono l'uno dall'altro per inversione del tempo.

---

[1]) Si può ottenere questa formula scrivendo

$$\frac{1}{(2s+1)^2 \pi^2 + a^2} = \frac{1}{2a} \left[ \frac{1}{a + i\pi(2s+1)} + \frac{1}{a - i\pi(2s+1)} \right] =$$

$$= \frac{1}{2a} \int_0^\infty e^{-ax} [e^{-i\pi(2s+1)x} + e^{i\pi(2s+1)x}] \, dx$$

ed effettuando la sommatoria della progressione geometrica sotto il segno di integrazione.

In seguito sorge il problema del segno dell'interazione fra gli elettroni nel metallo. In un senso molto semplificato si potrebbe dire che questa interazione è composta dalla repulsione coulombiana schermata a distanze interatomiche e dall'interazione attraverso il reticolo. Quest'ultima è descritta come risultato dello scambio di fononi virtuali e ha carattere di attrazione (§ 64). Se l'ultima interazione « prevale », il metallo diventa superconduttore a temperature sufficientemente basse.

È importante che all'interazione mediante lo scambio di fononi partecipino soltanto gli elettroni giacenti in uno strato relativamente stretto dello spazio **p** in prossimità della superficie di Fermi; lo spessore di questo strato vale $\sim \hbar\omega_D$ ed è piccolo rispetto al potenziale chimico degli elettroni $\mu$ ($\omega_D$ è la frequenza di Debye del cristallo). Quindi, se per la descrizione della superconduttività si vuole ricorrere al modello del gas di Fermi debolmente non perfetto, per il parametro di taglio $\tilde{\varepsilon}$ nella (39,19) si deve intendere la grandezza [1])

$$\tilde{\varepsilon} \sim \hbar\omega_D \tag{43,1}$$

(al posto di $\tilde{\varepsilon} \sim \mu$).

Quanto alla supposizione che l'interazione sia debole, per tutti i superconduttori si ha in realtà

$$T_c \ll \hbar\omega_D \ll \mu. \tag{43,2}$$

Tuttavia la supposizione fatta al § 39 sottintende qualche cosa in più: la piccolezza della costante di legame $g$, che conduce a un valore grande dell'esponente adimensionale nella (39,19). Nel caso considerato questa supposizione è espressa dalla condizione

$$\ln (\hbar\omega_D/T_c) \gg 1, \tag{43,3}$$

vale a dire che deve essere grande non soltanto il rapporto $\hbar\omega_D/T_c$, ma anche il suo logaritmo. In realtà questa condizione è verificata molto peggio [2]).

Tenendo conto di tutte le distinzioni reali fra il liquido elettronico nel metallo e il modello del gas di Fermi debolmente non perfetto, la teoria della superconduttività diventa molto complicata. Risulta, al tempo stesso, che già una teoria semplice, basata sul detto modello, sotto molti aspetti descrive bene le proprietà dei superconduttori non soltanto qualitativamente, ma anche quantitati-

---

[1]) Così, fra l'altro, si elimina la questione della divergenza dell'integrale (39,16) per grandi impulsi (si veda la nota alla pag. 197).

[2]) Il rapporto $\hbar\omega_D/T_c$ varia pressappoco nei limiti da 10 per Pb a 300 per Al e Cd.

vamente. Come è stato già detto, questa teoria appartiene a Bardeen, Cooper, Schrieffer per cui il modello del gas di Fermi con attrazione debole fra le particelle si chiama *modello BCS*.

## § 44. *Corrente superconduttrice*

Ai due tipi di moto nel liquido superfluido elettricamente neutro (elio liquido) corrispondono, nel caso di un metallo superconduttore, due tipi di correnti elettriche, che possono passare in esso contemporaneamente. La *corrente superconduttrice* non trasporta calore e non è accompagnata da dissipazione di energia e può verificarsi in un sistema in equilibrio termodinamico; la *corrente normale*, invece, si accompagna all'effetto Joule. Indicheremo la densità della corrente superconduttrice e normale con $\mathbf{j}_s$ e $\mathbf{j}_n$; la densità totale della corrente è $\mathbf{j} = \mathbf{j}_s + \mathbf{j}_n$.

Una serie di conclusioni importanti sulle proprietà della corrente superconduttrice si può trarre, indipendentemente dal modello particolare, già dal fatto stesso della comparsa di una nuova grandezza macroscopica, ossia della funzione d'onda condensata $\Xi(t, \mathbf{r})$.

Come al § 26, introduciamo la fase $\Phi$ di questa funzione:

$$\Xi(t, \mathbf{r}) = |\Xi| e^{i\Phi}. \tag{44,1}$$

Così come nell'elio liquido il gradiente della fase $\Phi$ definisce, secondo la (26,12), la velocità del moto superfluido $\mathbf{v}_s$, anche il gradiente della fase nel superconduttore definisce una grandezza osservabile in questo caso, ossia la densità della corrente superconduttrice. Per l'anisotropia del metallo la direzione $\mathbf{j}_s$ non coincide in generale con la direzione $\nabla\Phi$ e il legame fra le componenti di questi vettori è dato da un tensore del secondo rango. A scanso di complicazioni non di principio, ci limiteremo qui al caso di simmetria cubica del cristallo metallico.

Allora il tensore del secondo rango si riduce a uno scalare e il legame fra $\mathbf{j}_s$ e $\nabla\Phi$ a una semplice proporzionalità. Scriviamo questo legame nella forma

$$\mathbf{j}_s = \frac{e\hbar}{2m} n_s \nabla\Phi, \tag{44,2}$$

dove per definizione $e = -|e|$ è la carica dell'elettrone e $m$ la sua massa (reale). La grandezza $n_s$ così definita (funzione della temperatura) si chiama *densità del numero di elettroni superconduttori*; questa grandezza gioca un ruolo importante, così come la densità della componente superfluida nell'elio liquido. Sottolineiamo che essa non coincide affatto con la densità del condensato delle coppie

di Cooper (analogamente, $\rho_s$ nell'elio liquido non coincide con la densità degli atomi condensati [1])).

La formula (44,2) (così come la formula (26,12) per l'elio liquido) suppone che la variazione della fase nello spazio sia sufficientemente lenta. Al tempo stesso, però, mentre nel caso del liquido di Bose si richiedeva che $\Phi$ varii poco soltanto a distanze interatomiche, qui la condizione risulta notevolmente più forte. La lunghezza di coerenza $\xi_0 \sim \hbar v_F/\Delta_0$ funge da dimensione caratteristica per il liquido di Fermi superfluido e la fase $\Phi$ deve variare poco proprio a questa distanza (grande, rispetto alle distanze interatomiche). Sottolineiamo che qui figura il parametro di lunghezza costante $\xi_0$ (indipendente dalla temperatura); un'interpretazione rigorosa di questo criterio verrà data in seguito (si veda la fine del § 51).

Il legame fra $\mathbf{j}_s$ e $\Phi$ diventa più complicato se il superconduttore si trova in un campo magnetico esterno; considereremo qui il caso di un campo costante (nel tempo). Le correzioni necessarie da portare alla formula (44,2) si possono determinare partendo dall'ipotesi dell'invarianza di gauge della teoria.

Il senso di questa condizione è che tutte le grandezze fisiche osservate devono rimanere invariate per trasformazione di gauge del vettore potenziale del campo magnetico:

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla\chi(\mathbf{r}), \tag{44,3}$$

dove $\chi(\mathbf{r})$ è una funzione delle coordinate arbitraria. In questo caso gli operatori $\psi$ si trasformano secondo una legge che coincide con la legge di trasformazione delle funzioni d'onda:

$$\hat{\Psi} \to \hat{\Psi} \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\chi\right), \quad \hat{\Psi}^+ \to \hat{\Psi}^+ \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\chi\right), \tag{44,4}$$

dove $e$ è la carica delle particelle descritte dall'operatore $\psi$ (si veda III (111,9)) [2]). Quanto alle funzioni di Green $G(X, X')$ e $F(X, X')$,

---

[1]) Il coefficiente nella (44,2) è scritto in modo tale che nel gas di Fermi superfluido libero (modello BCS) $mn_s$ coincida con la grandezza $\rho_s$ calcolata al § 40. Quest'ultima è definita in modo tale che la corrente $\mathbf{j}_s$ debba essere espressa nella forma $\mathbf{j}_s = en_s\mathbf{v}_s$, dove $\mathbf{v}_s$ è la velocità superfluida. A sua volta, $\mathbf{v}_s$ è legata al gradiente della fase dall'uguaglianza $\mathbf{v}_s = (\hbar/2m)\nabla\Phi$; la doppia massa $2m$ (al posto di $m$ nella (26,12)) vi figura per il fatto che il condensato è composto di particelle accoppiate.

[2]) Grazie al fatto che all'operatore hamiltoniano della seconda quantizzazione (7,7) gli operatori $\psi$ partecipano a coppie, $\hat{\Psi}(X)$ e $\hat{\Psi}^+(X)$, esso si trasforma con le sostituzioni (44,3-4) come un operatore hamiltoniano ordinario per la stessa trasformazione delle funzioni d'onda ordinarie (non operatoriali). La trasformazione del tipo (44,3-4) è stata già utilizzata di fatto al § 19.

esse, come elementi matriciali dei prodotti $\hat{\Psi}\hat{\Psi}'^{+}$ o $\hat{\Psi}\hat{\Psi}'$, si trasformano secondo la legge

$$\begin{aligned} G(X, X') &\to \exp\left\{\frac{ie}{\hbar c}[\chi(\mathbf{r})-\chi(\mathbf{r}')]\right\} G(X, X'), \\ F(X, X') &\to \exp\left\{\frac{ie}{\hbar c}[\chi(\mathbf{r})+\chi(\mathbf{r}')]\right\} F(X, X'). \end{aligned} \tag{44,5}$$

In questo caso

$$\Xi = iF(X, X) \to \exp\left(\frac{2ie}{\hbar c}\chi\right)\Xi,$$

vale a dire che la fase della funzione d'onda condensata è

$$\Phi \to \Phi + \frac{2e}{\hbar c}\chi(\mathbf{r}). \tag{44,6}$$

La relazione (44,2) non è invariante rispetto a tale trasformazione della fase. Per ottenere l'invarianza richiesta essa deve essere completata da un termine contenente il vettore potenziale del campo magnetico:

$$\mathbf{j}_s = \frac{\hbar e}{2m} n_s \left(\nabla\Phi - \frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A}\right). \tag{44,7}$$

Il raddoppiamento della carica (nel secondo termine fra parentesi) è causato dall'accoppiamento degli elettroni nel superconduttore.

Questa espressione è già sufficiente per spiegare la proprietà fondamentale macroscopica del superconduttore, ossia l'esclusione da esso del campo magnetico (*effetto Meissner*) [1]).

Consideriamo un superconduttore omogeneo collocato in un campo magnetico debole, la cui intensità è supposta piccola rispetto al campo critico $H_c$ che distrugge la superconduttività. Con questa condizione si esclude un'influenza sostanziale del campo magnetico sulla grandezza $n_s$. Supponiamo che il corpo si trovi in equilibrio termodinamico cosicché la corrente normale non esiste e perciò $\mathbf{j}_s = \mathbf{j}$ [2]). Applichiamo ora ad entrambi i membri dell'uguaglianza (44,7) l'operazione rot e osserviamo che in questo caso rot $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ è l'induzione magnetica del corpo. Ciò ci permette di ottenere l'*equazione dei London*

$$\operatorname{rot}\mathbf{j} = -\frac{e^2 n_s}{mc}\mathbf{B} \tag{44,8}$$

(*F. London*, *H. London*, 1935) [3]).

---

[1]) L'elettrodinamica fenomenologica dei superconduttori è esposta in un altro volume del presente Corso; si veda VIII, capitolo VI.

[2]) Ciò sarà supposto dappertutto in questo capitolo in modo che con $\mathbf{j}$ sarà intesa dappertutto la densità della corrente superconduttrice.

[3]) La deduzione esposta dell'equazione (44,8) appartiene a *L. D. Landau* (1941).

Questa è un'equazione specifica per il superconduttore. Utilizziamo inoltre le equazioni generali di Maxwell

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \tag{44,9}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \tag{44,10}$$

Sostituendo j dalle (44,9) e (44,8) e osservando che in virtù della (44,10) rot rot $\mathbf{B} = -\Delta\mathbf{B}$, otteniamo l'equazione esprimente il campo magnetico nel superconduttore

$$\Delta\mathbf{B} = \delta^{-2}\mathbf{B}, \tag{44,11}$$

dove si è introdotta la notazione

$$\delta^2 = mc^2/4\pi e^2 n_s. \tag{44,12}$$

Troviamo mediante questa equazione la distribuzione del campo nel superconduttore in prossimità della sua superficie, che supporremo piana; consideriamo questa superficie come piano $yz$ e dirigiamo l'asse $x$ all'interno del corpo. Per queste condizioni la distribuzione del campo dipende unicamente dalla sola coordinata $x$, e dalla (44,10) abbiamo $dB_x/dx = 0$; allora dalla (44,11) segue automaticamente che $B_x = 0$. L'equazione (44,11) diventa ora $d^2\mathbf{B}/dx^2 = \mathbf{B}/\delta^2$ da cui

$$\mathbf{B}(x) = \mathfrak{H} e^{-x/\delta}, \tag{44,13}$$

dove il vettore $\mathfrak{H}$ è parallelo alla superficie.

Vediamo che il campo magnetico si smorza esponenzialmente nell'interno del superconduttore penetrando in esso soltanto alla distanza $\sim\delta$. Questa lunghezza è macroscopica, ma piccola rispetto alle dimensioni usuali dei campioni di massa ($\delta \sim 10^{-6}$-$10^{-5}$ cm); in tal modo il campo penetra di fatto soltanto in uno strato superficiale sottile. La lunghezza $\delta$ si chiama *profondità di London di penetrazione* del campo. Sottolineiamo che essa è una grandezza direttamente misurabile e avente un significato ben determinato a differenza del significato convenzionale del parametro $n_s$.

Tuttavia, la deduzione eseguita necessita di una riserva sostanziale. La formula iniziale (44,7) è applicabile unicamente alla condizione che la variazione di tutte le grandezze nello spazio sia sufficientemente lenta: le distanze caratteristiche, alle quali esse variano sostanzialmente, devono essere grandi rispetto alla lunghezza di coerenza $\xi_0$ [1]). Nel caso considerato ciò vuol dire che si deve avere

$$\delta \gg \xi_0. \tag{44,14}$$

---

[1]) Ricordiamo che l'induzione stessa **B** è la vera intensità microscopica del campo magnetico, la cui media è presa su elementi di volume infinitamente piccoli fisicamente e di dimensioni grandi soltanto rispetto al reticolo costante.

Questa condizione, s'intende, non getta nessun'ombra sulla dimostrazione stessa che il campo viene escluso dal superconduttore. Se avessimo supposto che il campo non venisse escluso, ciò avrebbe implicato una contraddizione logica poiché, in questo caso, la sua variazione sarebbe stata lenta a priori e l'equazione (44,11) sarebbe stata applicabile. Ma l'equazione concreta (44,11) e la legge di smorzamento del campo (44,13), che da essa deriva, sono valide soltanto qualora sia soddisfatta la condizione (44,14).

La situazione in cui nel superconduttore è verificata la disuguaglianza $\delta \gg \xi_0$ è detta *situazione di London*. La situazione opposta, in cui $\delta \ll \xi_0$, si chiama *caso di Pippard* (la legge di smorzamento del campo in profondità del superconduttore per questo caso sarà considerata al § 52). Per $T \to T_c$ la densità degli elettroni superconduttori $n_s \to 0$ in modo che $\delta \to \infty$. Pertanto, in prossimità sufficiente del punto di transizione, si ha sempre la situazione di London. Ma per $T \to 0$ la relazione fra $\delta$ e $\xi_0$ dipende dalle proprietà concrete del metallo [1]).

Consideriamo infine ancora una conseguenza dall'espressione (44,7), non dipendente dalla relazione fra $\delta$ e $\xi_0$.

Come è noto dall'elettrodinamica macroscopica dei superconduttori, se per l'orifizio di un toro superconduttore passa un flusso magnetico, questo flusso resta costante qualunque siano le variazioni dello stato del corpo (che non violano però la sua superconduttività); inoltre si suppone che il toro sia massiccio, cioè che il suo diametro e lo spessore siano grandi rispetto alla lunghezza di coerenza e alla profondità di penetrazione del campo. Mostriamo che la grandezza del flusso magnetico « ghiacciato » nell'orifizio del toro può essere soltanto un intero multiplo di un certo « quanto di flusso » elementare (*F. London*, 1954).

Nella massa del corpo (all'esterno del dominio di penetrazione del campo) la densità di corrente è $\mathbf{j} = 0$; il vettore potenziale invece è diverso da zero ed è nullo soltanto il suo rotore, cioè l'induzione magnetica $\mathbf{B}$. Consideriamo un contorno chiuso $C$ che abbraccia l'orifizio del toro e passa all'interno del corpo lontano dalla sua superficie; vengono soddisfatte così le condizioni di applicabilità della formula (44,7), ossia la variazione sufficientemente lenta della fase $\Phi$ e del potenziale $\mathbf{A}$ nello spazio. La circuitazione del vettore $\mathbf{A}$ lungo il contorno $C$ coincide con il flusso dell'induzione magnetica attraverso la superficie costruita sul contorno, cioè con il flusso $\varnothing$ attraverso l'orifizio del toro:

$$\oint \mathbf{A}\, d\mathbf{l} = \int \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{f} = \int \mathbf{B}\, d\mathbf{f} \equiv \varnothing .$$

[1]) La situazione di London in tutto il dominio delle temperature ha luogo, ad esempio, nei metalli puri dei gruppi transitivi del sistema periodico e in alcune leghe intermetalliche. Il caso di Pippard ha luogo (lontano da $T_c$) nei metalli puri dei gruppi intransitivi.

D'altra parte, uguagliando a zero l'espressione (44,7) e integrandola sul contorno, otteniamo

$$\oint \mathbf{A}\, d\mathbf{l} = \frac{\hbar c}{2e} \oint \nabla\Phi \cdot d\mathbf{l} = \frac{\hbar c}{2e}\, \delta\Phi,$$

dove $\delta\Phi$ è la variazione della fase della funzione d'onda nel descrivere il contorno. Ma dalla supposizione che questa funzione sia univoca risulta che la fase può variare soltanto di un intero multiplo di $2\pi$. Così otteniamo il seguente risultato:

$$\varnothing = n\varnothing_0, \qquad \varnothing_0 = \frac{\pi\hbar c}{|e|} = 2\cdot 10^{-7}\ \mathrm{G\cdot cm^2}, \tag{44,15}$$

dove $n$ è un intero. La grandezza $\varnothing_0$ rappresenta il *quanto* elementare *di flusso magnetico*.

La quantizzazione del flusso magnetico ha anche un altro aspetto: essa conduce a valori discreti della corrente totale $J$ che può passare (in assenza di campo magnetico esterno) per un anello superconduttore. Infatti, la corrente $J$ crea un flusso magnetico attraverso l'orifizio dell'anello, pari a $LJ/c$, dove $L$ è il coefficiente di autoinduzione. Uguagliando questo flusso a $n\varnothing_0$, troviamo che la corrente può assumere i seguenti valori:

$$J = \frac{c\varnothing_0}{L}\, n = \frac{\pi\hbar c^2}{|e|\, L}\, n. \tag{44,16}$$

Contrariamente al quanto di flusso magnetico, il « quanto di corrente totale » dipende (assieme all'autoinduzione $L$) dalla forma e dalle dimensioni dell'anello.

## PROBLEMA

Determinare il momento magnetico di una sferetta superconduttrice di raggio $R \ll \delta$, collocata in un campo magnetico, nella situazione di London.

*Soluzione.* Per $R \ll \delta$ si può supporre costante il campo magnetico all'interno della sferetta e uguale al campo esterno $\mathfrak{H}$. Se si prende il potenziale vettoriale nella forma $\mathbf{A} = 1/2\,[\mathfrak{H}\,\mathbf{r}]$, si può porre semplicemente

$$\mathbf{j} = -\,(n_s e^2/mc)\,\mathbf{A}$$

(cioè porre nella (44,7) $\Phi = 0$); allora si verifica automaticamente la condizione al contorno di scomparsa della componente normale della corrente ($\mathbf{nj} = 0$) sulla superficie della sferetta. Il momento magnetico si calcola come l'integrale

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{rj}]\, dV$$

sul volume della sferetta ed è uguale a

$$\mathbf{M} = -\frac{R^5}{30\delta^2}\, \mathfrak{H}.$$

## § 45. *Equazione di Ginzburg-Landau*

La teoria completa descrivente il comportamento del superconduttore in un campo magnetico è molto complicata. Tuttavia, la situazione si rende più semplice nel dominio di temperature in prossimità del punto di transizione. Qui è possibile costruire un sistema di equazioni relativamente semplici che sono, fra l'altro, applicabili sia per campi deboli che per quelli forti [1]).

Nella teoria generale di Landau delle transizioni di fase di seconda specie la distinzione della fase « non simmetrica » da quella « simmetrica » viene descritta da un parametro d'ordine che si annulla nel punto di transizione (si veda V, § 142). Per la fase superconduttrice questo parametro naturale è rappresentato dalla funzione d'onda condensata $\Xi$. Per evitare complicazioni soverchie (dal punto di vista teorico), supporremo cubica la simmetria del cristallo metallico; in questo caso, come è stato indicato al § 44, lo stato superconduttore è caratterizzato dalla grandezza scalare $n_s$, ossia dalla densità degli elettroni superconduttori. Allora come parametro d'ordine è più comoda una grandezza (indichiamola con $\psi$) proporzionale a $\Xi$, ma normalizzata dalla condizione $|\psi|^2 = n_s/2$. La fase della grandezza $\psi$ coincide con la fase della funzione $\Xi$:

$$\psi = \sqrt{\frac{n_s}{2}}\, e^{i\Phi}. \tag{45,1}$$

La densità della corrente superconduttrice (44,2), espressa mediante $\psi$, si scrive nella forma

$$\mathbf{j}_s = \frac{e\hbar}{m}\,|\psi|^2 \nabla\Phi = -\frac{ie\hbar}{2m}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*). \tag{45,2}$$

L'espressione dell'energia libera del superconduttore, quale funzionale della funzione $\psi(\mathbf{r})$, costituisce il punto di partenza della teoria. In accordo con le tesi generali della teoria di Landau questa espressione si ottiene dallo sviluppo della densità dell'energia libera in potenze del parametro d'ordine $\psi$ piccolo (in prossimità del punto di transizione) e delle sue derivate rispetto alle coordinate. Consideriamo dapprima il superconduttore in assenza di campo magnetico.

Conformemente al suo significato di grandezza proporzionale alla funzione di Green $F(X, X) \equiv -i\Xi(X)$, il parametro d'ordine $\psi$ è non univoco: poiché la funzione $F(X, X)$ è composta di due operatori $\hat{\Psi}$, una variazione arbitraria della fase di questi operatori, $\hat{\Psi} \to \hat{\Psi} e^{i\alpha/2}$, implica una variazione pari ad $\alpha$ della fase della funzione $F$. È ovvio che le grandezze fisiche non devono dipendere da

[1]) La teoria qui esposta appartiene a *V. L. Ginzburg* e *L. D. Landau* (1950). È sorprendente che essa sia stata costruita per via fenomenologica ancora prima della creazione della teoria microscopica della superconduttività.

questa arbitrarietà, cioè devono essere invarianti nei confronti della trasformazione del parametro d'ordine complesso: $\psi \to \psi e^{i\alpha}$. Questa condizione esclude termini di potenze dispari in $\psi$ nello sviluppo dell'energia libera.

La forma concreta di questo sviluppo è stabilita in base alle stesse considerazioni della teoria generale delle transizioni di fase di seconda specie (si veda V, § 146). Senza ripetere queste considerazioni, scriviamo lo sviluppo seguente dell'energia libera totale di un corpo superconduttore [1]):

$$F = F_n + \int \left\{ \frac{\hbar^2}{4m} |\nabla\psi|^2 + a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4 \right\} dV. \qquad (45,3)$$

Qui $F_n$ è l'energia libera dello stato normale (cioè per $\psi = 0$); $b$ è un coefficiente positivo dipendente unicamente dalla densità della sostanza (e non dalla temperatura); la grandezza $a$ dipende dalla temperatura secondo la legge

$$a = (T - T_c)\,\alpha \qquad (45,4)$$

e si annulla nel punto di transizione; il coefficiente $\alpha > 0$ in accordo con il fatto che alla fase superconduttrice corrisponde il dominio $T < T_c$; il coefficiente di $|\nabla\psi|^2$ nello sviluppo (45,3) è scelto in modo tale che per la corrente si abbia l'espressione (45,2) (si veda più avanti) [2]). Il fatto che nello sviluppo (45,3) figurano soltanto le derivate prime rispetto a $\psi$ è dovuto alla supposizione che la variazione di $\psi$ nello spazio sia sufficientemente lenta.

In un superconduttore omogeneo in assenza di campo esterno il parametro $\psi$ è indipendente dalle coordinate. Allora l'espressione (45,3) si riduce a

$$F = F_n + aV|\psi|^2 + \frac{bV}{2}|\psi|^4. \qquad (45,5)$$

Il valore d'equilibrio di $|\psi|^2$ (per $T < T_c$) è dato dalla condizione che questa espressione sia minima:

$$|\psi|^2 = -\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{b}(T_c - T); \qquad (45,6)$$

la densità degli elettroni superconduttori in funzione della temperatura si annulla nel punto di transizione in base a una legge lineare.

---

[1]) Ricordiamo soltanto che la forma scritta del termine in gradiente è dovuta alla supposizione della simmetria cubica del cristallo. Per una simmetria più bassa questo termine avrebbe l'aspetto di una forma quadratica più generale composta delle derivate $\partial\psi/\partial x_i$.

[2]) Questa scelta (così come l'identificazione di $m$ con la massa reale dell'elettrone) non ha, ovviamente, significato profondo ed è convenzionale nella stessa misura che la definizione di $n_s$ nella (44,2).

Riportando di nuovo il valore (45,6) nell'espressione (45,5), troviamo così la differenza delle energie libere degli stati superconduttore e normale:

$$F_s - F_n = -V\frac{\alpha^2}{2b}(T_c - T)^2. \tag{45,7}$$

La derivazione rispetto alla temperatura permette di ricavare da qui la differenza delle entropie e inoltre anche il salto del calore specifico nel punto di transizione [1]):

$$C_s - C_n = V\frac{\alpha^2 T_c}{b}. \tag{45,8}$$

Nell'intorno del punto di transizione la differenza (45,7) rappresenta una piccola correzione all'energia libera. Secondo il teorema delle piccole correzioni (V, § 15), questa stessa grandezza (espressa in funzione della temperatura e della pressione anziché della temperatura e del volume) dà la differenza dei potenziali termodinamici $\Phi_s - \Phi_n$. D'altra parte, in accordo con la formula generale della termodinamica dei superconduttori (si veda VIII (43,7)), questa differenza coincide con la grandezza $-VH_c^2/8\pi$, dove $H_c$ è il campo critico che distrugge la superconduttività. In tal modo, per quest'ultimo troviamo la legge di dipendenza dalla temperatura nell'intorno del punto di transizione [2]):

$$H_c = \left(\frac{4\pi a^2}{b}\right)^{1/2} = \left(\frac{4\pi\alpha^2}{b}\right)^{1/2}(T_c - T). \tag{45,9}$$

In presenza di campo magnetico l'espressione (45,3) per le energie libere deve essere modificata per i due aspetti seguenti. Primo, all'espressione integranda va aggiunta la densità di energia del campo magnetico $\mathbf{B}^2/8\pi$ (dove $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ è l'induzione magnetica nel

---

[1]) Confrontando le formule (45,6) e (45,8) per $|\psi|^2 = \rho_s/2m$ e per il salto del calore specifico con le formule (40,16) e (40,11) per le stesse grandezze nel modello BCS, si possono trovare i valori dei coefficienti $\alpha$ e $b$ in questo modello (*L. P. Gorkov*, 1959):

$$\alpha = 6\pi^2 T_c/7\zeta(3)\,\mu = 7{,}04\cdot T_c/\mu, \quad b = \alpha T_c/n;$$

qui è utilizzato il legame della densità del numero di particelle $n = \rho/m$ e del potenziale chimico $\mu$ (per $T = 0$) con l'impulso limite come per un gas perfetto:

$$n = p_F^3/3\pi^2\hbar^3, \quad \mu = p_F^2/2m.$$

[2]) Nel modello BCS si ha

$$H_c = 2{,}44\,(mp_F/\hbar^3)^{1/2}(T_c - T) \quad \text{per} \quad T \to T_c.$$

Diamo anche il valore di $H_c$ in questo modello per $T = 0$:

$$H_c = 0{,}99 T_c\,(mp_F/\hbar^3)^{1/2}$$

(questo valore si ottiene uguagliando $-VH_c^2/8\pi$ alla differenza delle energie (40,9)).

corpo). Secondo, è necessario modificare il termine col gradiente in modo tale che la condizione di invarianza di gauge sia soddisfatta. Nel paragrafo precedente è stato mostrato che questa condizione implica la necessità di sostituire il gradiente della fase della funzione d'onda condensata $\nabla\Phi$ con la differenza $\nabla\Phi - 2e\mathbf{A}/\hbar c$. Nel caso considerato ciò significa che si deve eseguire la sostituzione

$$\nabla\psi = e^{i\Phi}\nabla\,|\,\psi\,| + i\psi\nabla\Phi \to \nabla\psi - \frac{2ie}{\hbar c}\mathbf{A}\psi.$$

Giungiamo così all'espressione fondamentale seguente:

$$F = F_{n0} + \int \left\{ \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} + \frac{\hbar^2}{4m}\left|\left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c}\mathbf{A}\right)\psi\right|^2 + a\,|\,\psi\,|^2 + \frac{b}{2}\,|\,\psi\,|^4 \right\} dV \tag{45,10}$$

($F_{n0}$ è l'energia libera del corpo nello stato normale in assenza di campo magnetico). Sottolineiamo che il coefficiente $2ie/\hbar c$ in questa espressione è di carattere incondizionato (a differenza della convenzionalità suindicata del coefficiente $\hbar^2/4m$). Il raddoppiamento della carica dell'elettrone in esso è dovuto all'effetto Cooper (*L. P. Gorkov*, 1959); questo coefficiente, ovviamente, non potrebbe essere stabilito per via puramente fenomenologica.

Le equazioni differenziali che determinano la distribuzione della funzione d'onda $\psi$ e del campo magnetico nel superconduttore si ottengono ora cercando il minimo dell'energia libera quale funzionale di fre funzioni indipendenti: $\psi$, $\psi^*$ e $\mathbf{A}$.

La grandezza complessa $\psi$ è l'insieme di due grandezze reali; pertanto $\psi$ e $\psi^*$ si devono considerare nella variazione come funzioni indipendenti. Facendo variare l'integrale rispetto a $\psi^*$ e trasformando l'integrale del termine $(\nabla\psi - 2ie\mathbf{A}/\hbar c)\nabla\delta\psi^*$ mediante integrazione per parti, otteniamo

$$\delta F = \int \left\{ -\frac{\hbar^2}{4m}\left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c}\mathbf{A}\right)^2\psi + a\psi + b\,|\,\psi\,|^2\psi \right\}\delta\psi^*\,dV + \\ + \frac{\hbar^2}{4m}\oint\left(\nabla\psi - \frac{2ie}{\hbar c}\mathbf{A}\psi\right)\delta\psi^*\,d\mathbf{f}; \tag{45,11}$$

il secondo integrale si calcola sulla superficie del corpo. Ponendo $\delta F = 0$, otteniamo quale condizione di uguaglianza a zero dell'integrale di volume per $\delta\psi^*$ qualsiasi la seguente equazione:

$$\frac{1}{4m}\left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)^2\psi + a\psi + b\,|\,\psi\,|^2\psi = 0 \tag{45,12}$$

(quanto alla variazione dell'integrale rispetto a $\psi$, essa conduce all'equazione complessa coniugata, cioè non fornisce niente di nuovo).

Analogamente la variazione dell'integrale rispetto ad **A** conduce all'equazione di Maxwell

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \tag{45,13}$$

inoltre, la densità di corrente è data dall'espressione

$$\mathbf{j} = -\frac{ie\hbar}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{2e^2}{mc} |\psi|^2 \mathbf{A}, \tag{45,14}$$

coincidente con la (44,7) (scriviamo **j** in luogo di $\mathbf{j}_s$, poiché in equilibrio termodinamico non esiste corrente normale). È da notare che dalla (45,13) deriva l'equazione di continuità div $\mathbf{j} = 0$; questa equazione si può ottenere anche per derivazione diretta dell'espressione (45,14) tenendo conto dell'equazione (45,12).

Le equazioni (45,12-14) costituiscono il sistema completo di *equazioni di Ginzburg-Landau.*

Le condizioni al contorno per queste equazioni si deducono dalla condizione di uguaglianza a zero degli integrali di superficie nella variazione $\delta F$. Dalla (45,11) si ricava così la condizione al contorno

$$\mathbf{n} \left( -i\hbar \nabla \psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \psi \right) = 0, \tag{45,15}$$

dove **n** è il vettore normale alla superficie del corpo. Osserviamo che in virtù di questa condizione si annulla, come ci si doveva aspettare, anche la componente normale della corrente (45,14): $\mathbf{nj} = 0$ [1]).

Quanto alle condizioni al contorno per il campo, tenendo conto che **j** ha valore finito in tutto lo spazio (fino alla superficie del corpo), dall'equazione (45,13) deriva la continuità della componente tangenziale dell'induzione $\mathbf{B}_t$. Invece dall'equazione

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

---

[1]) Per la condizione al contorno (45,15) la grandezza stessa $\psi$ non si annulla come sembrerebbe dover essere per una funzione d'onda sulla frontiera del corpo. Questa circostanza è dovuta al fatto che in realtà $\psi$ decresce fino a zero soltanto a distanze $\sim \xi_0$ dalla superficie; tali distanze sono considerate come trascurabilmente piccole nella teoria di Ginzburg-Landau.

Di fatto, la condizione (45,15) è dedotta qui per la frontiera fra un superconduttore e il vuoto. Essa resta valida anche per la frontiera con un dielettrico, ma per la frontiera di separazione fra metalli diversi (di cui uno è superconduttore e l'altro normale) essa è inapplicabile in quanto non tiene conto dell'effetto di penetrazione parziale degli elettroni superconduttori nel metallo normale. In questo caso la (45,15) va sostituita con una condizione di forma più generale compatibile con la condizione $\mathbf{nj} = 0$:

$$\mathbf{n} \left( -i\hbar \nabla \psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \psi \right) = \frac{i\psi}{\lambda}, \tag{45,15a}$$

dove $\lambda$ è una costante reale (della dimensione di una lunghezza); la stima di questa costante richiede uno studio microscopico più dettagliato.

segue la continuità della componente normale dell'induzione $B_n$. In altre parole, le condizioni al contorno richiedono la continuità di tutto il vettore **B**.

In un campo magnetico debole si può trascurare la sua influenza su $|\psi|^2$ e supporre $|\psi|^2$ uguale al valore (45,6) costante lungo il corpo. Allora la sostituzione della (45,14) nella (45,13) (e l'applicazione successiva dell'operazione rot ad ambedue i membri dell'equazione) conduce all'equazione dei London (44,11) con profondità di penetrazione

$$\delta = \left[\frac{mc^2 b}{8\pi e^2 |a|}\right]^{1/2} = \left[\frac{mc^2 b}{8\pi e^2 \alpha (T_c - T)}\right]^{1/2} \tag{45,16}$$

Accanto a questa misura, le equazioni di Ginzburg-Landau contengono ancora una lunghezza caratteristica: il raggio di correlazione delle fluttuazioni del parametro d'ordine $\psi$ (in assenza di campo); indichiamolo con $\xi(T)$. In accordo con le note formule della teoria delle fluttuazioni (si veda V, § 146) questo raggio si esprime mediante i coefficienti nell'energia libera (45,3) nel seguente modo:

$$\xi(T) = \frac{\hbar}{2(m|a|)^{1/2}} = \frac{\hbar}{2(m\alpha)^{1/2}(T_c - T)^{1/2}} \tag{45,17}$$

Le lunghezze caratteristiche (45,16-17) permettono di definire l'ordine di grandezza delle distanze alle quali cambiano sostanzialmente il parametro d'ordine $\psi$ e il campo magnetico descritti dalle equazioni di Ginzburg-Landau. In questo caso la lunghezza $\delta$ è caratteristica, in generale, per il campo magnetico e la lunghezza $\xi(T)$ per la distribuzione di $\psi$. Queste due lunghezze devono essere grandi rispetto alle « dimensioni della coppia » $\xi_0$, affinché sia verificata l'ipotesi che la variazione di tutte le grandezze nello spazio sia sufficientemente lenta. Poiché ambedue le lunghezze crescono all'avvicinarsi al punto di transizione (secondo la legge $(T_c - T)^{-1/2}$) allora nel suo intorno questa condizione in generale è soddisfatta (si veda più avanti).

Un ruolo importante nella teoria esposta gioca il *parametro di Ginzburg-Landau*, definito come rapporto costante (indipendente dalla temperatura) fra le due suddette lunghezze:

$$\varkappa = \frac{\delta(T)}{\xi(T)} = \frac{mcb^{1/2}}{(2\pi)^{1/2}|e|\hbar}. \tag{45,18}$$

Come ordine di grandezza $\varkappa \sim \delta_0/\xi_0$, dove $\xi_0$ è la lunghezza di coerenza (39,21) e $\delta_0$ la profondità di penetrazione di London allo zero assoluto. Scriviamo anche la formula

$$\varkappa = 2\sqrt{2}\frac{|e|}{\hbar c} H_c(T)\,\delta^2(T), \tag{45,19}$$

che si ottiene mediante le (45,9), (45,16) ed esprime $\varkappa$ direttamente attraverso le grandezze osservate.

Dopo aver stabilito la forma delle equazioni, studiamo ora il dominio della loro applicabilità.

Dal lato delle basse temperature questo dominio è limitato comunque dalla condizione $T_c - T \ll T_c$ che permette di supporre piccolo il parametro d'ordine e che è alla base di tutto lo sviluppo eseguito dell'energia libera. La stessa condizione permette di verificare la disuguaglianza $\xi(T) \gg \xi_0$, ma per verificare la disuguaglianza $\delta(T) \gg \xi_0$ la condizione risulta più rigida nel caso di superconduttori con piccoli valori del parametro $\varkappa$ [1]); in questi casi dalla disuguaglianza $\delta \gg \xi_0$ deriva la condizione

$$T_c - T \ll \varkappa^2 T_c. \tag{45,20}$$

Dal lato di $T \to T_c$ il dominio di applicabilità delle equazioni è limitato soltanto dalla condizione generale di applicabilità della teoria delle transizioni di fase di Landau, legata alla crescita delle fluttuazioni del parametro d'ordine. Tuttavia, nel caso considerato questa condizione risulta estremamente debole. Infatti, essa si esprime mediante i coefficienti dello sviluppo (45,3) con la disuguaglianza

$$T_c - T \gg \frac{b^2 T_c^2}{\alpha (\hbar^2/m)^3}$$

(si veda V (146,15)). Stimando, ad esempio, l'espressione a secondo membro mediante i valori di $b$ e $\alpha$ nel modello BCS, otteniamo

$$(T_c - T)/T_c \gg (T_c/\mu)^4 \tag{45,21}$$

Essendo estremamente piccolo il valore $T_c/\mu \sim 10^{-3}$-$10^{-4}$, si può supporre che questa condizione sia praticamente verificata fino al punto stesso di transizione. Quanto al dominio di fluttuazioni per la transizione di seconda specie fra le fasi superconduttrice e normale, praticamente esso non esiste.

## PROBLEMA

Per una pellicola piana di spessore $d \ll \xi$, $\delta$ trovare il valore critico del campo magnetico (parallelo al piano della pellicola) che distrugge la superconduttività (*V. L. Ginzburg, L. D. Landau*, 1950) [2]).

*Soluzione.* Consideriamo il piano mediano della pellicola quale piano $xz$ con l'asse $x$ diretto lungo il campo. Nell'equazione (45,13) per il campo $B = B_x(y)$ (variabile lungo l'asse $y$ trasversale alla pellicola) si può supporre

[1]) A titolo d'esempio diamo i valori di $\varkappa$ per alcuni metalli puri: Al — 0,01; Sn — 0,13; Hg — 0,16; Pb — 0,23.

[2]) Problema analogo a quello per una sferetta; si veda al § 47.

$\psi =$ costante. Allora il primo termine nell'espressione della corrente (45,14) scompare e l'applicazione dell'operazione rot conduce all'equazione $B'' = \theta^2 B/\delta^2$, dove $\theta = \psi/\psi_0$ e $\psi_0^2 = |a|/b$. La soluzione di questa equazione simmetrica rispetto a $y$ è

$$B(y) = \mathfrak{H} \frac{\operatorname{ch}(y\theta/\delta)}{\operatorname{ch}(d\theta/2\delta)} \approx \mathfrak{H}\left[1 + \frac{y^2 - (d/2)^2}{2\delta^2}\theta^2\right]$$

($\mathfrak{H}$ è il campo esterno). A questo campo corrisponde la distribuzione di corrente

$$j = j_z = -\frac{c}{4\pi} B' \approx -\frac{c\theta^2\mathfrak{H}}{4\pi\delta^2} y.$$

Quanto all'equazione (45,12), qui non si può trascurare completamente la dipendenza di $\psi$ da $y$: la piccola derivata $\partial^2\psi/\partial y^2$ va moltiplicata in effetti per $\hbar^2/m\,|a| \sim \xi^2$ e quindi acquista (in virtù della condizione $d \ll \xi$) un fattore grande $(\xi/d)^2$; al tempo stesso, in questa equazione si può trascurare il potenziale $A = A_z(y)$ che implica qui termini infinitesimi di ordine superiore in $d/\xi$. Per evitare la necessità di tener conto della dipendenza di $\psi$ da $y$, consideriamo la media dell'equazione (45,12) rispetto allo spessore della pellicola; in questo caso le derivate rispetto a $y$ scompaiono in virtù della condizione al contorno $\partial\psi/\partial y = 0$ sulla superficie della pellicola. Osserviamo anche che

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \approx \left(\frac{mj}{|e|\hbar|\psi|^2}\right)^2 \psi$$

in virtù della dipendenza della fase della funzione $\psi$ da $z$ (e del legame del suo gradiente con la corrente). Otteniamo quindi, dopo la semplificazione per $\psi$,

$$\frac{m\overline{j^2}}{4e^2|\psi|^4} - |a| + b\,|\psi|^2 = 0,$$

dove

$$\overline{j^2} = \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} j^2\,dy = \frac{c^2 d^2 \theta^4 \mathfrak{H}^2}{3(8\pi)^2\delta^4}.$$

Utilizzando anche le espressioni (45,9) e (45,16) arriviamo all'equazione

$$\frac{1}{24}\left(\frac{\mathfrak{H}d}{H_c\delta}\right)^2 = 1 - \frac{|\psi|^2}{\psi_0^2},$$

che definisce il valore di $\psi$ per la pellicola nel campo magnetico. Il valore critico $H_c^{(\mathrm{pel})}$ del campo per la pellicola è quello per cui $\psi$ si annulla. Esso è legato al campo critico $H$ di un superconduttore massiccio dall'uguaglianza

$$H_c^{(\mathrm{pel})} = \sqrt{24}\, H_c\delta/d.$$

La distruzione della superconduttività da parte del campo nelle condizioni considerate si produce con una transizione di fase di seconda specie: $\psi$ si annulla al crescere di $\mathfrak{H}$ con continuità. Ciò è del tutto naturale, in quanto per $d \ll \delta$ il campo penetra di fatto nella pellicola superconduttrice, cosicché non esistono ragioni per una transizione di prima specie, che significherebbe una penetrazione improvvisa del campo nel corpo.

## § 46. *Tensione superficiale sulla frontiera fra le fasi superconduttrice e normale*

Le equazioni di Ginzburg-Landau permettono di calcolare, in particolare, la tensione superficiale sulla frontiera fra le fasi superconduttrice ($s$) e normale ($n$) (in un medesimo campione), legandola a grandezze che caratterizzano le proprietà volumetriche della materia (*V. L. Ginzburg*, *L. D. Landau*, 1950). Ricordiamo che tali frontiere esistono in campioni metallici che si trovano nel cosiddetto stato intermedio in un campo magnetico. Poiché tutta la distinzione fra le fasi si riduce al fatto che in una di esse $\psi \neq 0$ e nell'altra $\psi = 0$, la transizione fra esse si compie in modo continuo in un certo strato e viene descritta dalle equazioni di Ginzburg-Landau con condizioni al contorno imposte soltanto a grandi distanze da ambedue i lati di questo strato.

Consideriamo la frontiera di separazione piana fra le fasi $s$ e $n$ del metallo. Considerando questa frontiera quale piano $yz$, dirigiamo l'asse $x$ all'interno della fase $s$; la distribuzione di tutte le grandezze in ambedue le fasi dipende unicamente dalla coordinata $x$. Al potenziale vettoriale del campo, la cui scelta rimaneva ancora non univoca, imponiamo la trasformazione di gauge, in cui div $\mathbf{A} = 0$; nel caso considerato, ciò dà $dA_x/dx = 0$, da cui si vede che si può porre $A_x = 0$. È evidente da considerazioni di simmetria che il vettore $\mathbf{A}$ giace ovunque nello stesso piano; supponiamo che sia il piano $xy$ in modo che $A_y \equiv A$; allora il vettore induzione giace nel piano $xz$ e, inoltre,

$$B \equiv B_z = A' \tag{46,1}$$

(l'apice qui indica la derivazione rispetto a $x$).

In seguito, riscriviamo l'equazione (45,13) nella forma ordinaria in elettrodinamica macroscopica rot $\mathbf{H} = 0$ e introduciamo l'intensità del campo $\mathbf{H}$ secondo [1])

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}, \quad c \operatorname{rot} \mathbf{M} = \mathbf{j}.$$

Da questa equazione segue nel caso considerato che $H =$ costante. Lontano dalla frontiera di separazione, all'interno della fase normale, induzione e intensità coincidono e sono uguali esattamente al valore critico: $B = H = H_c$ (trascuriamo la suscettività magnetica della fase normale). Pertanto in tutto lo spazio sarà $H \equiv H_z = H_c$.

Trascurando la variazione della densità della sostanza per transizione di fase superconduttrice, la supporremo costante (assieme

---

[1]) A scanso di equivoco ricordiamo che l'osservazione in VIII, § 41 sull'inopportunità di introdurre la grandezza $\mathbf{H}$ si riferiva all'elettrodinamica dei superconduttori, in cui il dominio di penetrazione del campo magnetico è supposto come infinitamente sottile. Le equazioni di Ginzburg-Landau sono applicabili proprio alla struttura di questo dominio.

alla temperatura) lungo tutto il corpo [1]). Indichiamo con $f$ l'energia libera dell'unità di volume (a differenza dell'energia libera totale $F$ del corpo intero). Per temperatura e densità costanti e trascurando gli effetti superficiali, il differenziale vale

$$df = \frac{\mathbf{H}}{4\pi}\, d\mathbf{B} \tag{46,2}$$

(si veda VIII, § 30). Di qui si vede che la condizione supplementare di costanza di **B** condurrebbe per le condizioni suindicate anche alla costanza della grandezza

$$\tilde{f} = f - \frac{\mathbf{HB}}{4\pi}. \tag{46,3}$$

Pertanto tutto il contributo nell'integrale $\tilde{F} = \int \tilde{f}\, dV$ proveniente dalla parte variabile di $\tilde{F}$ è condizionato unicamente dall'esistenza della frontiera di separazione. Riferendo questo contributo all'unità di area della frontiera possiamo, quindi, calcolare il coefficiente di tensione superficiale come l'integrale

$$\alpha_{ns} = \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f} - \tilde{f}_n)\, dx, \tag{46,4}$$

dove la costante $\tilde{f}_n$ rappresenta il valore di $\tilde{f}$ lontano dalla frontiera di separazione, all'interno della fase normale, ad esempio.

Per la fase normale l'energia libera vale $f_n = f_{n0} + B^2/8\pi = f_{n0} + H_c^2/8\pi$ in modo che

$$\tilde{f}_n = f_n - \frac{H_c^2}{4\pi} = f_{n0} - \frac{H_c^2}{8\pi} = f_{n0} - \frac{a^2}{2b}$$

(nell'ultima uguaglianza si è tenuto conto dell'espressione (45,9)). La grandezza $\tilde{f}$ in un punto arbitrario si esprime in funzione della densità dell'energia libera $f$ come segue:

$$\tilde{f} = f - \frac{H_c B}{4\pi}.$$

Ricorrendo ora all'espressione (45,10) troviamo la seguente formula esprimente la tensione superficiale:

$$\alpha_{ns} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{B^2}{8\pi} + \frac{\hbar^2}{4m}\left( |\psi'|^2 + \frac{4e^2}{\hbar^2 c^2} A^2 |\psi|^2 \right) + \right.$$
$$\left. + a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4 - \frac{H_c B}{4\pi} + \frac{a^2}{2b} \right\} dx. \tag{46,5}$$

[1]) A rigore, è costante il potenziale chimico (e non la densità) in equilibrio di fase. Tenendo conto della variazione della densità, si dovrebbe considerare perciò non l'energia libera, ma il potenziale termodinamico $\Omega$.

Come doveva, l'espressione integranda si annulla sia all'interno della fase normale ($x \to -\infty$), dove $\psi = 0$ e $B = H_c$, sia all'interno della fase superconduttrice ($x \to \infty$), dove $|\psi|^2 = -a/b$ e $B = 0$.

Osserviamo che dall'espressione integranda nella (46,5) è scomparso il termine $i\mathbf{A}\nabla\psi$ in seguito all'uguaglianza $A_x = 0$. Lo stesso termine scompare dalla (45,12) in modo che rimane un'equazione a coefficienti reali; pertanto la soluzione di questa equazione può essere considerata reale, come si è supposto più avanti. In questo caso dall'espressione della densità di corrente (45,14) scompare il primo termine e rimane

$$\mathbf{j} = -\frac{2e^2}{mc}\psi^2\mathbf{A}. \tag{46,6}$$

Inoltre, introduciamo al posto della variabile $x$ e delle funzioni $A(x)$, $\psi(x)$ le grandezze adimensionali

$$\bar{x} = \frac{x}{\delta}, \quad \bar{\psi} = \psi\sqrt{\frac{b}{|a|}}, \quad \bar{A} = \frac{A}{H_c\delta}, \quad \bar{B} = \frac{d\bar{A}}{d\bar{x}} = \frac{B}{H_c}. \tag{46,7}$$

Più avanti in questo paragrafo ci serviremo soltanto di queste grandezze omettendo per brevità i trattini sopra le lettere. In queste variabili l'equazione (45,12) diventa

$$\psi'' = \varkappa^2\left[\left(\frac{A^2}{2} - 1\right)\psi + \psi^3\right]. \tag{46,8}$$

L'equazione (45,13) con $\mathbf{j}$ dalla (46,6) si riduce invece alla forma

$$A'' = A\psi^2. \tag{46,9}$$

Le condizioni al contorno per queste equazioni nel problema considerado (corrispondenti alle fasi $n$ e $s$ per $x \to -\infty$ e $x \to \infty$) sono

$$\begin{aligned} &\psi = 0, \ B = A' = 1 \quad \text{per } x = -\infty, \\ &\psi = 1, \ A' = 0 \quad \text{per } x = \infty. \end{aligned} \tag{46,10}$$

È facile provare che le equazioni (46,8-9) hanno come integrale primo

$$2\varkappa^{-2}\psi'^2 + (2 - A^2)\psi^2 - \psi^4 + A'^2 = \text{costante} = 1; \tag{46,11}$$

il valore della costante è determinato in base alle condizioni al contorno [1]).

---

[1]) Dalla condizione (46,10) segue automaticamente che per $x \to \pm\infty$ anche $\psi' = 0$, mentre le stesse condizioni e l'equazione (46,9) mostrano che per $x \to \infty$ $A'' = 0$ e $A = 0$ (la determinazione del valore $A(\infty)$ si ottiene come risultato della scelta di $\psi$ reale).

Infine, l'espressione (46,5) assume la forma

$$\alpha_{ns} = \frac{\delta H_c^2}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{2}{\varkappa^2} \psi'^2 + (A^2 - 2)\psi^2 + \psi^4 + \right.$$

$$\left. + (A' - 1)^2 \right] dx = \frac{\delta H_c^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{2}{\varkappa^2} \psi'^2 + A'(A' - 1) \right] dx \qquad (46,12)$$

(nel passare alla seconda uguaglianza il termine $\psi^4$ è preso dalla (46,11)).

Studiamo le uguaglianze scritte. Consideriamo dapprima il caso $\varkappa \ll 1$ (che si verifica normalmente in metalli superconduttori puri). Questa disuguaglianza significa che $\delta(T) \ll \xi(T)$, cioè che il campo magnetico cambia sostanzialmente a distanza piccola rispetto alla distanza caratteristica di variazione della funzione $\psi(x)$.

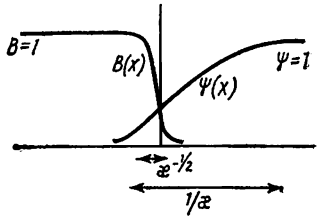


Fig. 6

La fig. 6 rappresenta schematicamente il quadro della distribuzione del campo e di $\psi$ in questo caso. Nel dominio in cui il campo è grande si ha $\psi \approx 0$ e in seguito il campo cala bruscamente, mentre in assenza di campo la funzione $\psi(x)$ comincia a variare lentamente (a distanze $x \sim 1/\varkappa$). Ponendo $A = 0$ nella (46,11) troviamo l'equazione

$$\psi' = \frac{\varkappa}{\sqrt{2}} (1 - \psi^2)$$

che deve essere risolta per la condizione $\psi = 0$ nel punto $x = 0$ scelto all'interno del dominio di smorzamento del campo. Questa soluzione è

$$\psi = \operatorname{th}(\varkappa x / \sqrt{2}), \qquad (46,13)$$

e il calcolo dell'integrale (46,12) con questa funzione (e $A = 0$) dà

$$\alpha_{ns} = \frac{H_c^2 \delta}{3\sqrt{2}\,\pi\varkappa} = \frac{H_c^2}{8\pi} \frac{1,9\delta}{\varkappa}. \qquad (46,14)$$

L'errore in questo valore è causato dal fatto che abbiamo trascurato il contributo portato all'integrale dal dominio in cui il campo decresce. Per stimare la larghezza $\delta_1$ di questo dominio [1]) osservia-

[1]) Sottolineiamo che questo dominio non coincide con la profondità di penetrazione del campo nel superconduttore dal vuoto! Nell'ultimo caso si ha $\psi \sim 1$ nel dominio di penetrazione del campo, mentre per penetrazione dalla fase $n$ il campo cala nel dominio degli $\psi$ piccoli.

mo che, da una parte, si ha $\delta_1^{-2} \sim \psi^2$ in accordo con l'equazione (46,9). D'altra parte, la formula (46,13) deve sussistere, come ordine di grandezza, anche sulla frontiera del dominio $x \sim \delta_1$ da cui $\psi \sim \varkappa\delta_1$. Da queste due relazioni ricaviamo $\delta_1 \sim \varkappa^{-1/2}$. Quanto al contributo portato da questo dominio alla tensione superficiale, esso vale $\sim H_c^2\delta\varkappa^{-1/2}$, cioè è piccolo rispetto alla (46,14) soltanto nel rapporto $\sim \varkappa^{1/2}$ (cosicché la precisione della (46,14) è relativamente scarsa).

All'aumentare del parametro $\varkappa$ il coefficiente di tensione superficiale passa per lo zero e diventa negativo. Ciò si vede già dal fatto che la disuguaglianza $\alpha_{ns} < 0$ si verifica in ogni caso per valori sufficientemente grandi di $\varkappa$. Infatti, le distanze caratteristiche di variazione della funzione $\psi(x)$ in questo problema non possono essere inferiori a quelle di variazione di $A(x)$ poiché la variazione stessa di $A$ implica quella di $\psi$; perciò per $\varkappa$ grande si può trascurare il termine $\psi'^2/\varkappa^2$ sotto il segno di integrale nella (46, 12), e poiché $0 < A' < 1$ (cioè $0 < B < H_c$ in unità ordinarie) l'espressione integranda diventa negativa. Mostriamo che l'annullamento di $\alpha_{ns}$ si produce per il valore

$$\varkappa = 1/\sqrt{2}. \tag{46,15}$$

A tale scopo riscriviamo l'espressione per $\alpha_{ns}$ nella forma

$$\alpha_{ns} = \frac{H_c^2\delta}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [(A'-1)^2 - \psi^4]\, dx \tag{46,16}$$

(che si ottiene dal primo integrale nella (46,12) integrando per parti il termine $\psi'^2$, con la sostituzione successiva di $\psi''$ ottenuto dalla (46,8)). L'integrale si annulla a priori se sarà identicamente nulla l'espressione integranda, cioè se si avrà

$$A' - 1 = -\psi^2 \tag{46,17}$$

(il segno opposto è impossibile in questa uguaglianza, poiché il campo $B = A'$ deve decrescere al crescere di $x$). Eliminando $\psi$ dalle (46,17) e (46,9) troviamo l'equazione

$$A'' = A(1 - A'), \tag{46,18}$$

la cui soluzione (con le condizioni al contorno $A' = 1$ per $x = -\infty$ e $A = 0$ per $x = \infty$) determinerà la distribuzione del campo; in virtù della (46,17) le condizioni al contorno (46,10) per $\psi$ si verificano automaticamente in questo caso. Senza risolvere effettivamente l'equazione (46,18), è sufficiente notare che per $\varkappa^2 = 1/2$ verrà soddisfatta automaticamente anche l'equazione (46,8), ancora non utilizzata, ovvero, il che è lo stesso, il suo integrale primo (46,11).

Sostituendo la (46,17) nella (46,9) otteniamo $\psi' = -A\psi/2$; questo valore di $\psi'$, assieme con $A'$ dalla (46,17), verifica identicamente l'uguaglianza (46,11) con $\varkappa^2 = 1/2$.

## PROBLEMA

Per un superconduttore con parametro $\varkappa \ll 1$ trovare la prima correzione rispetto al campo alla profondità di penetrazione in campi deboli.

*Soluzione.* Consideriamo la superficie del superconduttore quale piano $yz$, con l'asse $z$ lungo la direzione del campo esterno $\mathfrak{H}$ e dirigiamo l'asse $x$ all'interno del corpo. La distribuzione del campo e di $\psi$ nel superconduttore è data dalle equazioni (46,8-9), che si devono risolvere con le condizioni al contorno

$$\psi' = 0, \quad B = A' = \mathfrak{H} \quad \text{per} \quad x = 0,$$
$$\psi' = 1, \quad A = 0, \quad \text{per} \quad x = \infty$$

(la prima di esse è la condizione (45,15)). Cerchiamo la soluzione nella forma

$$\psi = 1 + \psi_1(x), \quad A = -\mathfrak{H}e^{-x} + A_1(x),$$

dove $\psi_1$ e $A_1$ sono due piccole correzioni alla soluzione per $\varkappa = 0$, corrispondente allo smorzamento del campo secondo la legge di London (44,13). Per la correzione $\psi_1$ abbiamo la seguente equazione:

$$\psi_1'' = 2\varkappa^2\psi_1 + \frac{1}{2}\varkappa^2\mathfrak{H}^2e^{-2x},$$

da cui, tenendo conto delle condizioni al contorno, ricaviamo

$$\psi_1 = \frac{1}{8}\varkappa^2\mathfrak{H}^2e^{-2x} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\varkappa\mathfrak{H}^2e^{-\sqrt{2}\varkappa x}. \tag{1}$$

Scriviamo ora per $A_1$ l'equazione

$$A_1'' = A_1 - 2\mathfrak{H}e^{-x}\psi_1,$$

dove per $\psi_1$ bisogna porre soltanto il secondo termine del primo ordine in $\varkappa$ dell'equazione (1). Tenendo conto della condizione al contorno ($A_1' = 0$ per $x = 0$) e trascurando i termini di ordine superiore in $\varkappa$ nei coefficienti, se è possibile, otteniamo

$$A_1 = -\frac{1}{8}\mathfrak{H}^3\left[(1 + \varkappa\sqrt{2})\,e^{-x} - e^{-(1+\sqrt{2}\varkappa)x}\right]. \tag{2}$$

Abbiamo trovato così le correzioni alla legge di smorzamento del campo all'interno del superconduttore. Introduciamo la profondità efficace di penetrazione $\delta_{\text{eff}}$ in base alla definizione

$$\mathfrak{H}\delta_{\text{eff}} = \int_0^\infty B(x)\,dx = -A(0) = \mathfrak{H} - A_1(0).$$

Tornando alle unità usuali, dalla (2) ricaviamo

$$\delta_{\text{eff}} = \delta\left[1 + \frac{\varkappa}{4\sqrt{2}}\left(\frac{\mathfrak{H}}{H_c}\right)^2\right]$$

## § 47. *Due specie di superconduttori*

Il segno della tensione superficiale $\alpha_{ns}$ influisce notevolmente sulle proprietà dei superconduttori. Ciò permette di dividere tutti i superconduttori in due categorie: superconduttori *di prima specie* con $\alpha_{ns} > 0$ e *di seconda specie* con $\alpha_{ns} < 0$. Poiché il segno di $\alpha_{ns}$ è dato dal valore del parametro di Ginzburg-Landau $\varkappa$, allora ai primi corrispondono (in prossimità di $T_c$) i valori $\varkappa < 1/\sqrt{2}$ e ai secondi $\varkappa > 1/\sqrt{2}$ [1]).

Consideriamo un superconduttore cilindrico massiccio in un campo magnetico longitudinale esterno $\mathfrak{H}$. Se il superconduttore è di prima specie, allora al crescere del campo esso è soggetto a una transizione di fase di prima specie allorché il campo raggiunge il valore critico $H_c$. L'azione della tensione superficiale tende in questo caso (come per ogni transizione di fase di prima specie) a rendere più difficile la formazione dei primi embrioni della fase nuova e quindi a una possibile conservazione metastabile della fase $s$ in campi alquanto superiori a $H_c$.

Se invece il superconduttore è di seconda specie, allora già prima che il campo raggiunga il valore critico $H_c$ in esso può essere termodinamicamente vantaggiosa la comparsa di « infiltrazioni » della fase $n$; l'aumento dell'energia volumetrica viene compensato dall'energia negativa della superficie di tale embrione. La frontiera inferiore dei valori del campo, per cui ciò diventa possibile, si suole indicare con $H_{c1}$ e chiamare *campo critico inferiore*. Analogamente, iniziando da un metallo allo stato normale, con un campo esterno grande arriviamo a un certo valore $H_{c2} > H_c$ (*campo critico superiore*) oltre il quale è termodinamicamente vantaggiosa la comparsa di « infiltrazioni » della fase $s$, di nuovo grazie all'energia negativa delle frontiere. Quindi, in un determinato intervallo di campi, $H_{c1} < \mathfrak{H} < H_{c2}$, il superconduttore si trova, come si suol dire, nello *stato misto* [2]). Le sue proprietà in questo stato cambiano gradualmente dallo stato superconduttore puro per $H_{c1}$ a quello normale puro per $H_{c2}$; al tempo stesso, si assiste a una penetrazione graduale in esso del campo magnetico. Per quanto riguarda il valore $H_c$, determinato soltanto dal rapporto fra le energie volumetriche delle fasi $n$ e $s$, esso di per sé non presenta alcun interesse particolare in questo caso.

I due campi critici dipendono, ovviamente, dalla temperatura e si annullano per $T = T_c$. Ciò conduce al diagramma di fase per

---

[1]) Ai superconduttori di prima specie appartengono gli elementi metallici puri. Di seconda specie sono le leghe superconduttrici. *L. D. Landau* è stato il primo a supporre che nelle leghe $\varkappa > 1/\sqrt{2}$.

[2]) Non confondere questo stato con quello intermedio dei superconduttori di prima specie, che sorge per certe configurazioni del campione e del campo magnetico esterno!

i superconduttori di seconda specie, rappresentato nella fig. 7 (circa la curva tratteggiata su questa figura si veda più avanti).

È possibile determinare il campo critico superiore (nei limiti della teoria di Ginzburg-Landau) anche senza dover precisare preliminarmente il carattere strutturale dello stato misto. È sufficiente notare che per campi alquanto più piccoli di $H_{c2}$ gli embrioni della fase $s$ non possono avere che piccoli valori del parametro d'ordine $\psi$ (è evidente che $\psi \to 0$ per $\mathfrak{H} \to H_{c2}$). Per questa ragione lo stato di questi embrioni può essere descritto dalle equazioni di Ginzburg-Landau, linearizzate in $\psi$. Omettendo nella (45,12) il termine non lineare otteniamo l'equazione

$$\frac{1}{4m}\left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)^2\psi = |a|\,\psi, \qquad (47,1)$$

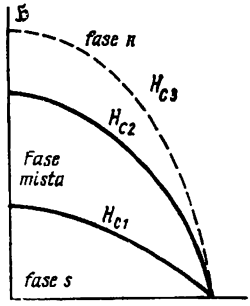



Fig. 7

dove con $\mathbf{A}$ si può intendere il potenziale vettoriale di un campo omogeneo $\mathfrak{H}$ per $\psi = 0$, quando il corpo si trova nello stato normale e il campo esterno è completamente penetrato in esso.

Ma, come forma, l'espressione (47,1) non è altro che l'equazione di Schrödinger per una particella di massa $2m$ e carica $2e$ in un campo magnetico, dove $|a|$ funge da livello di energia; in entrambi i casi coincidono anche le condizioni al contorno: $\psi = 0$ all'infinito. Come è noto (si veda III, § 112), il valore minimo dell'energia di una particella in moto in un campo magnetico omogeneo è $E_0 = \hbar\omega_H/2$, dove $\omega_H = 2\,|e|\,\mathfrak{H}/2mc$ (da questo valore inizia lo spettro continuo di energie). Per analogia fra i due problemi, gli embrioni della fase $s$, descritti dall'equazione (47,1), possono esistere soltanto per

$$|a| > \frac{|e|\,\hbar}{2mc}\mathfrak{H},$$

in modo che il campo critico $H_{c2} = 2mc\,|a|\,/\,|e|\hbar$. Le espressioni (45,9), (45,17-18) permettono di riscrivere questa formula come segue:

$$H_{c2} = \sqrt{2}\,\varkappa H_c \qquad (47,2)$$

(*A. A. Abrikosov*, 1952).

La soluzione dell'equazione (47,1), con la condizione al contorno $\psi = 0$ posta all'infinito, corrisponde alla formazione dell'embrione della fase $s$, all'interno del campione lontano dalla sua superficie. Mostriamo che l'esistenza della superficie contribuisce alla formazione di embrioni, i quali, quindi, possono nascere in uno strato superficiale sottile già per $\mathfrak{H} > H_{c2}$ (*D. Saint-James, P. G. De Gennes*, 1963).

La soluzione dell'equazione (47,1), che descrive gli embrioni della fase $s$ in prossimità della superficie del corpo (supposta piana), deve verificare su questa superficie la condizione al contorno $\partial\psi/\partial x = 0$, dove $x$ è la coordinata nella direzione della normale alla superficie (la condizione (45,15) per $A_x = 0$). Per stabilire l'analogia quantomeccanica necessaria, ricordiamo che il problema suindicato del movimento delle particelle in un campo magnetico omogeneo è equivalente, a sua volta, al problema del movimento in una buca di potenziale parabolica unidimensionale

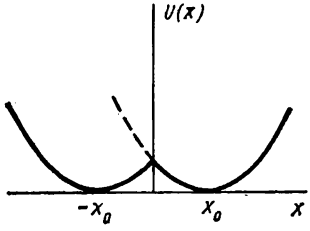


Fig. 8

$$U = \frac{2m}{2}\,\omega_H^2\,(x - x_0)^2,$$

dove $x_0$ è una costante corrispondente al « centro dell'orbita » (si veda III, § 112). Consideriamo ora una buca doppia composta di due buche paraboliche identiche e disposte simmetricamente rispetto al piano $x = 0$ (fig. 8). Allo stato fondamentale della particella in questo campo corrisponde la funzione d'onde $\psi(x)$ non avente zeri e pari in $x$; questa funzione verifica automaticamente la condizione $\psi' = 0$ per $x = 0$. Al tempo stesso, il livello fondamentale della particella in una buca doppia si trova sotto il livello in una buca semplice [1]); trasferendo al problema degli embrioni ciò dimostra l'affermazione fatta sopra, secondo la quale la loro formazione è resa più facile in prossimità della superficie.

Il calcolo numerico del livello nella buca doppia mostra che il suo valore minimo (a seconda del parametro $x_0$) vale $0{,}59E_0$. Ripetendo i ragionamenti che conducono alla formula (47,2) troviamo che il limite superiore dei campi, in cui compaiono embrioni superficiali della fase $s$, giace in corrispondenza di $H_{c3} = H_{c2}/0{,}59$, cioè

$$H_{c3} = 1{,}7H_{c2} = 2{,}4\varkappa H_c. \qquad (47,3)$$

Quindi, nel dominio dei campi fra $H_{c2}$ e $H_{c3}$ si produce il fenomeno della superconduttività superficiale; la frontiera di questo dominio è rappresentata dalla curva tratteggiata della fig. 7. Lo spessore dello strato superconduttore sulla superficie della fase normale è dell'ordine di grandezza di $\xi(T)$. Questa stima si deduce facilmente dalla stessa analogia quantomeccanica: la funzione d'onda della particella nella buca di potenziale (al livello $E_0$) è concentrata nel dominio $x \sim \hbar/\sqrt{mE_0}$; la dimensione corrispondente dell'embrio-

[1]) Ciò è dovuto alla diminuzione dell'energia potenziale nel semispazio $x < 0$ rispetto all'energia che si avrebbe in una buca semplice (curva tratteggiata della fig. 8). Si veda, ad esempio, III, § 50, problema 3.

ne si ottiene sostituendo $E_0$ con $|a|$ e (secondo la (45,17)) coincide con $\xi(T)$.

Quanto detto sopra si riferisce ai superconduttori di seconda specie. Ma i campi critici $H_{c2}$ e $H_{c3}$ così introdotti possono avere un significato fisico anche per i superconduttori di prima specie.

Se $\varkappa$ giace nell'intervallo $1/\sqrt{2} = 0{,}71 > \varkappa > 0{,}59/\sqrt{2} = 0{,}42$, allora $H_{c2} < H_c$, ma $H_{c3} > H_c$. Anche se la fase mista non compare in questo caso, nell'intervallo di campi fra $H_c$ e $H_{c3}$ esiste la superconduttività superficiale.

Infine, il senso stesso della deduzione effettuata mostra che il valore di $H_{c2}$ (47,2) determina (per ogni $\varkappa$) la frontiera superiore dei campi, nei quali è possibile la formazione di embrioni della fase $s$ con $\psi$ piccoli a piacere. Pertanto in un superconduttore di prima specie (nel quale $H_{c2} < H_c$) nei campi $\mathfrak{H} < H_{c2}$ la fase normale termodinamicamente svantaggiosa è assolutamente instabile. Nell'intervallo $H_{c2} < \mathfrak{H} < H_c$, invece, la fase normale può esistere come metastabile: la transizione di fase di prima specie dalla fase $n$ a quella $s$ può prodursi in questo dominio soltanto per la formazione di embrioni della fase $s$ con valori finiti di $\psi$; ma questa formazione è ostacolata dalla tensione superficiale positiva sulla loro frontiera (*V. L. Ginzburg*, 1956).

## PROBLEMA

Definire il campo critico per una sferetta superconduttrice di piccolo raggio $R \ll \delta$ (*V. L. Ginzburg*, 1958).

*Soluzione.* In questo caso (così come nella pellicola sottile; si veda il problema al § 45) la distruzione della superconduttività avviene per transizione di fase di seconda specie. Si può trovare il campo critico per la sferetta come il valore al di sotto del quale la fase $n$ perde di stabilità rispetto alla formazione di embrioni della fase $s$. Come nel testo, ciò si riduce alla ricerca dell'autovalore minimo dell'equazione di Schrödinger (47,1). Per la conduzione $R \ll \delta$ si può cercare questa soluzione applicando la teoria delle perturbazioni al campo esterno; inoltre, la funzione d'onda imperturbata $\psi$ è costante (l'embrione occupa tutto il volume della sferetta). Allora l'autovalore si definisce semplicemente come media dell'operatore di perturbazione $(2e\mathbf{A}/c)^2/4m$ (per $\psi =$ costante la media dell'operatore $(ie\hbar/mc)(\mathbf{A}\nabla)$ è nulla). Inoltre, il potenziale vettoriale del campo omogeneo deve essere considerato nella forma $\mathbf{A} = [\mathfrak{H}\mathbf{r}]/2$; proprio con questa trasformazione di gauge la soluzione $\psi =$ costante soddisfa sulla superficie della sferetta la condizione al contorno (45,15), la quale richiede che $\mathbf{nA} = 0$. Calcolando la media otteniamo

$$E_0 = \frac{e^2}{4mc^2}\,\frac{2}{3}\,\mathfrak{H}^2\overline{r^2} = \frac{e^2\mathfrak{H}^2R^2}{10mc^2}.$$

Il campo critico è definito (come nel testo) dalla condizione $E_0 = |a|$ che conduce al seguente risultato:

$$H_c^{(\text{fer})} = \sqrt{20}\,H_c\delta/R.$$

L'applicabilità della teoria delle perturbazioni è confermata qui dal fatto che il valore ottenuto di $E_0$ (per $\mathfrak{H} = H_c^{(\mathrm{sfer})}$), per la condizione $R \ll \delta$ è effettivamente piccolo rispetto all'autovalore seguente, che corrisponderebbe alla funzione d'onda variabile nel volume della sferetta e avrebbe un ordine di grandezza di $\hbar^2/mR^2$.

## § 48. *Struttura dello stato misto*

Consideriamo di nuovo (come al paragrafo precedente) un campione cilindrico di superconduttore di seconda specie, collocato nel campo magnetico longitudinale $\mathfrak{H}$. Precisiamo quale è la struttura dello stato misto, in cui il corpo si troverà, in campi che superano solo di poco il campo critico inferiore $H_{c1}$ [1]).

In questo caso, nella fase fondamentale superconduttrice sono infiltrati embrioni della fase normale. Per ottenere il massimo vantaggio termodinamico, essi devono avere (per tensione superficiale negativa!) la superficie più grande possibile. È naturale perciò una struttura in cui gli embrioni della fase $n$ siano filamenti sottili paralleli alla direzione del campo. In prossimità di queste curve (che si chiamano *di vortice*) sono concentrati sia il campo magnetico penetrante nel corpo, sia le correnti anulari superconduttrici che le abbracciano.

Quanto più vicino a $H_{c1}$ è il campo esterno, tanto più piccolo è il numero di questi filamenti e più grande la distanza fra di essi. Quando quest'ultima è sufficientemente grande, sono applicabili alle curve di vortice le considerazioni esposte alla fine del § 44, secondo le quali il flusso magnetico totale concentrato in prossimità di una curva deve essere un intero multiplo del quanto elementare di flusso $\varnothing_0 = \pi\hbar c/|e|$; vedremo più avanti che termodinamicamente più vantaggiose sono le curve di flusso il più piccolo possibile, ossia con il solo $\varnothing_0$. La finitezza di $\varnothing_0$ pone un limite alla divisione ulteriore degli embrioni della fase normale.

Quando il campo esterno, partendo da piccoli valori, raggiunge il valore $H_{c1}$, nel cilindro compare una curva di vortice. Scriviamo l'equazione termodinamica che determina questo momento, trascurando dapprima la struttura della curva stessa e tenendo conto soltanto della circostanza che a questa struttura è legata una certa energia (positiva!); indichiamo con $\varepsilon$ questa energia riferita all'unità di lunghezza della curva (essa verrà calcolata in seguito).

È evidente che in un corpo cilindrico sito in un campo esterno longitudinale l'induzione $\mathbf{B}$ sarà ovunque diretta anch'essa lungo l'asse del cilindro. Lo stesso vale per l'intensità macroscopica del campo $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$, introdotta al § 46. Allora dall'equazione rot $\mathbf{H}=0$ segue che $\mathbf{H}$ è costante lungo la sezione del cilindro (e quindi

[1]) I risultati esposti in questo paragrafo (e nei problemi) appartengono ad *A. A. Abrikosov* (1957).

in tutto il suo volume); in virtù della condizione al contorno, secondo la quale la componente tangenziale di **H** è continua, questo valore costante coincide con il campo esterno: $\mathbf{H} = \mathfrak{H}$. Quindi, dobbiamo considerare l'equilibrio termodinamico del corpo per volume, temperatura e intensità del campo **H** dati. Questo equilibrio si verifica per la condizione che il potenziale termodinamico $\tilde{F}$ rispetto alle suddette variabili sia minimo (si veda VIII, § 30). Supponiamo che $\tilde{F}_s$ sia questo potenziale per il cilindro superconduttore (poiché $\mathbf{B} = 0$ nella fase superconduttrice, allora $\tilde{F}_s$ coincide con l'energia libera $F_s$). Allora il potenziale $\tilde{F}$ per il cilindro con una curva di vortice sarà

$$\tilde{F} = \tilde{F}_s + L\varepsilon - \int \frac{\mathbf{HB}}{4\pi}\, dV = F_s + L\varepsilon - \frac{\mathfrak{H}}{4\pi} \int B\, dV.$$

Il termine $L\varepsilon$ è l'energia libera della curva ($L$ la lunghezza della curva coincidente con quella del cilindro) e l'ultimo termine distingue il potenziale $\tilde{F}$ dall'energia libera $F$. Poiché l'induzione **B** nel corpo è concentrata soltanto in prossimità della curva di vortice, allora $\int B\, dV = L\varnothing_0$, dove $\varnothing_0$ è il flusso di induzione attraverso la sezione della curva. In tal modo

$$\tilde{F} = \tilde{F}_s + L\varepsilon - \frac{L\varnothing_0\mathfrak{H}}{4\pi}. \tag{48,1}$$

La comparsa delle curve di vortice diventa termodinamicamente vantaggiosa quando l'aggiunta a $\tilde{F}_s$ si fa negativa. Uguagliando a zero questa aggiunta troviamo, quindi, il valore critico del campo esterno

$$H_{c1} = 4\pi\varepsilon/\varnothing_0. \tag{48,2}$$

Consideriamo ora la struttura di una singola curva di vortice. Ci limiteremo qui al caso importante in cui

$$\varkappa \gg 1, \tag{48,3}$$

ossia $\delta \gg \xi$. La lunghezza $\xi$ definisce l'ordine di grandezza del raggio del « midollo » della curva in cui $|\psi|^2$ varia da zero (corrispondente allo stato normale sull'asse del filo) a un valore finito corrispondente alla fase fondamentale $s$; a grandi distanze $r$ dall'asse del filo $|\psi|^2$ resta costante [1]). Quanto all'induzione $B(r)$, essa varia più lentamente e si smorza soltanto a distanze $r \sim \delta \gg \xi$. In altre

[1]) In questo paragrafo la lettera $r$ indicherà la coordinata cilindrica, ossia la distanza dall'asse.

parole, tutto il flusso magnetico attraversa essenzialmente il dominio esterno al « midollo » della curva, dove $|\psi|^2$ = costante (fig. 9).

L'ultima circostanza permette di utilizzare l'equazione dei London (ricordiamo che la sua applicabilità non è legata alla vicinanza della temperatura a $T_c$) per trovare la distribuzione del campo. Per attribuirle la forma necessaria qui, riscriviamo anzitutto la formula (44,7), che stabilisce la relazione fra la densità della corrente superconduttrice e la fase della funzione d'onda:

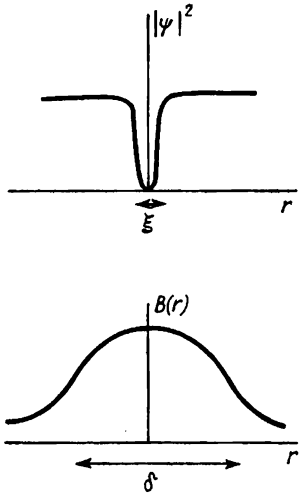


Fig. 9

$$\mathbf{A} + \delta^2 \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{\varnothing_0}{2\pi} \nabla\Phi, \qquad (48,4)$$

introducendovi la profondità di penetrazione $\delta$ ed esprimendo $\mathbf{j}$ mediante l'induzione nel seguente modo: $\mathbf{j} = c \operatorname{rot} \mathbf{B}/4\pi$. All'approssimazione dei London corrisponde la supposizione $\delta$ = costante. Integriamo l'uguaglianza (48,4) su un contorno chiuso $C$ che circonda il filamento e passa a distanze $r \gg \xi$ dal suo asse. Trasformando l'integrale di $\mathbf{A}$ secondo il teorema di Stokes in integrale di superficie, costruita sul contorno $C$, otteniamo

$$\int \mathbf{B}\, d\mathbf{f} + \delta^2 \oint \operatorname{rot} \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = \varnothing_0; \qquad (48,5)$$

trasformando nello stesso modo anche il secondo integrale, scriviamo

$$\int (\mathbf{B} + \delta^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B})\, d\mathbf{f} = \varnothing_0; \qquad (48,6)$$

a secondo membro abbiamo il valore minimo possibile (diverso da zero) corrispondente all'incremento della fase solo di $2\pi$. Se il contorno $C$ passa a distanze $r \gg \delta$ dalla curva, alle quali si possono supporre ormai inesistenti campo e correnti, il secondo integrale nella (48,5) può essere omesso; allora si vede che $\varnothing_0$ coincide con il flusso totale di induzione, concentrato attorno a una curva di vortice isolata. L'asse stesso del tubo rappresenta una curva singolare, il cui aggiramento cambia la fase della funzione d'onda.

Poiché l'uguaglianza (48,6) deve essere verificata per ogni contorno $C$ (soddisfacente alle dette condizioni), da essa segue che deve essere

$$\mathbf{B} + \delta^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{B} - \delta^2 \Delta \mathbf{B} = \varnothing_0 \delta(\mathbf{r}), \qquad (48,7)$$

dove $\mathbf{r}$ è il raggio vettore bidimensionale nel piano della sezione trasversale della curva di vortice. La scrittura del secondo membro di questa equazione sotto forma di funzione $\delta$ significa che le distanze $\sim\xi$ sono supposte qui nulle. In tutto lo spazio, ad eccezione della linea $\mathbf{r} = 0$, l'espressione (48,7) coincide con l'equazione dei London (44,11), ma per la descrizione della curva di vortice occorre una soluzione con singolarità per $r = 0$.

La distribuzione del campo alle distanze $r$ dall'asse nel dominio $\delta \gg r \gg \xi$ può essere trovata direttamente mediante la (48,5). Consideriamo come contorno $C$ una circonferenza di raggio $r$ in questo dominio. Il flusso di induzione attraverso questo contorno (il primo termine a primo membro dell'equazione (48,5)) costituisce solo una piccola parte di tutto il flusso magnetico, cioè la sua quota $\sim(r/\delta)^2$, che trascuriamo. Nel secondo termine $d\mathbf{l}$ è contenuto l'elemento di lunghezza della circonferenza, e poiché il vettore $\mathbf{B}$ è diretto lungo l'asse $z$ (sistema di coordinate cilindriche avente come asse l'asse del filamento) e dipende soltanto da $r$, allora

$$\mathbf{l}\,[\nabla \mathbf{B}] = [\mathbf{l}\nabla]\,\mathbf{B} = -\frac{\partial B_z}{\partial r} = -\frac{dB}{dr}$$

($\mathbf{l}$ è il vettore unità della tangente alla circonferenza). In tal modo otteniamo l'equazione

$$\mathbf{l} \operatorname{rot} \mathbf{B} = -\frac{dB}{dr} = \frac{\varnothing_0}{2\pi r \delta^2}, \qquad (48,8)$$

da cui

$$B(r) = \frac{\varnothing_0}{2\pi\delta^2} \ln \frac{\delta}{r}, \quad \xi \ll r \ll \delta. \qquad (48,9)$$

Dato il carattere logaritmico di questa dipendenza il limite di integrazione superiore (sul quale deve essere $B \approx 0$) può essere posto coincidente con la frontiera superiore del dominio considerato delle distanze $r$.

Per estendere la distribuzione testé ottenuta al dominio $r \gtrsim \delta$, ricorriamo all'equazione (48,7) applicabile per tutte le distanze $r \gg \xi$. Sviluppando l'operatore di Laplace in coordinate cilindriche (tenendo conto che $B = B_z(r)$), riscriviamo l'equazione (per $r \neq 0$) nella forma

$$B'' + \frac{1}{r} B' + \delta^{-2} B = 0.$$

La soluzione di questa equazione decrescente per $r \to \infty$ è

$$B(r) = \text{costante} \cdot K_0(r/\delta),$$

dove $K_0$ è la funzione di Macdonald (funzione di Hankel di argomento immaginario). Il coefficiente costante va definito mediante una « cucitura » con la soluzione (48,9): utilizzando cioè la nota espressione limite $K_0(z) \approx \ln(2/z\gamma)$ per $z \ll 1$ ($\gamma = e^C = 1{,}78$). Infine, abbiamo

$$B(r) = \frac{\varnothing_0}{2\pi\delta^2} K_0\left(\frac{r}{\delta}\right), \quad r \gg \xi. \tag{48,10}$$

Mediante la nota espressione asintotica $K_0(z) \approx (\pi/2z)^{1/2} e^{-z}$ per $z \to \infty$, in particolare, ricaviamo di qui la legge di smorzamento del campo lontano dall'asse del tubo:

$$B(r) = \frac{\varnothing_0}{(8\pi r\delta^3)^{1/2}} e^{-r/\delta}. \tag{48,11}$$

Badiamo all'analogia evidente fra le proprietà delle curve di vortice nei superconduttori e nell'elio liquido (§ 29). In ambedue i casi si tratta di linee singolari, aggirando le quali la funzione d'onda condensata cambia di fase. Alle traiettorie circolari del movimento superfluido attorno alle curve di vortice nell'elio liquido corrispondono le correnti anulari nel superconduttore; nel primo caso la velocità superfluida $v_s$ decresce secondo la legge $1/r$, e nel secondo caso secondo la stessa legge decresce la densità di corrente superconduttrice

$$j = \frac{c}{4\pi} |\operatorname{rot} \mathbf{B}| = \frac{c\varnothing_0}{8\pi^2\delta^2 r}. \tag{48,12}$$

Questa coincidenza è del tutto naturale, poiché in ambedue i casi queste leggi sono conseguenza diretta dell'esistenza della curva singolare. Ma, al tempo stesso, nell'elio liquido la suddetta dipendenza $v_s(r)$ si estende a distanze qualsiasi; nel superconduttore la decrescenza di $j(r)$ per $r \gg \delta$ diventa esponenziale. Questa distinzione è dovuta al fatto che il liquido elettronico è carico: il movimento delle particelle cariche crea un campo magnetico che, a sua volta, serve da schermo al campo (se facciamo tendere a zero la carica $e$ delle particelle, la profondità di penetrazione $\delta \to \infty$).

Ora possiamo calcolare l'energia libera della curva di vortice. Il contributo in essa proveniente dal dominio dello spazio all'esterno del « midollo » ($r \gg \xi$) è dato dagli integrali estesi a questo dominio:

$$F_{\text{curva}} = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{B}^2 dV + \frac{\delta^2}{8\pi} \int (\operatorname{rot} \mathbf{B})^2 dV. \tag{48,13}$$

Infatti, facendo variare questa espressione in **B** (per temperatura data, cioè per $\delta$ dato), otteniamo immediatamente l'equazione dei London (48,7) (per $r \neq 0$) [1]. Il secondo integrale nella (48,13), divergente logaritmicamente su ambedue i confini del dominio $\delta \gg r \gg \xi$, è grande rispetto al primo. Sostituendovi $|\operatorname{rot} \mathbf{B}|$ dall'espressione (48,8) otteniamo l'energia dell'unità di lunghezza della curva:

$$\varepsilon = \left(\frac{\varnothing_0}{4\pi\delta}\right)^2 \ln \frac{\delta}{\xi}. \tag{48,14}$$

Questa espressione ha precisione logaritmica, vale a dire che si suppone non soltanto $\delta/\xi \gg 1$, ma anche $\ln(\delta/\xi) \gg 1$; è con questa precisione che si può trascurare il contributo in $\varepsilon$ da parte del « midollo » della curva.

In particolare, il risultato (48,14) dà la possibilità di dare un'interpretazione corretta all'affermazione fatta sopra, secondo la quale la comparsa di curve di vortice con flusso magnetico di valore minimo è termodinamicamente vantaggiosa. Infatti, poiché l'energia libera della curva è proporzionale al quadrato del flusso magnetico concatenato alla curva, allora per una curva di flusso $n\varnothing_0$ l'energia avrebbe il fattore $n^2$; invece la disintegrazione di una tale curva in $n$ curve di flussi $\varnothing_0$ fornisce un incremento di energia di $n$ volte.

Sostituendo la (48,14) nella (48,2) otteniamo il valore del campo critico inferiore

$$H_{c1} = \frac{\varnothing_0}{4\pi\delta^2} \ln \frac{\delta}{\xi}. \tag{48,15}$$

Per $T \to T_c$ si può riscrivere questa espressione, tenendo conto della (45,19), nella forma [2])

$$H_{c1} = H_c \frac{\ln \varkappa}{\sqrt{2}\varkappa}. \tag{48,16}$$

Man mano che il campo esterno aumenta il numero di curve di vortice cresce e, quindi, la penetrazione del campo magnetico nel superconduttore diventa più forte. Tenendo conto dell'interazione

---

[1]) Il secondo termine della (48,13), se espresso mediante la corrente **j**, diventa

$$2\pi c^2\delta^2 \int \mathbf{j}^2\, dV = \int \frac{\rho_s \mathbf{v}_s^2}{2}\, dV;$$

nella seconda espressione si è sostituito anche $\delta^2 = mc^2/4\pi e^2 n_s$ e si sono introdotte la densità e la velocità della componente superfluida secondo $\mathbf{j} = e\rho_s\mathbf{v}_s/m$ (si veda la nota alla pag. 217). Vediamo che questo termine si può considerare come energia cinetica degli elettroni superconduttori.

[2]) Poiché questa formula è stata introdotta supponendo che $\ln \varkappa \gg 1$, non si può applicarla al caso $\varkappa \sim 1$! In particolare, per $\varkappa = 1/\sqrt{2}$ il campo $H_{c1}$ (così come $H_{c2}$) deve coincidere semplicemente con $H_c$.

fra le curve, all'equilibrio termodinamico corrisponde una certa loro disposizione ordinata che forma un reticolo bidimensionale (nel piano della sezione del cilindro) [1]). Qualunque sia la densità del numero di filamenti (curve di vortice) l'asse di ciascuno di essi resta una linea, aggirando la quale la funzione d'onda $\psi$ cambia fase di $2\pi$. La media dell'induzione (rispetto alla sezione del cilindro) è

$$\bar{B} = \nu \varnothing_0, \tag{48,17}$$

dove $\nu$ è il numero di curve per unità d'area della sezione. In effetti, se integriamo la relazione (48,4) sul contorno di tutta la sezione del campione, avremo l'equazione (48,5) con $S\nu\varnothing_0$ a secondo membro ($S$ è l'area della sezione); il primo integrale a primo membro dell'equazione rappresenta il flusso totale di induzione $S\bar{B}$ e il secondo integrale è l'effetto piccolo rispetto al primo nel rapporto di $\sim \delta/R$ e quindi trascurabile ($R$ sono le dimensioni lineari della sezione); qui è essenziale, ovviamente, che il campo attorno alle curve si smorzi a distanze $\sim\delta$.

Finché le distanze $d$ fra le curve restano grandi rispetto al raggio di correlazione $\xi$, si può affermare che i campi magnetici delle curve di vortice si sommano semplicemente. Infatti, per $d \gg \xi$ è ancora possibile tracciare un contorno che abbraccia un numero qualsiasi di curve di vortice, in modo tale che passi ovunque lontano (a distanze $\gg\xi$) dal loro « midollo ». Sullo stesso contorno si verifica la condizione di approssimazione dei London (la costanza di $\delta$), e pertanto arriviamo di nuovo a un'equazione che differisce dalla (48,7), solo per il fatto che la funzione $\delta$ al suo secondo membro è sostituita dalla somma di funzioni $\delta$ delle distanze da ciascuna delle curve; data la linearità di questa equazione, ne consegue l'affermazione fatta.

Quando il campo esterno si avvicina a $H_{c2}$, le distanze fra le curve di vortice diventano commensurabili con $\xi$. Ciò risulta con evidenza dall'espressione stessa del campo critico (47,2) se la scriviamo (mediante le (45,9), (45,16-18) nella forma

$$H_{c2} = \varnothing_0/2\pi\xi^2; \tag{48,18}$$

essa corrisponde al flusso $\varnothing_0$ concentrato su un'area $\sim \xi^2$.

La scomparsa della superconduttività per $\mathfrak{H} = H_{c2}$ avviene come transizione di fase di seconda specie. Nello spirito della teoria generale di queste transizioni si può affermare che il parametro d'ordine $\psi$, quale funzione del campo esterno, si annulla secondo la legge $|\psi|^2 \sim H_{c2} - \mathfrak{H}$. D'altra parte la magnetizzazione della sostanza $M = (B - H)/4\pi$ (come grandezza indipendente dalla

[1]) Vantaggio maggiore dà, evidentemente, un reticolo formato da triangoli equilateri aventi ai vertici curve di vortice.

fase di $\psi$) in questo dominio è proporzionale anch'essa a $|\psi|^2$. Tenendo conto che per $\mathfrak{H} = H_{c2}$ deve essere anche $B = H_{c2}$, otteniamo così la legge lineare di dipendenza dell'induzione $B$ nel superconduttore dal campo esterno in prossimità del punto di transizione

$$B - H_{c2} \sim \mathfrak{H} - H_{c2}. \tag{48,19}$$

## PROBLEMI

**1.** Calcolare l'energia di interazione di due curve di vortice disposte alla distanza $d \gg \xi$ l'una dall'altra.

*Soluzione.* Trasformiamo l'espressione dell'energia libera (48,13) per un sistema di due curve di vortice in modo tale che si possano eseguire le integrazioni soltanto in prossimità di ciascuna singola curva. A tale scopo scriviamo, utilizzando l'equazione (48,7),

$$\mathbf{B}^2 + \delta^2 (\text{rot } \mathbf{B})^2 = \delta^2 \{-\mathbf{B} \text{ rot rot } \mathbf{B} + (\text{rot } \mathbf{B})^2\} = \\ = \delta^2 \text{ div } [\mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{B}].$$

L'integrale di volume diventa

$$F_{\text{filamenti}} = \frac{\delta^2}{8\pi} \int\limits_{f_1+f_2} [\mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{B}]\, d\mathbf{f}, \tag{1}$$

si trasforma cioè in un integrale esteso alle superfici cilindriche $f_1$ e $f_2$ (di raggio piccolo $r_0$; $\xi \ll r_0 \ll \delta$) che avvolgono il « midollo » dei filamenti. Per $d \gg \xi$ i campi delle curve sono additivi, cioè $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$. L'energia di interazione è data dalla parte dell'integrale (1) che dipende contemporaneamente da $\mathbf{B}_1$ e $\mathbf{B}_2$:

$$L\varepsilon_{12} = \frac{\delta^2}{8\pi} \left\{ \int [\mathbf{B}_2 \text{ rot } \mathbf{B}_1]\, d\mathbf{f}_1 + \int [\mathbf{B}_1 \text{ rot } \mathbf{B}_2]\, d\mathbf{f}_2 \right\}$$

$\left(\text{quanto agli integrali della forma } \int [\mathbf{B}_2 \text{ rot } \mathbf{B}_1]\, d\mathbf{f}_2, \text{ essi tendono a zero per } r_0 \to 0\right)$. Mediante le (48,8) e (48,10) ricaviamo

$$\varepsilon_{12} = 2 \frac{\delta^2}{8\pi} 2\pi r_0 \frac{\varnothing_0}{2\pi r_0 \delta^2} B(d) = \frac{\varnothing_0^2}{8\pi^2 \delta^2} K_0 \left(\frac{d}{\delta}\right).$$

In particolare, alle distanze $d \gg \delta$ abbiamo

$$\varepsilon_{12} = \frac{\varnothing_0^2}{2^{7/2}\pi^{3/2}\delta^2} \left(\frac{\delta}{d}\right)^{1/2} e^{-d/\delta}. \tag{2}$$

**2.** Determinare la dipendenza della media (sulla sezione del campione cilindrico) dell'induzione magnetica $\overline{B}$ dal campo esterno $\mathfrak{H}$, nello stato misto in cui le curve di vortice sono disposte alla distanza $d \gg \delta$ le une dalle altre, formando (nella sezione del campione) un reticolo di triangoli equilateri.

*Soluzione.* L'area del triangolo equilatero è uguale a $\sqrt{3}d^2/4$ ($d$ la lunghezza di un lato) e il numero di curve a metà del numero di triangoli nel reticolo ($N$ triangoli hanno $3N$ vertici, ma nel reticolo ciascun vertice appartiene a sei triangoli contigui), pertanto $\nu = 2/\sqrt{3}d^2$.

Il potenziale termodinamico $\tilde{f}$ dell'unità di volume del corpo nello stato misto vale

$$\tilde{f}=\tilde{f}_s-\frac{\varnothing_0}{4\pi}\nu(-H_{c1}+\mathfrak{H})+\frac{1}{2}\sum_{i,\,k}\varepsilon_{ik},$$

dove il secondo termine corrisponde all'espressione (48,1) (con $H_{c1}$ dalla (48,2)); nel terzo termine $\varepsilon_{12}$ è l'energia di interazione di due curve e la somma si estende a tutti i filamenti che intersecano l'unità d'area. Poiché $\varepsilon_{12}$ decresce esponenzialmente per $d \gg \delta$, nella somma è sufficiente considerare soltanto le coppie di curve vicine. Nel reticolo triangolare ciascuna curva ne ha sei vicine, perciò

$$\frac{1}{2}\sum_{i,\,k}\varepsilon_{ik}=\frac{6}{2}\sum_{i}\varepsilon_{i1}=3\nu\varepsilon_{12}(d).$$

Sostituendovi il valore di $\varepsilon_{12}$ della (2) del problema 1, otteniamo

$$\tilde{f}=\tilde{f}_s+\frac{\varnothing_0}{2\sqrt{3}\,\pi\delta^2}\left[-\frac{\mathfrak{H}-H_{c1}}{a^2}+\frac{3\varnothing_0}{2\sqrt{2\pi}\,\delta^2}\,\frac{e^{-a}}{a^{5/2}}\right],$$

dove $a = d/\delta$. La dipendenza di $a$ da $\mathfrak{H}$ è data dalla condizione di minimo della funzione $\tilde{f}(a)$, la quale dà

$$\mathfrak{H}-H_{c1}=\frac{3\varnothing_0}{4\sqrt{2\pi}\,\delta^2}\sqrt{a}\,e^{-a} \tag{3}$$

(il termine di ordine superiore in $1/a \ll 1$ è omesso). Questa equazione assieme all'uguaglianza $\bar{B} = \nu\varnothing_0$, cioè

$$a=(2\varnothing_0/\sqrt{3}\,\delta^2\bar{B})^{1/2},$$

definisce la dipendenza cercata di $\bar{B}(\mathfrak{H})$. Notiamo che per $\mathfrak{H} \to H_{c1}$ la derivata $d\bar{B}/d\mathfrak{H}$ tende all'infinito secondo la legge

$$\frac{d\bar{B}}{d\mathfrak{H}} \backsim \frac{1}{\mathfrak{H}-H_{c1}}\ln^{-3}\frac{1}{\mathfrak{H}-H_{c1}}.$$

## § 49. *Suscettività diamagnetica sopra il punto di transizione*

Alla fine del § 45 è stato già notato che il dominio di temperature in prossimità di $T_c$, in cui le fluttuazioni del parametro d'ordine $\psi$ diventano notevoli, è estremamente piccolo nei superconduttori. All'esterno di questo dominio le correzioni fluttuazionali alle grandezze termodinamiche sono in generale esigue. Tuttavia esse possono diventare notevoli per la suscettività magnetica del metallo sopra il punto di transizione. Infatti, la comparsa, in seguito alle fluttuazioni anche di un numero relativamente piccolo di elettroni superconduttori, può implicare un contributo alla suscettività magnetica, che supera

la suscettività di solito molto piccola di un metallo normale lontano dal punto di transizione [1]).

Consideriamo il metallo in un campo magnetico esterno debole ($\mathfrak{H} \ll H_c$) con temperatura superiore al punto $T_c$, ma vicina a questo punto. Il valore d'equilibrio del parametro d'ordine qui vale $\psi = 0$, e per il calcolo delle sue fluttuazioni si può utilizzare l'energia libera della teoria di Ginzburg-Landau. Allora nell'espressione (45,10) si possono conservare, essendo esigue le fluttuazioni, soltanto i termini quadratici in $\psi$, omettendo il termine in $|\psi|^4$ ed intendendo con $\mathbf{A}$ il potenziale vettoriale del campo omogeneo $\mathfrak{H}$. Le fluttuazioni dell'induzione $\mathbf{B}$, connesse alle fluttuazioni di $\psi$, sono quadratiche in $\psi$ (essendo quadratica la densità di corrente $\mathbf{j}$). Pertanto nel termine $\mathbf{B}^2/8\pi$ si può intendere con $\mathbf{B}$ la media (termodinamica) dell'induzione, trascurandone le fluttuazioni. In tal modo, la variazione dell'energia libera totale del metallo in presenza di fluttuazione è data dal seguente funzionale di $\psi$ [2]):

$$\Delta F[\psi] = \int \left\{ \frac{1}{4m} \left| \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + a|\psi|^2 \right\} dV. \quad (49,1)$$

Per calcolare il contributo fluttuazionale $\Delta F$ all'energia libera occorre considerare il funzionale (49,1) come « operatore hamiltoniano efficace » che definisce $\Delta F$ in base alla formula

$$\exp\left(-\frac{\Delta F}{T}\right) = \int \exp\left(-\frac{\Delta F[\psi]}{T}\right) D\psi, \quad (49,2)$$

dove l'integrazione (funzionale) è estesa a tutte le distribuzioni $\psi(\mathbf{r})$ (si veda V, § 147). Essa viene eseguita di fatto sviluppando $\psi$ in un certo sistema completo di autofunzioni e integrando sull'insieme infinito di coefficienti di questo sviluppo. Nel caso di un sistema omogeneo (senza campo esterno) lo sviluppo va effettuato semplicemente in onde piane (si veda, ad esempio, il problema nel V, § 147).

Nel caso considerato lo sviluppo deve essere eseguito in autofunzioni dell'« equazione di Schrödinger »

$$\frac{1}{4m}\left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right)^2 \psi = E\psi, \quad (49,3)$$

corrispondente all'operatore hamiltoniano (49,1). Al § 47 è stato già detto che questa equazione coincide formalmente con l'equazione di Schrödinger del movimento della particella (di massa $2m$ e carica $2e$) in un campo magnetico omogeneo. Le sue autofunzioni vengono

---

[1]) Questo effetto è stato scoperto da *V. V. Schmidt* (1966).

[2]) A scanso di equivoci sottolineiamo che il campo magnetico non è, nei confronti del superconduttore, un « campo esterno » $h$ nel senso introdotto nel V, § 144. Quest'ultimo dovrebbe entrare nell'energia libera nella forma del termine $-h(\psi + \psi^*)$, il che, nel caso considerato, è impossibile a priori a causa dell'invarianza di questo termine rispetto alla scelta della fase di $\psi$.

numerate da un numero quantico discreto ($n$) a da due numeri quantici continui ($p_x$, $p_z$); inoltre, gli autovalori dipendono unicamente da $n$ e $p_z$ (l'asse $z$ è diretto nella direzione del campo $\mathfrak{H}$) e sono dati dalla formula

$$E\left(n+\frac{1}{2},\ p_z\right)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{|e|\hbar}{mc}\mathfrak{H}+\frac{p_z^2}{4m}; \tag{49,4}$$

il numero di autofunzioni distinte con $n$ dato, con valore $p_z$ nell'intervallo $dp_z$ e con tutti i possibili $p_x$ è

$$V\frac{2|e|\mathfrak{H}}{(2\pi\hbar)^2 c}dp_z$$

(si veda III, § 112).

Per brevità, indichiamo con l'unico simbolo $q$ l'insieme dei numeri $n$, $p_z$, $p_x$ e scriviamo lo sviluppo della funzione $\psi$ (r) nella forma

$$\psi=\sum_q c_q\psi_q(\mathbf{r}), \tag{49,5}$$

dove $c_q = c'_q + ic''_q$ sono coefficienti complessi arbitrari e le autofunzioni sono supposte normalizzate dalla condizione $\int|\psi_q|^2 dV = 1$ (l'integrazione è estesa al volume del metallo).

La sostituzione dello sviluppo (49,5) nell'espressione (49,1) permette innanzitutto di passare dall'integrazione sul volume alla somma su $q$. Infatti, dopo aver integrato per parti il primo termine trasformiamo la (49,1) nel seguente modo:

$$\Delta F[\psi]=\int\left\{\psi^*\frac{1}{4m}\left(-i\hbar\nabla-\frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)^2\psi+\psi^* a\psi\right\}dV.$$

Sostituendovi la (49,5) e tenendo conto che ciascuna delle funzioni $\psi_q$ verifica l'equazione (49,3) con $E = E_q$ e che le autofunzioni con $q$ distinti sono mutuamente ortogonali, otteniamo

$$\Delta F[\psi]=\sum_q|c_q|^2(E_q+a). \tag{49,6}$$

L'integrazione funzionale nella (49,2) significa integrazione su tutti i $dc'_q dc''_q$. Dopo la sostituzione (49,6) le integrazioni su tutte queste variabili diventano separate e danno

$$\exp\left(-\frac{\Delta F}{T}\right)=\prod_q\frac{\pi T}{E_q+a},$$

ossia

$$\Delta F=-T\sum_q\ln\frac{\pi T}{E_q+a}. \tag{49,7}$$

Nei termini dei numeri quantici $n$ e $p_z$ questa espressione si scrive nella forma

$$\Delta F = -V \frac{2\,|e|\,T\mathfrak{H}}{(2\pi\hbar)^2 c} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{\pi T}{E(p_z,\ n+1/2)+a}\, dp_z. \qquad (49,8)$$

Questa somma è divergente per grandi $E$, ma la divergenza in realtà è fittizia e dovuta soltanto al fatto che la formula iniziale (49,1) è applicabile unicamente allorché le funzioni $\psi$ (**r**) variano lentamente: la variazione di $\psi$ deve essere piccola a distanze $\sim \xi_0$. Nei termini degli autovalori $E_q$ ciò significa che sono ammessi soltanto $E_q \ll \hbar^2/m\xi_0^2$. Interrompendo la somma su $n$ per un $N$ grande soddisfacente alla condizione posta, applichiamo ora la formula di Poisson

$$\sum_{n=0}^{N} f\left(n+\frac{1}{2}\right) \approx \int_0^N f(x)\,dx - \frac{1}{24} f'(x)\Big|_0^N$$

(si veda V (59,10)). In accordo con la (49,8) il primo termine integrale di questa formula dà, come è facile capire, un contributo indipendente da $\mathfrak{H}$ all'energia libera; ma questo termine non serve al calcolo della suscettività magnetica e l'omettiamo. Ora nel secondo termine si può porre $N \to \infty$ (in modo che il parametro di taglio non compare nella risposta) [1]):

$$\Delta F = V \frac{e^2 T_c \mathfrak{H}^2}{48\pi^2 \hbar m c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{a + p_z^2/4m}.$$

Infine, dopo aver calcolato l'integrale, abbiamo

$$\Delta F = V \frac{e^2 T_c \mathfrak{H}^2}{24\pi\hbar c^2 \sqrt{ma}}. \qquad (49,9)$$

Di qui la suscettività magnetica è

$$\chi = -\frac{1}{V}\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial \mathfrak{H}^2} = -\frac{e^2 T_c}{12\pi\hbar c^2 (m\alpha)^{1/2}(T-T_c)^{1/2}}. \qquad (49,10)$$

(*H. Schmidt*, 1968; *A. Schmid*, 1969). Si vede che in prossimità del punto di transizione la suscettività cresce come $(T - T_c)^{-1/2}$. In questo dominio l'espressione (49,10) rappresenta il contributo fondamentale alla suscettività magnetica di un metallo normale.

---

[1]) Nel coefficiente è posto $T \approx T_c$. Per $T$ nell'intorno di $T_c$ sono essenziali in questo integrale i valori $p_z \sim \sqrt{ma} \sim \hbar/\xi(T) \ll \hbar/\xi_0$, che cioè soddisfano alla condizione posta.

## PROBLEMI

1. Determinare il momento magnetico di una pellicola sottile (di spessore $d \ll \xi(T)$) in un campo magnetico debole perpendicolare al suo piano per temperature $T > T_c$, $T - T_c \ll T_c$.

*Soluzione.* Lo spessore finito della pellicola implica un numero quantico $p_z$ discreto nella (49,4); per una pellicola sottile occorre limitarsi nella (49,7) al solo valore $p_z = 0$ (già il primo valore diverso da zero è $p_z \sim \hbar/d$ per cui $E \sim \sim \hbar^2/md^2 \gg \hbar^2/m\xi^2 \sim a$). Il numero di autofunzioni con $n$ e $p_z$ dati (e con tutti i possibili $p_x$) è $2 \mid e \mid \mathfrak{H}S/2\pi\hbar c$, dove $S$ è l'area della pellicola; pertanto la somma su $q$ nella (49,7) va intesa come $(\mathfrak{H}S/\pi\hbar c)\sum_n$. Applicando alla somma la formula di Poisson otteniamo infine

$$\Delta F = S\,\frac{e^2 T_c \mathfrak{H}^2}{24\pi m c^2 a}\,.$$

Il momento magnetico della pellicola è

$$M = -\frac{\partial \Delta F}{\partial \mathfrak{H}} = -S\,\frac{e^2 T_c \mathfrak{H}}{12\pi m c^2 \alpha\,(T - T_c)}\,.$$

È da notare che esso cresce più rapidamente per $T \to T_c$ che non nel caso di un metallo illimitato.

2. Risolvere il problema 1 per una sferetta di raggio $R \ll \xi(T)$ (*V. V. Schmidt*, 1966).

*Soluzione.* In questo caso fra tutti gli autovalori dell'equazione (49,3) è essenziale solo uno, il più piccolo, corrispondente all'autofunzione $\psi =$ costante e uguale a $E_0 = e^2R^2\,\mathfrak{H}^2/10\,mc^2$ (si veda quanto detto in proposito nel problema del § 47). La somma (49,7) si riduce a un solo termine e il momento magnetico vale

$$M \approx -\frac{T_c}{a}\,\frac{\partial E_0}{\partial \mathfrak{H}} = \frac{e^2 T_c R^2 \mathfrak{H}}{5mc^2\alpha\,(T - T_c)}\,.$$

## § 50. *Effetto Josephson*

Consideriamo due superconduttori separati da uno strato sottile di dielettrico. Per gli elettroni questo strato rappresenta una barriera di potenziale, e se lo strato è sufficientemente sottile, esiste allora la probabilità finita di una loro penetrazione attraverso la barriera per effetto tunnel quantico. Anche se il coefficiente di trasmissione della barriera è piccolo, il fatto che sia non nullo ha un'importanza teorica: i due superconduttori costituiscono un unico sistema, descrivibile da una sola funzione d'onda condensata. Questa circostanza conduce ad effetti previsti, per la prima volta, da *B. D. Josephson* (1962).

L'unicità della funzione d'onda condensata del sistema significa che attraverso il contatto fra i due superconduttori può fluire una corrente superconduttrice, in assenza di differenza di potenziali applicata dall'esterno. Così come all'interno dei superconduttori la densità di corrente è determinata dal gradiente della fase $\Phi$ della funzione d'onda condensata, anche la densità $j$ di corrente supercon-

duttrice che attraversa il contatto è legata alla differenza fra i valori $\Phi_2$ e $\Phi_1$ della fase ai due estremi del contatto [1]). Poiché i valori della differenza $\Phi_2 - \Phi_1$, che variano per un intero multiplo di $2\pi$, sono fisicamente identici, è ovvio che la funzione

$$j = j(\Phi_{21}), \quad \Phi_{21} = \Phi_2 - \Phi_1 \tag{50,1}$$

deve essere periodica di periodo $2\pi$. L'operazione di inversione del tempo cambia il segno della corrente $j$ e, al tempo stesso, il segno della fase $\Phi_{21}$ (in quanto le funzioni d'onda vanno sostituite dalle loro coniugate complesse). Ciò vuol dire che la funzione (50,1) deve essere dispari e annullarsi per $\Phi_{21} = 0$. Essendo, s'intende, limitata, la funzione $j(\Phi_{21})$ ha un massimo e un minimo fra i quali varia al variare della differenza di fase; in virtù della disparità della funzione i moduli di questi valori sono uguali (indichiamoli con $\pm j_m$).

È da notare che la scrittura (50,1) suppone che sia trascurato l'influsso sulla corrente del campo magnetico indotto delle correnti all'interno del contatto. In caso contrario al posto della differenza $\Phi_{21}$ dovrebbe figurare l'espressione invariante di gauge

$$\Phi_2 - \Phi_1 \quad \frac{2e}{\hbar c}\int_1^2 A_x\,dx.$$

Essendo trascurabile lo spessore dello strato dielettrico è possibile trascurare l'integrale della funzione continua $A_x(x)$, e questa condizione è facilmente verificabile (mentre i valori del potenziale stesso $A_x$ ai due estremi del contatto si possono supporre identici).

La definizione della forma della funzione $j(\Phi_{21})$ in tutto il dominio di temperature è possibile soltanto in base alla teoria microscopica. Ci limiteremo qui allo studio fenomenologico nei limiti di applicabilità della teoria di Ginzburg-Landau.

Se il contatto fosse completamente impenetrabile per gli elettroni le funzioni d'onda $\psi$ di ciascun superconduttore verificherebbero sul loro estremo del contatto le condizioni al contorno (45,15):

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \frac{2ie}{\hbar c}A_x\psi_1 = 0,$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{2ie}{\hbar c}A_x\psi_2 = 0.$$

---

[1]) Affinché la corrente superconduttrice passante per il contatto sia di intensità notevole, lo spessore dello strato dielettrico deve essere molto piccolo: $\sim 10^{-7}$ cm. Tali distanze sono piccole anche rispetto al più piccolo parametro di lunghezza caratteristico nel superconduttore, ossia rispetto alla lunghezza di coerenza $\xi_0$. In questo senso lo strato deve essere considerato come indefinitamente sottile, e la teoria non tiene conto del comportamento della fase all'interno di questo strato.

La penetrabilità finita della barriera e i valori finiti di $\psi$ sulle frontiere del contatto implicano la comparsa, nei secondi membri delle condizioni suindicate, di espressioni diverse da zero e dipendenti dai valori che $\psi$ assume dall'altra parte del contatto. Essendo $\psi$ piccola (nell'intorno del punto di transizione $T_c$), ci si può limitare in queste funzioni ai termini lineari in $\psi$, scrivendo cioè

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \frac{2ie}{\hbar c} A_x\psi_1 = \frac{\psi_2}{\lambda}, \quad \frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{2ie}{\hbar c} A_x\psi_2 = \frac{\psi_1}{\lambda}; \tag{50,2}$$

il coefficiente $1/\lambda$ è proporzionale alla penetrabilità della barriera. Le uguaglianze (50,2) devono soddisfare alle condizioni di simmetria rispetto all'inversione del tempo: esse devono restare valide per le trasformazioni $\psi \to \psi^*$, $\mathbf{A} \to -\mathbf{A}$; ne segue che la costante $\lambda$ è reale (allora per la suddetta trasformazione le uguaglianze (50,2) coincidono semplicemente con le loro coniugate complesse).

Il legame fra l'intensità della corrente superconduttrice attraverso il contatto e la differenza di fase della funzione $\psi$ si può definire applicando la formula (45,14) a uno dei lati del contatto (a quello 1, per esempio):

$$j = -\frac{ie\hbar}{2m}\left(\psi_1^*\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \psi_1\frac{\partial\psi_1^*}{\partial x}\right) - \frac{2e^2}{mc}A_x\psi_1^*\psi_1.$$

Sostituendovi $\partial\psi_1/\partial x$ ottenuto dalla condizione al contorno (50,2) avremo

$$j = -\frac{ie\hbar}{2m\lambda}(\psi_1^*\psi_2 - \psi_1\psi_2^*).$$

Per i contatti di metalli identici le grandezze $\psi_1$ e $\psi_2$ differiscono unicamente per la loro fase; allora la densità di corrente è

$$j = j_m \operatorname{sen}\Phi_{21}, \quad j_m = \frac{e\hbar}{m\lambda}|\psi|^2. \tag{50,3}$$

All'avvicinarsi al punto di transizione la $|\psi|^2$ tende a zero come $T_c - T$; quindi, secondo la stessa legge, tende a zero anche la densità massima di corrente attraverso il contatto [1]).

Supponiamo ora che al contatto di tunnel sia applicata da una sorgente esterna una certa differenza di potenziale, cioè che nel contatto esista il campo elettrico $\mathbf{E}$. Descriveremo questo campo mediante il potenziale scalare che indichiamo qui con $V$ : $\mathbf{E} = -\Delta V$.

---

[1]) La teoria microscopica basata sul modello BCS mostra che fra $j$ e $\Phi_{21}$ si verifica lo stesso legame (50,3) per tutte le temperature. La stessa teoria permette di legare $j_m$ alla resistenza elettrica del contatto fra due metalli allo stato normale. Per un'esposizione dettagliata di questa teoria si veda, ad esempio, *I. O. Kulik*, *I. K. Janson*, Effetto Josephson in strutture tunnel superconduttrici, Nauka, 1970 (ed. russa).

L'influsso di questo campo sulla corrente superconduttrice attraverso il contatto si può determinare già in base alle condizioni di invarianza di gauge.

In assenza di campo (per $V = 0$) la fase della funzione d'onda è indipendente dal tempo: $\partial\Phi/\partial t = 0$ [1]). Per generalizzare questa uguaglianza al caso di esistenza di un campo elettrico osserviamo che la relazione generale deve essere invariante rispetto alla trasformazione di gauge del potenziale scalare

$$V \to V - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi(t)}{\partial t}, \tag{50,4}$$

che non incide sul potenziale vettoriale (supposto indipendente dal tempo). Così come abbiamo fatto per dedurre le trasformazioni (44,3) e (44,6), otteniamo che contemporaneamente a $V$ deve essere trasformata la fase della funzione d'onda nel seguente modo:

$$\Phi \to \Phi + \frac{2e}{\hbar c}\chi(t). \tag{50,5}$$

Ne risulta con evidenza che è invariante di gauge la relazione

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{2e}{\hbar}V = 0, \tag{50,6}$$

che si trasforma in $\partial\Phi/\partial t = 0$ per $V = 0$.

Per un campo elettrico indipendente dal tempo l'integrazione dell'uguaglianza (50,6) dà

$$\Phi = \Phi^{(0)} - \frac{2e}{\hbar}Vt,$$

dove $\Phi^{(0)}$ è indipendente dal tempo. Perciò, se al contatto è applicata una differenza di potenziale elettrica costante $V_{21}$, la differenza di fase su di esso è

$$\Phi_{21} = \Phi_{21}^{(0)} - \frac{2e}{\hbar}V_{21}t.$$

Sostituendo questa espressione nella (50,3) troviamo la corrente superconduttrice attraverso il contatto

$$j = j_m \operatorname{sen}\left(\Phi_{21}^{(0)} - \frac{2e}{\hbar}V_{21}t\right). \tag{50,7}$$

Siamo giunti a un risultato sorprendente: l'applicazione al contatto di tunnel di una differenza di potenziale costante implica la comparsa di una corrente superconduttrice alternata di frequenza

$$\omega_j = \frac{2}{\hbar}|eV_{21}|. \tag{50,8}$$

---

[1]) Ricordiamo (si veda la nota alla pag. 156) che il fattore temporale $\exp(-2i\mu t/\hbar)$ viene escluso dalla funzione d'onda per il fatto che l'operatore hamiltoniano del sistema $\hat{H}$ è sostituito con $\hat{H}' = \hat{H} - \mu\hat{N}$.

La potenza consumata dal contatto è data dal prodotto $jV_{21}$; la sua media (rispetto al tempo) è nulla, vale a dire manca un'emissione sistematica di energia da una sorgente esterna, come deve essere per una corrente superconduttrice non legata a dissipazione di energia. Sottolineiamo, tuttavia, che in presenza di forza elettromotrice esterna il contatto sarà attraversato da una certa corrente normale (debole per $V_{21}$ piccolo) accompagnata da dissipazione.

La conclusione circa la variazione periodica di frequenza (50,8) della corrente superconduttrice attraverso il contatto deriva già dal fatto stesso della dipendenza periodica di $j$ da $\Phi_{21}$ e dalla dipendenza lineare di $\Phi_{21}$ dal tempo; questa conclusione non è legata a nessuna ipotesi circa l'intensità della differenza di potenziale. Per quanto riguarda la formula concreta (50,7), essa è valida soltanto per la condizione che la frequenza $\omega_j$ sia piccola rispetto alla frequenza $\Delta/\hbar$ caratteristica per la superconduttività:

$$\hbar\omega_j = 2\,|eV\,| \ll \Delta\,(T). \tag{50,9}$$

PROBLEMA

Scrivere l'equazione della corrente nel circuito composto dalla resistenza $R$ e da un superconduttore a contatto di tunnel collegati in serie; al circuito è applicata la forza elettromotrice $V_0$.

*Soluzione.* La caduta totale di tensione nel circuito è $V_0 = RJ + V_{21}$, dove $J$ è la corrente nel circuito e $V_{21}$ la differenza di potenziale sul contatto [1]. Sostituendovi $J = J_m \operatorname{sen} \Phi_{21}$ e $V_{21}$ dalla (50,6) otteniamo

$$\frac{\hbar}{2\,|e|}\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial t} = V_0 - RJ_m \operatorname{sen} \Phi_{21}.$$

Sottolineiamo che la corrente alternata descritta da questa equazione è di carattere non sinusoidale.

## § 51. *Legame fra la corrente e il campo magnetico nel superconduttore*

Al § 44 abbiamo dedotto le formule che definiscono il legame fra la corrente e il campo magnetico nel superconduttore nel caso limite (dei London) di variazione lenta di tutte le grandezze lungo il volume del corpo; in questo caso il campo si è supposto debole, cioè piccolo rispetto al suo valore critico. Ora studiamo questa questione per il caso generale di un campo statico variabile nello spazio in modo arbitrario supponendolo, come prima, debole. La locuzione « variabile in modo arbitrario » significa qui che il campo può variare notevolmente a distanze $\sim \xi_0$ (ma, ovviamente, varia sempre poco a distanze dell'ordine di grandezza del reticolo costante; pertanto la non omogeneità del mezzo (metallo) è inessenziale alle distanze atomiche).

[1]) Trascuriamo qui la corrente normale piccola (per $V_0$ piccolo) nel superconduttore.

Nel caso generale il legame fra la corrente e il campo magnetico in un mezzo illimitato è rappresentato dalla formula integrale seguente:

$$j_i(\mathbf{r}) = -\int Q_{ik}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, A_k(\mathbf{r}')\, d^3x', \tag{51,1}$$

dove il nucleo $Q_{ik}$ dipende unicamente dalle proprietà del mezzo [1]). Alla dipendenza lineare della (51,1) corrisponde l'ipotesi di debolezza del campo.

Come è noto, la densità di corrente si può considerare come la derivata variazionale dell'energia del sistema rispetto al potenziale vettoriale: la variazione della funzione di Hamilton del sistema al variare di $\mathbf{A}$ è

$$\delta H = -\frac{1}{c}\int \mathbf{j}\delta\mathbf{A}\, d^3x$$

(si veda III (115,1)). Pertanto il nucleo $Q_{ik}$ nella (51,1) è la derivata seconda variazionale e la simmetria rispetto all'ordine della doppia derivazione (rispetto ad $A_i(\mathbf{r})$ e $A_k(\mathbf{r}')$) significa che

$$Q_{ik}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = Q_{ki}(\mathbf{r}'-\mathbf{r}). \tag{51,2}$$

Sviluppando $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ e $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ in integrali di Fourier, scriviamo il legame (51,1) per le componenti di Fourier nella forma

$$j_i(\mathbf{k}) = -Q_{ik}(\mathbf{k})A_k(\mathbf{k}), \tag{51,3}$$

dove in accordo con la (51,2) $Q_{ik}(\mathbf{k}) = Q_{ki}(-\mathbf{k})$.

Alcune proprietà importanti della funzione $Q_{ik}(\mathbf{k})$ derivano già dalla condizione di invarianza di gauge. La corrente $\mathbf{j}$ non deve variare per la trasformazione di gauge $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \to \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\chi(\mathbf{r})$ o, per le componenti di Fourier,

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}) \to \mathbf{A}(\mathbf{k}) + i\mathbf{k}\chi(\mathbf{k}).$$

Ciò vuol dire che il tensore $Q_{ik}(\mathbf{k})$ deve essere ortogonale al vettore d'onda

$$Q_{ik}(\mathbf{k})\, k_k = 0. \tag{51,4}$$

In particolare, nel cristallo di simmetria cubica la dipendenza tensoriale di $Q_{ik}$ si riduce ai termini della forma $\delta_{ik}$ e $k_ik_k$; allora dalla (51,4) risulta che

$$Q_{ik} = \left(\delta_{ik} - \frac{k_ik_k}{k^2}\right) Q(\mathbf{k}), \tag{51,5}$$

dove $Q(\mathbf{k})$ è una funzione scalare.

---

[1]) Il problema del mezzo illimitato a questo proposito ha un significato puramente formale. Il suo senso reale consiste nell'applicazione ulteriore dei suoi risultati al problema del mezzo limitato; si veda il paragrafo seguente.

Per i calcoli ulteriori consideriamo una trasformazione di gauge del potenziale nella quale div $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$. Ciò significa per le componenti di Fourier che $\mathbf{k}\mathbf{A}(\mathbf{k}) = 0$. Pertanto il legame (51,3) fra la corrente e il potenziale si riduce all'uguaglianza

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}) = -Q(\mathbf{k})\,\mathbf{A}(\mathbf{k}), \tag{51,6}$$

cioè sarà definito dalla sola funzione scalare $Q(\mathbf{k})$.

Alla situazione dei London corrisponde l'espressione limite di $Q(\mathbf{k})$ per $\mathbf{k} \to 0$. È facile ottenere questa espressione applicando l'operazione rot ad entrambi i membri dell'equazione (44,8):

$$\operatorname{rot}\mathbf{j} = -\frac{e^2 n_s}{mc}\operatorname{rot}\mathbf{A}$$

e tenendo conto dell'uguaglianza div $\mathbf{A} = 0$. Osservando che in virtù dell'equazione di continuità si ha anche div $\mathbf{j} = 0$, otteniamo

$$\Delta\mathbf{j} = -\frac{e^2 n_s}{mc}\Delta\mathbf{A}.$$

Nello spazio illimitato per le funzioni $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ ed $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ovunque finite ne consegue che

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{e^2 n_s}{mc}\mathbf{A}(\mathbf{r}), \tag{51,7}$$

vale a dire, l'intensità della corrente in ogni punto è determinata unicamente dal valore del potenziale nello stesso punto. La stessa uguaglianza sussiste per le componenti di Fourier $\mathbf{j}(\mathbf{k})$ e $\mathbf{A}(\mathbf{k})$, e dal confronto con la (51,6) risulta che $Q(\mathbf{k})$ è data dalla seguente espressione indipendente da $\mathbf{k}$ [1]):

$$Q(\mathbf{k}) = \frac{e^2 n_s}{mc} = \frac{c}{4\pi\delta_L^2} \quad \text{per} \quad \mathbf{k} \to 0. \tag{51,8}$$

Il contenuto ulteriore del presente paragrafo consiste nel calcolo di $Q(\mathbf{k})$ per il modello BCS con cui si intende, come abbiamo detto, un gas di Fermi degenere isotropo a debole attrazione fra le particelle (elettroni). Al tempo stesso è supposto che queste particelle interagiscano con la loro carica $e$ con il campo magnetico.

Al § 42 sono state dedotte le equazioni (42,5) per le funzioni di Green termiche del gas di Fermi in assenza di campo esterno. L'introduzione del campo magnetico si realizza con la sostituzione dell'operatore $\nabla \to \nabla - ie\mathbf{A}/c$ nell'operatore hamiltoniano $\hat{H}^{(0)}$ (7,7) [2]). Quindi, la stessa modifica si produce nell'equazione (7,8) per $\hat{\Psi}$ e, rispettivamente, si fa la sostituzione $\nabla \to \nabla + ie\mathbf{A}/c$ nell'equazio-

[1]) In questo e nei paragrafi successivi la profondità di penetrazione dei London è indicata con $\delta_L$.

[2]) Più avanti nel presente paragrafo (nelle equazioni (51,9-19)) poniamo $\hbar = 1$.

ne analoga per $\hat{\Psi}^+$; lo stesso si riferisce, evidentemente, anche alle equazioni per $\hat{\Psi}^M$ e $\hat{\bar{\Psi}}^M$. Quanto al termine di spin ($\sim \sigma \mathbf{H}$) corrispondente all'interazione diretta fra il momento magnetico dell'elettrone e il campo, esso è piccolo e lo si può trascurare nell'operatore hamiltoniano e nelle equazioni. Quando l'operatore $\nabla$ è applicato alle funzioni $\mathcal{G}(\tau, \mathbf{r}; \tau', \mathbf{r}')$ e $\mathcal{F}(\tau, \mathbf{r}; \tau', \mathbf{r}')$, sono soggetti a derivazione gli operatori $\hat{\Psi}^M(\tau, \mathbf{r})$ e $\hat{\bar{\Psi}}^M(\tau, \mathbf{r})$, rispettivamente. Perciò anche nelle equazioni (42,5) l'introduzione del campo magnetico si realizza mediante le medesime sostituzioni $\nabla \to \nabla \mp ie\mathbf{A}/c$.

L'esistenza di un campo esterno viola l'omogeneità spaziale del sistema per cui la dipendenza delle funzioni di Green dagli argomenti $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ non si riduce più alla dipendenza da $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$; dagli argomenti $\tau$ e $\tau'$, invece, le funzioni dipendono sempre mediante la differenza $\tau - \tau'$. Scriviamo le equazioni per le componenti di Fourier in $\tau - \tau'$:

$$\begin{gathered}\left\{i\zeta_s + \frac{1}{2m}\left[\nabla - \frac{ie}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right]^2 + \mu\right\}\mathcal{G}(\zeta_s; \mathbf{r}, \mathbf{r}') + \\ + g\Xi\bar{\mathcal{F}}(\zeta_s; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}), \\ \left\{-i\zeta_s + \frac{1}{2m}\left[\nabla + \frac{ie}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right]^2 + \mu\right\}\bar{\mathcal{F}}(\zeta_s; \mathbf{r}, \mathbf{r}') - \\ - g\Xi^*\mathcal{G}(\zeta_s; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0.\end{gathered} \tag{51,9}$$

Nel caso di campo debole, che verrà qui considerato, queste equazioni si possono linearizzare; poniamo

$$\begin{gathered}\mathcal{G} = \mathcal{G}^{(0)} + \mathcal{G}^{(1)}, \\ \bar{\mathcal{F}} = \bar{\mathcal{F}}^{(0)} + \bar{\mathcal{F}}^{(1)}\end{gathered} \tag{51,10}$$

(dove i primi termini sono i valori delle funzioni in assenza di campo e i secondi piccole correzioni lineari rispetto al campo) e conserviamo nelle equazioni i soli termini infinitesimi del primo ordine rispetto ad $\mathbf{A}$.

Inoltre, si deve tener presente che l'esistenza del campo cambia anche la funzione d'onda condensata $\Xi$, che nel dato caso non si riduce a una costante. Tuttavia, questa complicazione è eliminata con la trasformazione di gauge del potenziale vettoriale, nella quale

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \tag{51,11}$$

Infatti, la correzione del primo ordine (al valore costante $\Xi^{(0)}$) nella funzione scalare $\Xi(\mathbf{r})$ non potrebbe essere che proporzionale a div $\mathbf{A}$; per la condizione (51,11) essa si annulla. Pertanto nelle equazioni linearizzate si può porre con l'approssimazione richiesta $g\Xi = g\Xi^{(0)} \equiv \Delta$, dove $\Delta$ è la fessura nello spettro energetico del gas in assenza di campo (grandezza reale).

Come risultato le equazioni linearizzate (51,9) diventano

$$\left(i\zeta_s+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right)\mathcal{G}^{(1)}(\zeta_s;\,\mathbf{r},\,\mathbf{r}')+\Delta\overline{\mathcal{F}}^{(1)}(\zeta_s;\,\mathbf{r},\,\mathbf{r}')=$$
$$=\frac{ie}{mc}\mathbf{A}(\mathbf{r})\,\nabla\mathcal{G}^{(0)}(\zeta_s;\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'),$$
$$\left(-i\zeta_s+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right)\overline{\mathcal{F}}^{(1)}(\zeta_s;\,\mathbf{r},\,\mathbf{r}')-\Delta\mathcal{G}^{(1)}(\zeta_s;\,\mathbf{r},\,\mathbf{r}')=\tag{51,12}$$
$$=-\frac{ie}{mc}\mathbf{A}(\mathbf{r})\,\nabla\overline{\mathcal{F}}^{(0)}(\zeta_s;\,\mathbf{r}-\mathbf{r}').$$

Data la linearità di queste equazioni in $\mathbf{A}$ è sufficiente risolverle per una delle componenti di Fourier del campo, cioè

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\mathbf{A}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{kr}},\qquad \mathbf{kA}(\mathbf{k})=0.\tag{51,13}$$

Per tale $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ si può separare immediatamente la dipendenza delle funzioni $\mathcal{G}^{(1)}$ e $\overline{\mathcal{F}}^{(1)}$ dalla somma $\mathbf{r}+\mathbf{r}'$, ponendo

$$\mathcal{G}^{(1)}(\zeta_s;\,\mathbf{r},\,\mathbf{r}')=g(\zeta_s;\,\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}')/2},$$
$$\overline{\mathcal{F}}^{(1)}(\zeta_s;\,\mathbf{r},\,\mathbf{r}')=f(\zeta_s;\,\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}')/2}.\tag{51,14}$$

Dopo questa operazione la prima delle equazioni (51,12) diventa così

$$\left[i\zeta_s+\frac{1}{2m}\left(\nabla+\frac{i}{2}\mathbf{k}\right)^2+\mu\right]g(\zeta_s;\,\mathbf{r}-\mathbf{r}')+\Delta f(\zeta_s;\,\mathbf{r}-\mathbf{r}')=$$
$$=\frac{ie}{mc}\mathbf{A}(\mathbf{k})\,e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')/2}\nabla\mathcal{G}^{(0)}(\zeta_s;\,\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

e analogamente per la seconda equazione. Eseguiamo ora la trasformazione di Fourier delle funzioni $g$ e $f$ in $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$. Infine arriviamo al seguente sistema di due equazioni algebriche:

$$\left[i\zeta_s-\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}\right)^2+\mu\right]g(\zeta_s,\,\mathbf{p})+\Delta f(\zeta_s,\,\mathbf{p})=$$
$$=-\frac{e}{mc}\mathbf{pA}(\mathbf{k})\,\mathcal{G}^{(0)}\left(\zeta_s,\,\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}\right),$$
$$\left[-i\zeta_s-\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}\right)^2+\mu\right]f(\zeta_s,\,\mathbf{p})-\Delta g(\zeta_s,\,\mathbf{p})=\tag{51,15}$$
$$=\frac{e}{mc}\mathbf{pA}(\mathbf{k})\,\overline{\mathcal{F}}^{(0)}\left(\zeta_s,\,\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}\right).$$

Dopo trasformazioni semplici mediante le espressioni (42,7-8) per le funzioni $\mathcal{G}^{(0)}$ e $\overline{\mathcal{F}}^{(0)}$, la soluzione di queste equazioni si riduce alla forma

$$g(\zeta_s,\,\mathbf{p})=-\frac{e}{mc}\mathbf{pA}(\mathbf{k})\,\frac{(i\zeta_s+\eta_+)(i\zeta_s+\eta_-)+\Delta^2}{(\zeta_s^2+\varepsilon_+^2)(\zeta_s^2+\varepsilon_-^2)},\tag{51,16}$$

dove $\varepsilon_\pm = \varepsilon(\mathbf{p} \pm \mathbf{k}/2)$, $\eta_\pm = \eta(\mathbf{p} \pm \mathbf{k}/2)$ (quanto alla funzione $f(\zeta_s, \mathbf{p})$ non ne avremo bisogno in seguito).

Passiamo al calcolo della corrente. A tale scopo partiamo dalla nota espressione dell'operatore densità di corrente nella rappresentazione della seconda quantizzazione [1])

$$\hat{\mathbf{j}} = \frac{ie}{2m}\left[(\nabla\hat{\Psi}^+_\alpha)\hat{\Psi}_\alpha - \hat{\Psi}^+_\alpha(\nabla\hat{\Psi}_\alpha)\right] - \frac{e^2}{mc}\mathbf{A}\hat{\Psi}^+_\alpha\hat{\Psi}_\alpha.$$

Per passare alla rappresentazione di Matsubara è sufficiente sostituire gli operatori di Heisenberg $\hat{\Psi}$, $\hat{\Psi}^+$ con quelli di Matsubara $\hat{\Psi}^M$, $\hat{\bar{\Psi}}^M$. Ricordando la definizione della funzione di Green (37,2) troviamo che la densità di corrente (elemento matriciale diagonale dell'operatore $\hat{\mathbf{j}}$ la cui media è presa rispetto alla distribuzione di Gibbs) può essere scritta nella forma

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 2\frac{ie}{2m}\left[(\nabla' - \nabla)\mathcal{G}(\tau, \mathbf{r}; \tau'; \mathbf{r}')\right]_{\substack{\mathbf{r}'=\mathbf{r}\\ \tau'=\tau+0}} - \frac{e^2}{mc}\mathbf{A}(\mathbf{r})\,n, \qquad (51,17)$$

dove $n$ è la densità del numero di particelle (il fattore 2 è dovuto a $\mathcal{G}_{\alpha\alpha} = 2\mathcal{G}$).

Sostituendo $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{(0)} + \mathcal{G}^{(1)}$ nella (51,17) il termine in $\mathcal{G}^{(0)}$ scompare: per un sistema omogeneo e isotropo la funzione $\mathcal{G}^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ è pari e la sua derivata si annulla per $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = 0$. Passando anche alla trasformazione di Fourier in $\tau - \tau'$, otteniamo

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{ie}{m}T\sum_{s=-\infty}^{\infty}\left[(\nabla' - \nabla)\mathcal{G}^{(1)}(\zeta_s; \mathbf{r}, \mathbf{r}')\right]_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}} - \frac{e^2 n}{mc}\mathbf{A}(\mathbf{r}),$$

e sostituendovi $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ e $\mathcal{G}^{(1)}$ dalle (51,13) e (51,14) abbiamo

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}) = \frac{2eT}{m}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\int \mathbf{p}g(\zeta_s, \mathbf{p})\frac{d^3p}{(2\pi)^3} - \frac{ne^2}{mc}\mathbf{A}(\mathbf{k}).$$

Riportandovi $g(\zeta_s, \mathbf{p})$ dalla (51,16) è comodo considerare la trasversalità dei vettori $\mathbf{j}(\mathbf{k})$ e $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ e prendere la media nella direzione $\mathbf{p}_\perp$ nel piano perpendicolare alla direzione $\mathbf{k}$ in base alla formula

$$\overline{p_{\perp i}p_{\perp k}} = \frac{p^2}{2}\operatorname{sen}^2\theta\left(\delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{k^2}\right),$$

---

[1]) Si veda III, § 115. Qui è omesso un termine che rappresenta il contributo alla corrente da parte dello spin delle particelle. Per un sistema non ferromagnetico (in cui la funzione di Green $\mathcal{G}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\mathcal{G}$) questo termine si annulla quando si prende la media.

dove $\theta$ è l'angolo fra $\mathbf{k}$ e $\mathbf{p}$. In seguito otteniamo l'espressione per la funzione $Q(\mathbf{k})$, che definisce il legame fra $\mathbf{j}(\mathbf{k})$ ed $\mathbf{A}(\mathbf{k})$:

$$Q(\mathbf{k}) = \frac{e^2 T}{m^2 c} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int p^2 \operatorname{sen}^2 \theta \frac{(i\zeta_s + \eta_+)(i\zeta_s + \eta_-) + \Delta^2}{(\zeta_s^2 + \varepsilon_+^2)(\zeta_s^2 + \varepsilon_-^2)} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} + \frac{ne^2}{mc}, \tag{51,18}$$

$$\varepsilon_\pm^2 = \eta_\pm^2 + \Delta^2, \quad \eta_\pm = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} \pm \frac{\mathbf{k}}{2}\right)^2 - \mu.$$

Scritti così gli integrali e la somma che qui figurano sono formalmente divergenti. Sebbene queste divergenze siano in realtà fittizie, il calcolo deve essere eseguito con prudenza: prima che sia eliminata la divergenza il risultato può dipendere anche dall'origine in cui viene effettuata l'integrazione e la sommatoria.

Si può superare questa difficoltà tenendo presente una circostanza evidente a priori. Il fatto è che per $\Delta = 0$ deve essere $Q = 0$ in quanto nel metallo normale non esiste in generale corrente superconduttrice. Pertanto, senza modificare la risposta, possiamo sottrarre dalla (51,18) la stessa espressione con $\Delta = 0$:

$$Q(\mathbf{k}) = \frac{e^2 T}{m^2 c} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int p^2 \operatorname{sen}^2 \theta \left\{ \frac{(i\zeta_s + \eta_+)(i\zeta_s + \eta_-) + \Delta^2}{(\zeta_s^2 + \varepsilon_+^2)(\zeta_s^2 + \varepsilon_-^2)} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{(i\zeta_s - \eta_+)(i\zeta_s - \eta_-)} \right\} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}. \tag{51,19}$$

Questa espressione è già ben convergente e, quindi, l'integrazione e la sommatoria si possono eseguire in essa in qualsiasi ordine.

Osserviamo anzitutto che i valori cercati $\mathbf{k}$ sono piccoli nel senso che $k \ll p_F$; questa disuguaglianza esprime semplicemente il fatto che le distanze caratteristiche, alle quali nel superconduttore cambiano il campo e la corrente, sono grandi rispetto alle distanze fra le particelle (cioè rispetto a $\sim 1/p_F$).

Prima integriamo la (51,19) in $dp$. Questo integrale è concentrato soprattutto in un dominio ristretto degli impulsi in prossimità della superficie di Fermi, ossia nel dominio $|p - p_F| \sim k$, dove

$$\eta_\pm \approx \eta \pm \frac{1}{2} v_F k \cos\theta \approx v_F (p - p_F) \pm \frac{1}{2} v_F k \cos\theta,$$

qui il fattore $p^2$ nell'espressione integranda si può sostituire con $p_F^2$ e l'integrazione in $d^3p$ con quella in $2\pi m p_F \, d\eta \, d\cos\theta$. Dopo questa operazione l'integrale in $d\eta$ del secondo termine fra parentesi graffa nella (51,19) si annulla: il cammino di integrazione in esso può essere chiuso da una semicirconferenza infinitamente lontana nel piano delle $\eta$ complesse, mentre l'annullarsi dell'integrale è la conseguenza del fatto che ambedue i poli dell'espressione integranda apparten-

gono a un medesimo semipiano (superiore o inferiore a seconda del segno di $\zeta_s$). L'integrazione in $d\eta$ nel primo termine della (51,19) è elementare, dopo di che non resta che l'integrale nella variabile $x = \cos\theta$. Introducendo inoltre la densità $n$ in base all'uguaglianza $p_F^3 = 3\pi^2 n$, otteniamo il risultato finale (in unità usuali) nella forma seguente:

$$Q(\mathbf{k}) = \frac{3\pi T ne^2}{4mc} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{-1}^{1} \frac{\Delta^2 (1-x^2)\, dx}{[\zeta_s^2 + \Delta^2 + (\hbar v_F k x/2)^2]\,(\zeta_s^2 + \Delta^2)^{1/2}}, \qquad (51,20)$$

$$\zeta_s = (2s+1)\,\pi T$$

(*J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer*, 1957) [1]).

Nel caso limite di valori piccoli di $k$ ($k\xi_0 \ll 1$, dove $\xi_0 \sim \hbar v_F/\Delta_0 \sim \hbar v_F/T_c$ è la lunghezza di coerenza) si può mostrare che l'espressione (51,20) si riduce all'espressione dei London (51,8) indipendente da $q$, ma non ci soffermeremo su ciò.

Nel caso limite inverso, in cui $k\xi_0 \gg 1$, nell'integrale (51,20) è essenziale il dominio $x \lesssim T_c/\hbar k v_F \ll 1$. Pertanto si può trascurare $x^2$ rispetto a 1 nel numeratore dell'espressione integranda e dopo (data la convergenza rapida) estendere l'integrazione da $-\infty$ a $\infty$. Come risultato otteniamo

$$Q(\mathbf{k}) = \frac{3\pi^2 ne^2 T}{2mc\hbar v_F k} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2}{\zeta_s^2 + \Delta^2}.$$

Eseguendo la somma mediante la (42,10) rappresentiamo questa formula come segue [2]):

$$Q(\mathbf{k}) = \frac{c\beta}{4\pi k}, \quad \beta = \frac{4\pi ne^2}{mc^2}\,\frac{3\pi^2}{4\hbar v_F}\,\Delta\,\mathrm{th}\,\frac{\Delta}{2T}, \quad k\xi_0 \gg 1. \qquad (51,21)$$

Per $T \ll T_c$ abbiamo $n_s \approx n$, $\Delta \approx \Delta_0$ e allora $\beta \sim 1/\delta_L^2\xi_0$. Per $T_c - T \ll T_c$ la fessura $\Delta$ è piccola cosicché $\mathrm{th}\,(\Delta/2T) \approx \Delta/2T_c$; tenendo conto delle formule (40,4-5) e (40,16) ritroviamo $\beta \sim 1/\delta_L^2\xi_0$. In tal modo in tutto il dominio delle tempe ature da 0 a $T_c$ si ha

$$\beta \sim 1/\delta_L^2\xi_0. \qquad (51,22)$$

Dunque, la funzione $Q(\mathbf{k})$ resta pressappoco costante nel dominio $k \lesssim 1/\xi_0$ (e nell'intorno del punto $\mathbf{k} = 0$ si sviluppa regolarmente in potenze di $k^2$); all'esterno di questo dominio la funzione $Q(\mathbf{k})$ decresce per $k \gg 1/\xi_0$ secondo la legge $1/k$. A questo andamento della

---

[1]) Questo metodo, che permette di ottenere il risultato richiesto mediante le funzioni di Green termiche, appartiene ad *A. A. Abrikosov* e *L. P. Gorkov* (1958).

[2]) Una formula di questo tipo è stata proposta da *A. B. Pippard* (1953) in base a considerazioni qualitative ancora prima della creazione della teoria microscopica della superconduttività.

funzione $Q$ (**k**) corrisponde la funzione nelle coordinate $Q$ (**r**) decrescente lentamente (come $1/r^2$) nel dominio $r \lesssim \xi_0$ e rapidamente (secondo una legge esponenziale) all'esterno di questo dominio. Quindi, la correlazione fra il campo e la corrente si estende sempre a distanze $\sim \xi_0$. Sottolineiamo che questa affermazione è valida in tutto il dominio delle temperature da zero a $T_c$. Abbiamo confermato così l'affermazione fatta al § 44 sull'universalità di $\xi_0$ quale parametro di lunghezza caratteristico per la superconduttività.

## § 52. *Profondità di penetrazione del campo magnetico nel superconduttore*

Applichiamo i risultati ottenuti nel paragrafo precedente al problema della penetrazione di un campo magnetico esterno nel superconduttore (questo problema è stato studiato al § 44 nell'approssimazione dei London).

Supponiamo che il superconduttore sia limitato da una superficie piana e occupi il semispazio $x > 0$, mentre il campo esterno $\mathfrak{H}$ (e con esso anche l'induzione **B** all'interno del superconduttore) sia diretto parallelamente alla superficie, lungo l'asse $z$. Allora tutte le grandezze dipendono dalla sola coordinata $x$, mentre la corrente **j** e il potenziale vettoriale **A** (con div **A** $= 0$) sono diretti lungo l'asse $y$. L'equazione di Maxwell rot **B** $= -\Delta$**A** $= 4\pi$ **j**$/c$ si riduce a

$$A''(x) = -\frac{4\pi}{c} j(x), \quad x > 0, \tag{52,1}$$

dove l'apice $'$ indica la derivazione rispetto a $x$.

Le condizioni al contorno per questa equazione dipendono, però, dalle proprietà fisiche della superficie del metallo nei confronti degli elettroni che la colpiscono. È più semplice il caso di riflessione speculare degli elettroni da parte della superficie. È evidente che per questa riflessione il problema del semispazio corrisponde a quello del mezzo illimitato in cui il campo $A(x)$ è distribuito simmetricamente da ambo le parti del piano $x=0$ ($A(x) = A(-x)$). In questo caso la derivata $A'(x)$ come funzione dispari di $x$ avrà una discontinuità per $x = 0$, cambiando di segno quando $x$ passa per 0. In altre parole, alla condizione $B = A' = \mathfrak{H}$ sulla superficie del semispazio corrisponde nel problema del mezzo illimitato la condizione

$$A'(+0) - A'(-0) = 2\mathfrak{H}. \tag{52,2}$$

Moltiplichiamo l'equazione (52,1) per $e^{-ikx}$ ed integriamola in $dx$ nei limiti da $-\infty$ a $\infty$. A primo membro dell'equazione scriviamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} A'' e^{-ikx}\, dx = \int_{-\infty}^{0} (A' e^{-ikx})'\, dx + \int_{0}^{\infty} (A' e^{-ikx})'\, dx + ik \int_{-\infty}^{\infty} A' e^{-ikx}\, dx.$$

I primi due integrali danno come somma $-2\mathfrak{H}$, mentre l'ultimo può essere integrato per parti poiché la funzione stessa $A(x)$ è continua per $x = 0$. Otterremo l'uguaglianza

$$2\mathfrak{H} + k^2 A(k) = \frac{4\pi}{c} j(k),$$

dove $A(k)$ e $j(k)$ sono le componenti di Fourier delle funzioni $A(x)$ e $j(x)$ definite in tutto lo spazio. Quindi, esse sono legate dalla relazione $j(k) = -Q(k) A(k)$, dove $Q(k)$ è data dalle formule ottenute al paragrafo precedente. Otteniamo così le componenti di Fourier del campo

$$A(k) = -\frac{2\mathfrak{H}}{k^2 + 4\pi Q(k)/c}. \tag{52,3}$$

La profondità di penetrazione $\delta$ è definita come [1]

$$\delta = \frac{1}{\mathfrak{H}} \int_0^\infty B(x)\, dx = -\frac{A(x=0)}{\mathfrak{H}}. \tag{52,4}$$

Esprimendo $A(x = 0)$ mediante le componenti di Fourier $A(k)$ ricavate dalla (52,3) abbiamo

$$\delta = -\frac{1}{\mathfrak{H}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \frac{dk}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k^2 + 4\pi Q(|k|)/c}. \tag{52,5}$$

In questo integrale è essenziale il dominio dei valori $k$ in cui $k^2 \sim 4\pi Q/c$. Nella situazione dei London (quando $\delta_L \gg \xi_0$) questi valori sono piccoli nel senso che $k\xi_0 \ll 1$. Allora $Q(k)$ è data dall'espressione (51,8) indipendente da $k$ e l'integrazione nella (52,5) conduce, naturalmente, al valore $\delta = \delta_L$.

Nel caso inverso di Pippard (quando $\delta_L \ll \xi_0$) sono essenziali nell'integrale i valori $k \gg 1/\xi_0$. Qui $Q(k)$ è data dall'espressione (51,21) e l'integrale (52,5) dà

$$\delta = \delta_P = 4/3^{3/2}\beta^{1/3}. \tag{52,6}$$

Tenendo conto della (51,22) troviamo quindi che la profondità di penetrazione di Pippard vale

$$\delta_P \sim (\delta_L^2 \xi_0)^{1/3} \tag{52,7}$$

I calcoli suindicati si riferivano al caso di riflessione speculare degli elettroni da parte della superficie del metallo. Nel caso dei London, tuttavia, la profondità di penetrazione è indipendente in generale dalla legge di riflessione, come risulta con chiarezza dalla

[1]) Per una legge esponenziale di annullamento del campo questa definizione coincide con quella nella (44,13).

deduzione del valore $\delta_L$ al § 44; per $\delta \gg \xi_0$ i particolari della struttura della superficie sono inessenziali.

Ma anche nel caso di Pippard la dipendenza della profondità di penetrazione dalla legge di riflessione è di fatto poco importante. Così, nel caso di riflessione diffusa (quando le direzioni delle velocità degli elettroni riflessi sono distribuite in modo isotropo per qualsiasi direzione di incidenza), che è opposta alla riflessione speculare, il valore $\delta_P$ supera soltanto di 9/8 volte il valore $\delta$ nel caso di riflessione speculare.

## § 53. *Leghe superconduttrici*

L'esistenza di impurità influisce molto più profondamente sulle proprietà dei superconduttori che su quelle dei metalli normali. Le correzioni alle grandezze termodinamiche del metallo normale restano piccole finché è esigua la concentrazione $x$ di atomi dell'impurità; esse diventano notevoli soltanto per $x \sim 1$, cioè quando la distanza interatomica media dell'impurità è commensurabile con la costante $a$ del reticolo. Sottolineiamo che parliamo qui, ovviamente, dei contributi elettronici nelle grandezze termodinamiche, e di quelle di esse che sono definite dalla densità media di distribuzione degli stati quantistici degli elettroni conduttori nello spazio degli impulsi (tali sono, ad esempio, il calore specifico e la suscettività magnetica di campi deboli).

Un altro quadro si ha nei metalli superconduttori. Ciò è dovuto all'esistenza di un parametro di lunghezza caratteristico (lunghezza di coerenza $\xi_0$) che è più grande di $a$. Poiché la diffusione degli elettroni sugli atomi dell'impurità viola la correlazione fra gli elettroni, le proprietà del superconduttore possono variare notevolmente già quando la lunghezza del cammino libero degli elettroni $l$ diventa uguale a $\xi_0$; quanto alla concentrazione $x$, essa resta ancora piccola. Diamo qui i risultati fondamentali qualitativi che sono indispensabili per una comprensione generale delle proprietà di queste leghe di piccola concentrazione [1]).

Supponiamo che gli atomi dell'impurità non abbiano né momento meccanico né tanto meno magnetico (impurità non paramagnetiche). In questo caso essi non fanno altro che influire debolmente sulle proprietà termodinamiche del superconduttore in assenza di campo magnetico. Il fatto è che queste impurità non violano la simmetria rispetto all'inversione del tempo. In effetti, l'interazione fra gli atomi dell'impurità, distribuiti in qualche modo, e gli elettroni si può descrivere mediante l'assegnazione di un campo potenziale $U(\mathbf{r})$. In accordo con il teorema di Kramers, i livelli energetici degli

[1]) La teoria completa delle leghe superconduttrici costruita da *A. A. Abrikosov* e *L. P. Gorkov* è abbastanza complicata e supera i limiti del presente libro. Si vedano gli articoli originali in ŽETF **35**, 1558 (1958); **36**, 319 (1959).

elettroni in questo campo restano doppiamente degeneri, mentre gli stati corrispondenti a questi livelli sono mutuamente invertiti nel tempo e, quindi, gli elettroni possono formare in essi coppie di Cooper. Ciò avverrà come sopra in prossimità di una superficie di Fermi marcata, con la sola differenza che la superficie stessa delimita ora gli stati riempiti non più nello spazio degli impulsi, bensì nello spazio dei numeri quantici del campo $U(\mathbf{r})$; per una piccola concentrazione dell'impurità la densità di stati quantistici in prossimità della superficie di Fermi varia poco.

È chiaro perciò che dopo il calcolo della media rispetto alla disposizione degli atomi dell'impurità, si devono ottenere delle formule che differiscono da quelle della teoria dei superconduttori puri solo per correzioni infinitesime dell'ordine di $x$. In particolare, trascurando queste correzioni, la temperatura del punto di transizione $T_c$ e il salto in esso del calore specifico non cambiano (*P. W. Anderson*, 1959). Pertanto non cambierà il rapporto $\alpha^2/b$ fra i coefficienti nell'equazione di Ginzburg-Landau (si veda la (45,8)); la forma stessa di questa equazione è in generale indipendente dall'esistenza o meno di impurità, e vale in misura uguale sia per i superconduttori puri che per le leghe superconduttrici.

D'altra parte, le proprietà magnetiche del superconduttore, in particolare la profondità di penetrazione del campo magnetico, variano notevolmente già per $l \sim \xi_0$. Stimiamo la profondità di penetrazione partendo dall'ipotesi che, anche se la concentrazione $x \ll 1$, la lunghezza del cammino libero sia $l \ll \xi_0$ (*A. B. Pippard*, 1953).

Le collisioni fra gli elettroni e gli atomi dell'impurità eliminano la correlazione nel moto degli elettroni a distanze $r \gtrsim l$. Ciò vuol dire che il nucleo $Q(r)$ nella relazione integrale fra la corrente e il campo nel superconduttore si annullerà esponenzialmente già a distanze $r \sim l \ll \xi_0$. Nella rappresentazione degli impulsi la funzione $Q(k)$ ora resterà rispettivamente costante nel dominio $k \lesssim 1/l$. Il valore di questa costante si può definire mediante una « cucitura » per $kl \sim 1$ con la formula (51,21), che rimane valida per $k \gg 1/l \gg \gg 1/\xi_0$. Troviamo così che

$$Q(k) \sim \frac{ne^2}{mc}\frac{l\Delta}{\hbar v_F}\,\mathrm{th}\,\frac{\Delta}{2T} \quad \text{per} \quad kl \lesssim 1. \tag{53,1}$$

La profondità di penetrazione $\delta$ è definita dalla relazione $k^2 \sim \sim Q(k)/c$ per $k \sim 1/\delta$ (si veda il § 52). La (53,1) permette di ottenere

$$\delta \sim \delta_L^{(\text{puro})}(T=0)\left[\frac{\xi_0}{l\,\mathrm{th}\,(\Delta/2T)}\right]^{1/2} \sim \delta_L^{(\text{puro})}(T)\left(\frac{\xi_0}{l}\right)^{1/2}, \tag{53,2}$$

e, affinché questa formula sia valida, deve essere verificata la disuguaglianza $\delta \gg l$, che giustifica l'applicazione della (53,1); l'indice « puro » indica il valore in assenza di impurità (il valore del supercon-

duttore puro è inteso anche per $\xi_0$). L'espressione (53,2) si può rappresentare anche mediante la formula dei London, intendendo con la densità del numero di elettroni superconduttori la grandezza

$$n_s \sim n_s^{\text{puro}} \xi_0 / l. \tag{53,3}$$

Nei termini dei coefficienti $\alpha$ e $b$ dell'equazione di Ginzburg-Landau la relazione (53,2) significa (si veda la (45,16)) che

$$\frac{b}{\alpha} \sim \left(\frac{b}{\alpha}\right)_{\text{puro}} \frac{\xi_0}{l}.$$

Tenendo anche conto dell'indipendenza suindicata del rapporto $\alpha^2/b$ dalla impurità, troviamo che

$$\alpha \sim \alpha_{\text{puro}} \xi_0 / l, \quad b \sim b_{\text{puro}} (\xi_0/l)^2. \tag{53,4}$$

Di qui, in accordo con la (45,17), il raggio di correlazione è

$$\xi(T) \sim \xi(T)_{\text{puro}} (l/\xi_0)^{1/2} \tag{53,5}$$

e il parametro $\varkappa$ (45,18) vale

$$\varkappa \sim \varkappa_{\text{puro}} \xi_0 / l \gg \varkappa_{\text{puro}}. \tag{53,6}$$

Per una lunghezza di cammino libero sufficientemente piccola si ha $\varkappa > 1/\sqrt{2}$ in modo che i superconduttori sufficientemente « impuri » sono di seconda specie.

Il dominio di applicazione delle equazioni di Ginzburg-Landau ai superconduttori « impuri » dal lato delle temperature basse è limitato di fatto soltanto dalla condizione $T_c - T \ll T_c$. In questo caso la disuguaglianza necessaria $\delta(T) \gg l$ è equivalente alla condizione più debole seguente:

$$\frac{T_c - T}{T_c} \ll \varkappa_{\text{puro}}^2 \left(\frac{\xi_0}{l}\right)^3 \sim \varkappa^2 \frac{\xi_0}{l}.$$

Infine, spendiamo qualche parola sulle proprietà dei superconduttori con impurità paramagnetiche. Queste impurità violano la simmetria del sistema rispetto all'inversione del tempo e, quindi, violano il fenomeno stesso di accoppiamento degli elettroni (se i momenti magnetici esistono, l'inversione del tempo richiede che anche questi momenti cambino di segno, il che significa di fatto la sostituzione di un sistema fisico con un altro). Una misura numerica dell'influenza di queste impurità sulle proprietà del superconduttore è rappresentata dalla lunghezza del cammino libero $l_s$ nei confronti della diffusione con cambiamento della direzione di spin (dovuto all'interazione di scambio con gli atomi dell'impurità). La superconduttività scompare allorché la concentrazione $x$ raggiunge il suo valore critico, per cui $l_s \sim \xi_0$.

In realtà, però, esistono due concentrazioni critiche, entrambe dello stesso ordine di grandezza. Per la più piccola di esse ($x_1$) la fessura $\Delta$ nello spettro energetico si annulla, mentre la funzione d'onda condensata $\Xi$ diventa nulla solo per una certa concentrazione $x_2 > x_1$. Nel dominio delle concentrazioni comprese fra i valori $x_1$ e $x_2$ si ha superconduttività *senza fessura*. Poiché nel dedurre l'equazione dei London al § 44 abbiamo utilizzato soltanto il fatto stesso dell'esistenza della funzione condensata e considerazioni di invarianza di gauge, è chiaro che le proprietà fondamentali del superconduttore, ossia l'esistenza della corrente superconduttrice e l'effetto Meissner, si conservano ugualmente in questo dominio. Per quanto riguarda la mancanza di una fessura nello spettro, ciò si rivela (nelle proprietà di equilibrio del conduttore) nell'andamento non esponenziale del calore specifico. È da notare che qui non c'è nessuna contraddizione con il criterio di superconduttività di Landau (§ 23), poiché questo criterio è in generale inapplicabile a sistemi non ordinati (di tipo delle leghe in questione), in quanto le eccitazioni elementari non sono caratterizzate da un impulso ben determinato [1]).

## § 54. *Effetto Cooper per momenti orbitali non nulli di una coppia*

Si è già detto più di una volta che alla base della comparsa della superconduttività in un sistema di Fermi vi è l'effetto Cooper, ossia la formazione di stati legati (accoppiamento) da parte delle particelle che si attraggono sulla superficie di Fermi. Per un gas di Fermi la condizione di attrazione si formula come condizione di negatività della distanza di diffusione $a = \int U\, d^3x$, cioè che l'ampiezza di diffusione di due particelle nello stato a momento orbitale nullo rispetto al moto sia positiva, $l = 0$ (è questo stato a dare il contributo principale nella diffusione alle piccole energie).

Tuttavia è valida un'affermazione molto più forte, la quale dice che l'accoppiamento (e, come conseguenza, la comparsa della superconduttività) si produce se l'interazione è di carattere attrattivo almeno per un valore del momento $l$ (*L. D. Landau*, 1959). Sottolineiamo che qui si tratta di un sistema isotropo (liquido o gas), dove gli stati si possono classificare in base ai valori di $l$.

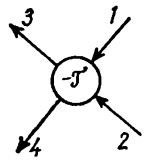
Dimostriamo questa affermazione per un gas di Fermi con un metodo che, in teoria, permette di determinare la temperatura $T_c$ della transizione allo stato superfluido, partendo unicamente dalle proprietà del sistema (gas di Fermi normale) alle temperature $T > T_c$.

Al § 18 è stato detto che nel formalismo matematico delle funzioni di Green di un sistema di Fermi normale l'energia dello stato

[1]) Per la teoria della superconduttività senza fessura si veda l'articolo originale di *A. A. Abrikosov* e *L. P. Gorkov* in ZETF 3 , 1781 (1960).

connesso di una coppia di particelle si rivela come polo della funzione di vertice $\Gamma$; lo stesso si riferisce alla funzione di vertice termica (per $T \neq 0$) che indichiamo con $\mathcal{T}$. Dopo la comparsa di questo polo tutto il formalismo diventa in realtà inapplicabile, ma esso è ancora applicabile al primo momento, in cui, al diminuire della temperatura, per $T = T_c$, compare il polo e l'energia di legame della coppia in questo istante deve essere nulla; in questo caso gli stati delle fasi normale e superfluida coincidono.

Nel diagramma a scheletro



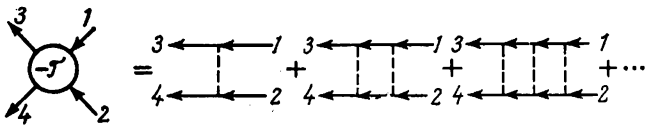

il cerchietto indica la funzione $-\mathcal{T}$. Il punto di transizione $T_c$ è definito, in accordo con quanto detto sopra, come la temperatura per la quale $\mathcal{T}$ ha un polo per

$$\zeta_{s1} = \zeta_{s2} = 0, \quad \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0. \tag{54,1}$$

La prima uguaglianza esprime il fatto che le particelle che si accoppiano si trovano sulla superficie di Fermi e che l'energia di legame della coppia è nulla; la seconda uguaglianza significa che le particelle che si accoppiano hanno impulsi opposti.

L'accoppiamento delle particelle compare già per un'attrazione debole a piacere. È chiaro che per la comparsa del polo è necessario che nella serie della teoria delle perturbazioni per una funzione di vertice ci siano dei termini, che contengono integrali divergenti per la condizione (54,1) e per $T_c \to 0$ (con un'attrazione debole $T_c$ è piccolo); in caso contrario tutte le correzioni al termine (finito) della prima approssimazione sarebbero piccole a priori rispetto all'ultimo per tutte le temperature e il polo non potrebbe comparire.

A questa condizione corrisponde una serie di diagrammi « a gradini »

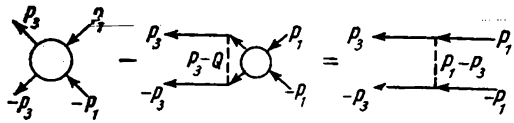



(54,2)

Come si vedrà più avanti, in tutti questi diagrammi (a partire dal secondo) il fatto che l'interazione sia piccola (per aggiunta di linee

tratteggiate) è compensata, nel senso suindicato, dalla divergenza degli integrali [1]).

Applicando a questa serie il procedimento che è stato già utilizzato per passare dalla (17,3) alla (17,4), troviamo che l'uguaglianza (54,2) è equivalente all'equazione in diagrammi




(54,3)

Agli estremi liberi e alle linee interne dei diagrammi corrispondono gli argomenti indicati nella (54,3) già tenendo conto delle condizioni (54,1):

$$P_1 = (0,\ \mathbf{p}_1), \quad P_3 = (0,\ \mathbf{p}_3), \quad Q = (i\zeta_s,\ \mathbf{q}).$$

La dipendenza spinoriale delle funzioni di Green di un gas perfetto è individuata nella forma $\mathcal{G}^{(0)}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\mathcal{G}^{(0)}$ e quella delle funzioni di vertice (senza antisimmetrizzazione!) nella forma

$$\mathcal{T}_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}\,(P_3,\ P_4;\ P_1,\ P_2) = \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}\mathcal{T}\,(P_3,\ P_4;\ P_1,\ P_2).$$

Sviluppando i diagrammi (54,3) in base alle regole indicate al § 38 e riducendo i fattori di spin, otteniamo l'equazione integrale che definisce la funzione $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T}\,(\mathbf{p}_3, -\mathbf{p}_3;\ \mathbf{p}_1, -\mathbf{p}_1) + T\sum_{s=-\infty}^{\infty}\int U\,(\mathbf{p}_3-\mathbf{q})\,\mathcal{G}^{(0)}\,(\zeta_s,\ \mathbf{q})\,\mathcal{G}^{(0)}(-\zeta_s, -\mathbf{q})\times$$

$$\times\,\mathcal{T}\,(\mathbf{q},\ -\mathbf{q};\ \mathbf{p}_1,\ -\mathbf{p}_1)\frac{d^3q}{(2\pi)^3} = U\,(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_3). \qquad (54,4)$$

Nella somma e negli integrali che vi figurano sono fondamentali i valori piccoli della variabile discreta $\zeta_s$ e i valori $\mathbf{q}$ in prossimità della superficie di Fermi (si veda più avanti). Pertanto nei fattori $U$ e $\mathcal{T}$ sotto il segno di integrale si può porre $\zeta_s = 0$ e $q = p_F$. Sulla superficie di Fermi giacciono anche i vettori $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_3$. In tal modo tutte le funzioni $\mathcal{T}$ ed $U$ nell'equazione (54,4) dipenderanno ciascuna soltanto da una variablile indipendente, cioè dall'angolo formato

---

[1]) Al diagramma (54,2) si dovrebbe associare la stessa serie di diagrammi con gli estremi 3 e 4 commutati, il che implica antisimmetrizzazione della funzione di vertice rispetto ai suoi argomenti di spin e orbitali. Tuttavia si può farne a meno per il problema posto qui della determinazione di $T_c$, poiché il polo compare contemporaneamente in ambedue queste parti della funzione di vertice.

da due dei vettori $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_3$ e $\mathbf{q}$ appartenenti tutti e tre alla superficie di Fermi.

Ora si può risolvere l'equazione (54,4) sviluppando $U$ e $\mathcal{T}$ in serie di polinomi di Legendre:

$$U(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, a_l P_l(\cos\vartheta),$$
$$\mathcal{T}(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, \mathcal{T}_l P_l(\cos\vartheta) \tag{54,5}$$

dove $\vartheta$ è uno degli angoli suindicati. Sostituendo questi sviluppi nella (54,4) e integrando sulle direzioni mediante il teorema sulla somma delle funzioni sferiche, otteniamo

$$\mathcal{T}_l(1 + a_l\Pi) = a_l, \tag{54,6}$$

dove

$$\Pi = T \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int |\mathcal{G}^{(0)}(\zeta_s, \mathbf{q})|^2 \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = \frac{T}{(2\pi)^3} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3q}{\zeta_s^2 + \eta_{\mathbf{q}}^2}; \tag{54,7}$$

la funzione $\mathcal{G}^{(0)}$ è presa dalla (37,13) e $\eta_{\mathbf{q}} = q^2/2m - \mu \approx v_F(q - p_F)$. In accordo con la formula (42,10) abbiamo

$$\Pi = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \mathrm{th}\, \frac{\eta_{\mathbf{q}}}{2T} \frac{d^3q}{\eta_{\mathbf{q}}}. \tag{54,8}$$

La divergenza dell'integrale in $dq = d\eta/v_F$ nell'estremo superiore è fittizia (si veda la nota alla pag. 197) e l'integrale deve essere tagliato in corrispondenza di un certo valore $\eta \approx \tilde{\varepsilon}_l$ [1]). Ma per $T \to 0$ l'integrale diverge logaritmicamente anche nell'estremo inferiore, cioè si comporta come $\ln(1/T)$.

Dalla (54,6) si vede che $\mathcal{T}_l$ diventa infinita (cioè $\mathcal{T}$ ha un polo) per la condizione

$$1 + a_l\Pi = 0 \tag{54,9}$$

Ma questa equazione coincide formalmente con quella che definisce il punto di transizione per accoppiamento con $l = 0$, differendo da quest'ultima soltanto per la sostituzione della « costante di legame » $g$ con $-a_l$ (cfr. la (42,11)); intendendo questa formula come l'equazione che definisce $T_c$, bisogna porre $\Delta = 0$ dopo di che $\varepsilon(p)$ coincide con $\eta_p$. Vediamo quindi che la funzione di vertice ha un polo se almeno una delle grandezze $a_l$ è negativa; inoltre la tempera-

[1]) Data la rapida convergenza della somma su $s$ nella (54,7), in essa sono effettivamente essenziali soltanto le $\zeta_s$ piccole, mentre il carattere logaritmico dell'integrale in $dq$ giustifica l'ipotesi circa la vicinanza fra $q$ e $p_F$.

tura di transizione è

$$T_c^{(l)} = \frac{\gamma}{\pi} \tilde{\varepsilon}_l \exp\left(-\frac{2}{|a_l| \nu_F}\right) \tag{54,10}$$

(si vedano le (40,4) e (39,19)). Se $a_l < 0$ per una serie di $l$ distinti, la transizione si effettua alla temperatura $T_c^{(l)}$ corrispondente a $|a_l|$ massimo [1]).

Si può mostrare che in ogni gas di Fermi (o liquido) composto di atomi elettricamente neutri le grandezze $a_l$ devono diventare in ogni caso negative per $l$ sufficientemente grandi (*L. P. Pitaevskij*, 1959). La causa è che nell'interazione fra atomi neutri esiste sempre un dominio di distanze (grandi) alle quali essa ha carattere attrattivo, la cosiddetta attrazione di Van der Waals.

In un liquido di questo tipo realmente esistente — l'isotopo liquido $He^3$ — la comparsa della superfluidità è dovuta, probabilmente, all'accoppiamento per $l = 1$ [2]). Non ci soffermeremo sulla struttura della fase superfluida e studieremo in breve la sola questione della scelta del parametro d'ordine che faccia distinguere questa fase da quella normale. Una grandezza nulla sopra il punto di transizione e diversa da zero sotto questo punto è la funzione di Green anomala $F_{\alpha\beta}(t, \mathbf{r}_1; t, \mathbf{r}_2) \equiv F_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$; come è stato detto al § 41, essa funge da funzione d'onda delle coppie legate di particelle. La sua componente di Fourier $F_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$ calcolata sulla superficie di Fermi (cioè per $\mathbf{p} = 2p_F\mathbf{n}$) è funzione della direzione $\mathbf{n}$ (e non costante, come per l'accoppiamento con $l = 0$). In virtù dell'anticommutatività degli operatori $\psi$ la funzione $F_{\alpha\beta}(\mathbf{n})$ è antisimmetrica, così come deve essere, rispetto alla permutazione delle particelle: $F_{\alpha\beta}(\mathbf{n}) = -F_{\beta\alpha}(-\mathbf{n})$.

Per accoppiamento con $l = 1$ (come con qualsiasi momento dispari) $F_{\alpha\beta}$ è una funzione dispari di $\mathbf{n}$, in modo che $F_{\alpha\beta}$ è uno spinore simmetrico. Ciò vuol dire che lo spin di una coppia vale 1, come deve essere per lo stato di due fermioni identici con $l$ dispari. Uno spinore simmetrico del secondo rango è equivalente a un vettore che indichiamo con $\mathbf{d}$. Nel caso di $l = 1$ la dipendenza di $\mathbf{d}$ da $\mathbf{n}$ deve corrispondere al polinomio di Legendre $P_1(\cos\theta)$, cioè deve essere lineare: $d_i = \psi_{ik} n_k$. A descrivere la fase superfluida è il tensore complesso del secondo rango $\psi_{ik}$ (non necessariamente simmetrico!). In realtà esistono due fasi superfluide distinte dello $He^3$ liquido che differiscono per la forma del tensore $\psi_{ik}$.

[1]) Notiamo che se tutte le $a_l$ fossero positive la transizione non esisterebbe e la formula (54,6) per $\mathcal{T}_l$ sarebbe valida per tutte le temperature fino a $T = 0$. In questo caso le $\mathcal{T}_l$ tenderebbero a zero per $T \to 0$ secondo la legge $\mathcal{T}_l \sim 1/|\ln T|$. Questo è l'annullamento per $T = 0$, menzionato nella nota alla pag. 44, della funzione $\mathcal{T}$ (e con essa della funzione di interazione delle quasiparticelle $f$) per le particelle con impulsi opposti.

[2]) La transizione avviene alla temperatura $\sim 10^{-3}$ K. Osserviamo che la piccolezza di $T_c$ garantisce l'esistenza del dominio di applicabilità della teoria del liquido di Fermi normale all'isotopo liquido $He^3$.

Capitolo VI

# ELETTRONI IN UN RETICOLO CRISTALLINO

## § 55. *Elettrone in un campo periodico*

Gli strati elettronici degli atomi in un cristallo interagiscono fortemente gli uni con gli altri per cui non si può parlare più di livelli energetici dei singoli atomi, bensì soltanto dei livelli per la totalità degli strati elettronici di tutti gli atomi del corpo nel suo insieme. Lo spettro energetico elettronico è di carattere diverso per tipi diversi di solidi. Quale passo preliminare nello studio di questi spettri è necessario, tuttavia, considerare il problema più formale del comportamento di un elettrone in un campo spaziale periodico esterno che funge da modello di reticolo cristallino. A ciò sono dedicati i §§ 55-60.

La periodicità di un campo significa che esso non cambia per traslazione parallela rappresentata da un qualsiasi vettore del tipo $\mathbf{a} = n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2 + n_3\mathbf{a}_3$ (dove $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ sono i periodi fondamentali del reticolo ed $n_1$, $n_2$, $n_3$ numeri interi):

$$U(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = U(\mathbf{r}). \tag{55,1}$$

Pertanto l'equazione di Schrödinger, che descrive il moto dell'elet trone in tale campo, è anch'essa invariante rispetto a qualsias trasformazione $\mathbf{r} \to \mathbf{r} + \mathbf{a}$. Ne segue che se $\psi(\mathbf{r})$ è una funzione d'onda di un certo stato stazionario, allora anche $\psi(\mathbf{r} + \mathbf{a})$ è una soluzione dell'equazione di Schrödinger che descrive lo stesso stato dell'elettrone. Ciò vuol dire che ambedue le funzioni devono coincidere a meno di un fattore costante: $\psi(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = \text{costante} \cdot \psi(\mathbf{r})$. È evidente che la costante deve essere uguale in modulo all'unità; in caso contrario, per ripetizione infinita della traslazione $\mathbf{a}$ (o $-\mathbf{a}$), la funzione d'onda tenderebbe all'infinito. La forma generale di una funzione con questa proprietà è la seguente:

$$\psi_{s\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} u_{s\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \tag{55,2}$$

dove $\mathbf{k}$ è un vettore costante (reale) qualsiasi e $u_{s\mathbf{k}}$ una funzione periodica

$$u_{s\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = u_{s\mathbf{k}}(\mathbf{r}). \tag{55,3}$$

Questo risultato è stato ottenuto per la prima volta da *F. Bloch* (1929); le funzioni d'onda della forma (55,2) si chiamano *funzioni di Bloch*, e spesso l'elettrone in un campo periodico è detto elettrone di Bloch.

Per **k** dato l'equazione di Schrödinger ha in generale una serie infinita di soluzioni corrispondenti alla serie infinita di valori discreti distinti dell'energia dell'elettrone $\varepsilon$ (**k**); l'indice $s$ in $\psi_{s\mathbf{k}}$ numera queste soluzioni. Lo stesso indice (numero della *zona energetica*) si deve assegnare anche ai diversi rami della funzione $\varepsilon = \varepsilon_s$ (**k**), ossia alla legge di dispersione dell'elettrone nel campo periodico. In ogni zona l'energia assume valori in un intervallo finito.

Questi intervalli, per zone diverse, sono separati da « fessure energetiche » o in parte si sovrappongono; nell'ultimo caso a ogni valore dell'energia nel dominio di due intervalli sovrapposti corrispondono valori distinti di **k** (in ciascuna zona). Geometricamente ciò significa che le superfici isoenergetiche corrispondenti a due zone sovrapposte $s$ e $s'$ si trovano in domini diversi dello spazio **k**. Formalmente la sovrapposizione delle zone significa degenerazione, vale a dire che stati distinti hanno la stessa energia, ma poiché a questi stati corrispondono valori distinti di **k**, ciò non implica nessuna singolarità nello spettro. Si deve fare distinzione fra il caso generale di sovrapposizione, e l'intersezione di due zone quando $\varepsilon_s$ (**k**) ed $\varepsilon_{s'}$ (**k**) coincidono negli stessi punti **k** (le superfici isoenergetiche si intersecano). Di solito con degenerazione è inteso proprio questo caso; l'intersezione conduce alla comparsa di certe singolarità nello spettro.

Tutte le funzioni $\psi_{s\mathbf{k}}$ con $s$ o **k** distinti sono, ovviamente, mutuamente ortogonali. In particolare, dall'ortogonalità di $\psi_{s\mathbf{k}}$ con $s$ distinti e **k** uguali segue l'ortogonalità delle funzioni $u_{s\mathbf{k}}$. In questo caso, essendo queste ultime periodiche, è sufficiente integrare sul volume $v$ di una cella elementare del reticolo; con una normalizzazione appropriata si ha

$$\int u^*_{s'\mathbf{k}} u_{s\mathbf{k}}\, dv = \delta_{ss'}. \tag{55,4}$$

Il significato del vettore **k** sta nel determinare l'andamento della funzione d'onda per traslazioni: la trasformazione $\mathbf{r} \to \mathbf{r} + \mathbf{a}$ la moltiplica per $e^{i\mathbf{ka}}$:

$$\psi_{s\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = e^{i\mathbf{ka}}\psi(\mathbf{r}). \tag{55,5}$$

Ne consegue immediatamente che la grandezza **k**, per sua stessa definizione, è non univoca: i valori che differiscono per un qualunque vettore **b** del reticolo inverso conducono al medesimo andamento della funzione d'onda (il fattore $\exp\{i(\mathbf{k} + \mathbf{b})\mathbf{a}\} = \exp(i\,\mathbf{ka})$). In altre parole, questi valori di **k** sono fisicamente equivalenti e corrispondono a un medesimo stato dell'elettrone, cioè a una stessa

funzione d'onda. Si può dire che le funzioni $\psi_{s\mathbf{k}}$ sono periodiche (nel reticolo inverso) rispetto all'indice $\mathbf{k}$:

$$\psi_{s,\,\mathbf{k}+\mathbf{b}}(\mathbf{r}) = \psi_{s\mathbf{k}}(\mathbf{r}). \tag{55,6}$$

L'energia è anch'essa periodica:

$$\varepsilon_s(\mathbf{k}+\mathbf{b}) = \varepsilon_s(\mathbf{k}). \tag{55,7}$$

Le funzioni (55,2) rivelano un'analogia con le funzioni d'onda dell'elettrone libero, ossia con le onde piane $\psi = \text{costante}\cdot\exp(i\mathbf{pr}/\hbar)$, dove il vettore costante $\hbar\mathbf{k}$ funge da impulso che si conserva. Siamo giunti di nuovo (come nel caso del fonone nel V, § 71) al concetto di *quasi-impulso* dell'elettrone in un campo periodico. Sottolineiamo che in questo caso non esiste in generale un impulso che si conserva effettivamente, poiché la legge di conservazione dell'impulso nel campo esterno non è verificata. Tuttavia è sorprendente che in un campo periodico l'elettrone sia caratterizzato cionondimeno da un vettore costante.

Nello stato stazionario di quasi-impulso dato $\hbar\mathbf{k}$, il vero impulso può avere, con probabilità diverse, un numero infinito di valori della forma $\hbar(\mathbf{k}+\mathbf{b})$. Ciò deriva dal fatto che lo sviluppo di una funzione spazialmente periodica in serie di Fourier contiene termini della forma $e^{i\mathbf{br}}$,

$$u_{s\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{b}} a_{s,\,\mathbf{k}+\mathbf{b}} e^{i\mathbf{br}},$$

e pertanto lo sviluppo della funzione d'onda (55,2) in onde piane è

$$\psi_{s\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{b}} a_{s,\,\mathbf{k}+\mathbf{b}} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{b})\mathbf{r}}. \tag{55,8}$$

Il fatto che i coefficienti dello sviluppo dipendano unicamente dalle somme $\mathbf{k}+\mathbf{b}$ esprime la proprietà di periodicità nel reticolo inverso (55,6). Sottolineiamo che questo fatto, così come la proprietà (55,6) non è una condizione supplementare imposta alla funzione d'onda, bensì conseguenza automatica della periodicità del campo $U(\mathbf{r})$.

Tutti i valori fisicamente distinti del vettore $\mathbf{k}$ appartengono a una cella elementare del reticolo inverso. Il « volume » di questa cella è $(2\pi)^3/v$, essendo $v$ il volume della cella elementare del reticolo cristallino stesso. D'altra parte, il volume dello spazio $\mathbf{k}/2\pi$ determina il numero di stati che gli corrispondono (riferiti all'unità di volume del corpo). In tal modo, il numero di questi stati compresi in ciascuna zona energetica è pari a $1/v$, cioè al numero di celle elementari nell'unità di volume del cristallo.

Oltre alla periodicità nello spazio $\mathbf{k}$ le funzioni $\varepsilon_s(\mathbf{k})$ godono anche di simmetria rispetto alle rotazioni e riflessioni, corrispondenti alla simmetria delle direzioni (alla classe cristallina) del

reticolo. Inoltre, indipendentemente dall'esistenza o meno del centro di simmetria in una data classe cristallina, si ha sempre

$$\varepsilon_s(-\mathbf{k}) = \varepsilon_s(\mathbf{k}). \tag{55,9}$$

Questa proprietà è conseguenza della simmetria rispetto all'inversione del tempo. Infatti, in virtù di questa simmetria, se $\psi_{s\mathbf{k}}$ è la funzione d'onda dell'elettrone in uno stato stazionario, allora la sua complessa coniugata $\psi^*_{s\mathbf{k}}$ descrive anch'essa uno stato con la stessa energia. Ma la $\psi^*_{s\mathbf{k}}$ per traslazioni si moltiplica per $e^{-i\mathbf{ka}}$, vale a dire che le corrisponde il vettore $-\mathbf{k}$ [1]).

Consideriamo in seguito due elettroni in un campo periodico. Supponendoli come un unico sistema, avente $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ quale funzione d'onda, troviamo che per traslazione parallela questa funzione deve essere moltiplicata per un fattore della forma $e^{i\mathbf{ka}}$, dove $\mathbf{k}$ si può chiamare quasi-impulso del sistema. D'altra parte, a grandi distanze fra gli elettroni la funzione $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ si riduce al prodotto delle funzioni d'onda dei singoli elettroni e per traslazione si moltiplica per $e^{i\mathbf{k}_1\mathbf{a}}\, e^{i\mathbf{k}_2\mathbf{a}}$. La condizione di coincidenza di ambedue le forme di questo fattore implica che

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{b}. \tag{55,10}$$

Ne segue, in particolare, che durante la collisione fra due elettroni in moto in un campo periodico la somma dei loro quasi-impulsi si conserva a meno di un vettore del reticolo inverso:

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2 + \mathbf{b}. \tag{55,11}$$

L'ulteriore analogia fra quasi-impulso e vero impulso deriva dalla definizione di velocità media dell'elettrone. Il suo calcolo richiede che sia determinato l'operatore velocità $\hat{\mathbf{v}} = \dot{\hat{\mathbf{r}}}$ nella rappresentazione $\mathbf{k}$. Gli operatori in questa rappresentazione agiscono sui coefficienti $c_{s\mathbf{k}}$ dello sviluppo di una funzione d'onda arbitraria in autofunzioni $\psi_{s\mathbf{k}}$:

$$\psi = \sum_s \int c_{s\mathbf{k}} \psi_{s\mathbf{k}} d^3k. \tag{55,12}$$

Troviamo dapprima l'operatore $\hat{\mathbf{r}}$. Abbiamo l'identità

$$\mathbf{r}\psi = \sum_s \int c_{s\mathbf{k}} \mathbf{r} \psi_{s\mathbf{k}} d^3k = \sum_s \int c_{s\mathbf{k}} \left( -i \frac{\partial \psi_{s\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} + i e^{i\mathbf{kr}} \frac{\partial u_{s\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} \right) d^3k.$$

---

[1]) Quando le zone si sovrappongono, da queste considerazioni risulta soltanto, a rigore, che $\varepsilon_s(-\mathbf{k}) = \varepsilon_{s'}(\mathbf{k})$, dove $s$ e $s'$ sono i numeri di certe zone. Tuttavia, mediante una scelta appropriata dei numeri dei rami distinti della funzione $\varepsilon(\mathbf{k})$, si può ottenere che l'uguaglianza (55,9) sia verificata.

Nel primo termine integriamo per parti e nel secondo sviluppiamo la funzione $\partial u_{s\mathbf{k}}/\partial \mathbf{k}$ (periodica come la funzione stessa $u_{s\mathbf{k}}$) nel sistema di funzioni mutuamente ortogonali $u_{s\mathbf{k}}$ con lo stesso $\mathbf{k}$:

$$\frac{\partial u_{s\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} = -i \sum_{s'} \langle s\mathbf{k} \mid \Omega \mid s'\mathbf{k} \rangle u_{s'\mathbf{k}}, \tag{55,13}$$

dove $\langle s\mathbf{k} \mid \Omega \mid s'\mathbf{k} \rangle$ sono coefficienti costanti. Allora otteniamo

$$\mathbf{r}\psi = \sum_s \int i\psi_{s\mathbf{k}} \frac{\partial c_{s\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} d^3k + \sum_{ss'} \int c_{s\mathbf{k}} \langle s\mathbf{k} \mid \Omega \mid s'\mathbf{k} \rangle \psi_{s'\mathbf{k}} d^3k =$$

$$= \sum_s \int \left\{ i \frac{\partial c_{s\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} + \sum_{s'} \langle s'\mathbf{k} \mid \Omega \mid s\mathbf{k} \rangle c_{s'\mathbf{k}} \right\} \psi_{s\mathbf{k}} d^3k.$$

D'altra parte, per definizione dell'operatore $\hat{\mathbf{r}}$, deve essere

$$\mathbf{r}\psi = \sum_s \int (\hat{\mathbf{r}} c_{s\mathbf{k}}) \psi_{s\mathbf{k}} d^3k.$$

Confrontando con l'espressione ottenuta troviamo che

$$\hat{\mathbf{r}} = i \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} + \hat{\Omega}, \tag{55,14}$$

dove l'operatore (hermitiano) $\hat{\Omega}$ è dato dalla sua matrice $\langle s'\mathbf{k} \mid \Omega \mid s\mathbf{k} \rangle$. È essenziale che questa matrice sia diagonale rispetto all'indice $\mathbf{k}$, e perciò l'operatore $\hat{\Omega}$ è commutativo con l'operatore $\hat{\mathbf{k}} \equiv \mathbf{k}$.

L'operatore velocità si ottiene, in base a regole generali, mediante commutazione dell'operatore $\hat{\mathbf{r}}$ con l'operatore hamiltoniano dell'elettrone. Nella rappresentazione $\mathbf{k}$ l'operatore hamiltoniano $\hat{H}$ è una matrice diagonale rispetto a $\mathbf{k}$ e al numero di zone $s$ e con elementi $\varepsilon_s(\mathbf{k})$ [1]). Quanto all'operatore $\partial/\partial\mathbf{k}$ agente sulla sola variabile $\mathbf{k}$, esso è diagonale nei numeri $s$. Pertanto nell'espressione

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{i}{\hbar}(\hat{H}\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}\hat{H}) = -\frac{1}{\hbar}\left(\hat{H}\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}}\hat{H}\right) + \dot{\hat{\Omega}}$$

il primo termine è una matrice diagonale di elementi

$$-\frac{1}{\hbar}\left(\varepsilon_s(\mathbf{k})\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}}\varepsilon_s(\mathbf{k})\right) = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial \varepsilon_s(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}}.$$

---

[1]) Più precisamente, si deve parlare di rappresentazione $\mathbf{k}s$. Ricordiamo che le funzioni d'onda in questa rappresentazione, cioè le $c_{s\mathbf{k}}$, non sono completamente arbitrarie in quanto devono essere periodiche in $\mathbf{k}$.

Gli elementi di matrice di $\dot{\Omega}$ sono legati a quelli di $\Omega$ dalla relazione

$$\langle s\mathbf{k} \mid \dot{\Omega} \mid s'\mathbf{k}\rangle = \frac{i}{\hbar}[\varepsilon_s(\mathbf{k}) - \varepsilon_{s'}(\mathbf{k})]\langle s\mathbf{k} \mid \Omega \mid s'\mathbf{k}\rangle;$$

questa espressione si annulla per $s = s'$, vale a dire che $\dot{\Omega}$ non ha elementi diagonali rispetto al numero di zona. Quindi, troviamo infine che gli elementi matriciali della velocità dell'elettrone sono

$$\langle s\mathbf{k} \mid \mathbf{v} \mid s\mathbf{k}\rangle = \frac{\partial\varepsilon_s(\mathbf{k})}{\hbar\,\partial\mathbf{k}}, \quad \langle s\mathbf{k} \mid \mathbf{v} \mid s'\mathbf{k}\rangle = \langle s\mathbf{k} \mid \dot{\Omega} \mid s'\mathbf{k}\rangle \quad (s \neq s'). \tag{55,15}$$

Gli elementi diagonali di questa matrice rappresentano le medie della velocità negli stati corrispondenti. Quindi queste medie, come funzioni del quasi-impulso, sono date dall'espressione

$$\bar{\mathbf{v}}_s = \frac{\partial\varepsilon_s(\mathbf{k})}{\hbar\,\partial\mathbf{k}} \tag{55,16}$$

che è completamente analoga alla relazione classica ordinaria.

Finora abbiamo ragionato a prescindere dall'esistenza dello spin negli elettroni. Trascurando gli effetti relativistici (interazione spin-orbitale) e tenendo conto dello spin, ciò implica la doppia degenerazione di ciascun livello energetico, con valore dato del quasi-impulso $\mathbf{k}$, nei due valori della proiezione dello spin su una direzione fissata nello spazio. Se invece si tiene conto dell'interazione spin-orbitale, la situazione è diversa a seconda che il reticolo cristallino abbia o meno centro d'inversione.

L'interazione spin-orbitale per l'elettrone in un campo periodico è descritta dall'operatore

$$\hat{H}_{sl} = \frac{i\hbar^2}{4m^2c^2}[\sigma\nabla U]\,\nabla, \tag{55,17}$$

dove $\sigma$ è la matrice di Pauli (si veda IV, § 33). Le funzioni d'onda soggette all'azione di questo operatore sono spinori di primo rango $\psi_{s\mathbf{k}\alpha}$, in cui $\alpha$ è un indice spinoriale. Secondo il teorema di Cramers (si veda III, § 60) riferentesi a qualsiasi campo elettrico (compreso quello periodico), gli spinori complessi coniugati $\psi_{s\mathbf{k}\alpha}$ e $\psi^*_{s\mathbf{k}\alpha}$ descrivono sempre due stati distinti con la stessa energia. Poiché, al tempo stesso, la funzione $\psi^*_{s\mathbf{k}\alpha}$ corrisponde al quasi-impulso $-\mathbf{k}$, arriviamo di nuovo (ma questa volta tenendo già conto dell'interazione spin-orbitale) a una relazione della forma (55,9):

$$\varepsilon_{s\sigma}(-\mathbf{k}) = \varepsilon_{s\sigma^*}(\mathbf{k}), \tag{55,18}$$

dove gli indici $\sigma$ e $\sigma'$ distinguono due stati di spin diversi (invertiti nel tempo) [1]).

L'uguaglianza (55,18) non significa, ovviamente, degenerazione nel senso di cui si è parlato sopra, poiché l'energia nei due membri dell'uguaglianza si riferisce a diversi valori di **k**. Ma se il reticolo gode di centro d'inversione, gli stati con **k** e —**k** hanno la stessa energia. Allora abbiamo l'uguaglianza $\varepsilon_{s\sigma}(\mathbf{k}) = \varepsilon_{s\sigma'}(\mathbf{k})$, la quale esprime di nuovo la doppia degenerazione di ciascun livello con quasi-impulso dato.

Accanto alla degenerazione dovuta alla simmetria rispetto all'inversione del tempo, per l'elettrone in un campo periodico può verificarsi anche una degenerazione dovuta alla simmetria spaziale del reticolo. A queste questioni è dedicato il § 68.

## PROBLEMI

**1.** Trovare la legge di dispersione per il moto unidimensionale dell'elettrone in un campo periodico rappresentato nella fig. 10 (*R. Kronig, W. G. Penney*, 1930).

*Soluzione.* La funzione d'onda nel dominio della buca I ($0 < x < a$) ha la forma

$$\psi = c_1 e^{i\varkappa_1 x} + c_2 e^{-i\varkappa_1 x}, \quad \varkappa_1 = \sqrt{2m\varepsilon}/\hbar, \tag{1}$$

e nel dominio della barriera II ($-b < x < 0$)

$$\psi = c_3 e^{i\varkappa_2 x} + c_4 e^{-i\varkappa_2 x}, \quad \varkappa_2 = \sqrt{2m(\varepsilon - U_0)}/\hbar. \tag{2}$$

Nel dominio della barriera successiva III la funzione d'onda deve differire dalla forma (2) soltanto per il fattore di fase $e^{ik(a+b)}$, essendo $a + b$ il periodo del campo:

$$\psi = e^{ik(a+b)}\left(c_3 e^{i\varkappa_2(x-a-b)} + c_4 e^{-i\varkappa_2(x-a-b)}\right). \tag{3}$$

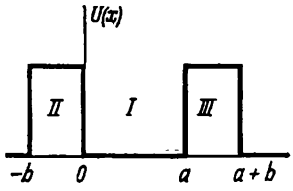


Fig. 10

Le condizioni di continuità di $\psi$ e $\psi'$ nei punti $x = 0$ e $x = a$ forniscono quattro equazioni per $c_1, \ldots, c_4$; la condizione di compatibilità di queste equazioni conduce all'equazione di dispersione

$$\cos k(a+b) = \cos\varkappa_1 a \cdot \cos\varkappa_2 b - \frac{1}{2}\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} + \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right) \operatorname{sen}\varkappa_1 a \cdot \operatorname{sen}\varkappa_2 b, \tag{4}$$

che definisce in forma implicita la dipendenza cercata $\varepsilon(k)$. Per $\varepsilon < U_0$ la grandezza $\varkappa_2$ è immaginaria e allora l'equazione si deve riscrivere nella forma

$$\cos k(a+b) = \cos\varkappa_1 a \cdot \operatorname{ch}|\varkappa_2 b| + \frac{1}{2}\left(\frac{|\varkappa_2|}{\varkappa_1} - \frac{\varkappa_1}{|\varkappa_2|}\right) \operatorname{sen}\varkappa_1 a \cdot \operatorname{sh}|\varkappa_2 b|. \tag{5}$$

---

[1]) Tenendo conto dell'interazione spin-orbitale, l'operatore di proiezione dello spin non è più commutativo con l'operatore hamiltoniano, cosicché questa proiezione non si conserva e gli stati di spin non possono essere caratterizzati, a rigore, da questo numero.

Se passiamo nella (5) al limite $U_0 \to \infty$, $b \to 0$ per $U_0 b =$ costante $= Pa$, otteniamo l'equazione di dispersione

$$\cos ka = \cos \varkappa_1 a + \frac{Pma^2}{\hbar^2} \frac{\operatorname{sen} \varkappa_1 a}{\varkappa_1 a}. \tag{6}$$

Essa permette di risolvere il problema dei livelli energetici nel campo periodico composto di picchi funzionali tipo $\delta$:

$$U(x) = aP \sum_n \delta(x - an).$$

La fig. 11 rappresenta la costruzione grafica che illustra la distribuzione delle radici dell'equazione (6). Il secondo membro dell'equazione è rappresentato qui

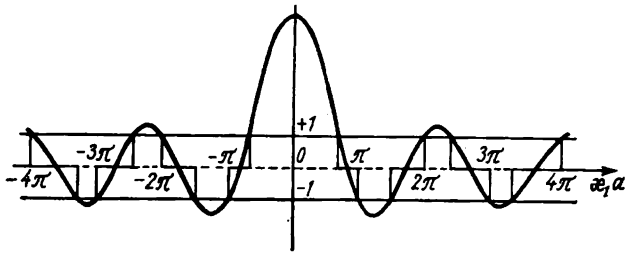



Fig. 11

come funzione di $\varkappa_1 a$; quando essa descrive i valori compresi fra $+1$ e $-1$, le radici descrivono i valori negli intervalli indicati con segmenti in grassetto sull'asse delle ascisse.

2. Trovare la legge di dispersione per il moto unidimensionale di una particella in un campo periodico debole $U(x)$.

*Soluzione.* Considerando il campo come piccola perturbazione, partiamo dall'approssimazione nulla in cui la particella compie un moto libero descritto dall'onda piana

$$\psi^{(0)}(x) = (Na)^{-1/2} e^{ikx}$$

la normalizzazione è per 1 particella sulla lunghezza $Na$; $a$ è il periodo del campo); l'energia della particella vale $\varepsilon^{(0)} = \hbar^2 k^2 / 2m$. Rappresentiamo la funzione periodica $U(x)$ sotto forma di serie di Fourier

$$U(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n e^{2\pi i n x/a}.$$

Gli elementi matriciali di questo campo rispetto alle onde piane sono diversi da zero soltanto per le transizioni fra gli stati con vettori d'onda $k$ e $k' = k + 2\pi n/a$ e in questi casi valgono $U_{k'k} = U_n$.

Nella prima approssimazione della teoria delle perturbazioni la correzione all'energia è data dall'elemento di matrice diagonale $\varepsilon^{(1)} = U_{kk} = U_0$, vale a dire da una costante indipendente da $k$, la quale non fa altro che spostare l'origine del calcolo dell'energia. Fanno eccezione, però, i livelli energetici nell'intorno dei valori $k = \pi n/a$ ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots$). In questi punti $k$ differisce solo per il segno dai valori $k' = k - 2\pi n/a$, cosicché le energie $\varepsilon^{(0)}(k)$ ed $\varepsilon^{(0)}(k')$ coincidono. Quindi, nell'intorno di questi valori gli elementi di matrice per le transizioni fra gli stati con energie vicine sono diversi da zero e per la determinazione della correzione deve essere applicato il metodo della

teoria delle perturbazioni riferito al caso di autovalori vicini (si veda III, § 79). La risposta è data dalla formula (79,4) del volume III, secondo la quale nel caso considerato abbiamo

$$\varepsilon_n(k) = \frac{1}{2}[\varepsilon^{(0)}(k) + \varepsilon^{(0)}(k - K_n)] \pm$$
$$\pm \left\{\frac{1}{4}[\varepsilon^{(0)}(k) - \varepsilon^{(0)}(k - K_n)]^2 + |U_n|^2\right\}^{1/2},$$

dove $K_n = 2\pi n/a$ e la costante additiva $U_0$ è omessa; la scelta del segno davanti alla radice è data dalla condizione che lontano dai valori $k = \pm K_n/2$ la funzione $\varepsilon(k)$ si trasformi in $\varepsilon^{(0)}(k)$: i segni positivo e negativo si riferiscono rispettivamente ai domini $|k| > |K_n/2|$ e $|k| < |K_n/2|$. Nei punti stessi

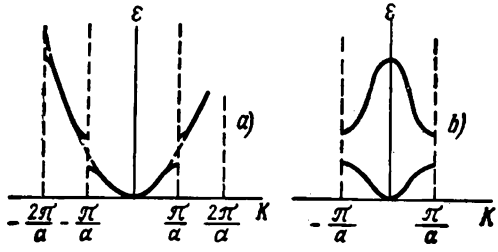



Fig. 12

$k = \pm K_n/2$ la funzione $\varepsilon(k)$ compie un salto pari a $2|U_n|$. Nella fig. 12, *a* l'energia $\varepsilon(k)$ è rappresentata come funzione della variabile $k$, che prende i valori da $-\infty$ a $+\infty$. Se invece i valori di $k$ (quasi-impulso) saranno riferiti all'intervallo $\pm\pi/a$, avremo la fig. 12, *b*, dove sono rappresentate le due prime zone energetiche.

È da sottolineare che le zone nella fig. 12 (così come nella fig. 11) non si sovrappongono. Questa è la proprietà generale del moto unidimensionale in un campo periodico. Ciascun livello energetico è doppiamente degenere (rispetto al segno di $k$), e la degenerazione di molteplicità più grande è in generale impossibile nel moto unidimensionale. Notiamo anche che nel caso unidimensionale le frontiere di ciascuna zona (minimi e massimi di $\varepsilon(k)$) corrispondono ai valori $k = 0$ e $k = \pi/a$. Il fatto è che le funzioni d'onda corrispondenti alle energie nell'intervallo vietato vanno moltiplicate, per traslazione di un periodo $a$, per un fattore reale (per cui crescono indefinitamente all'infinito). Per quanto riguarda gli intervalli di energia permessi, le funzioni d'onda sotto la detta traslazione si moltiplicano per $e^{ika}$. Quindi, questo fattore sulla frontiera fra gli intervalli vietati e permessi deve essere contemporaneamente reale e uguale in modulo all'unità da cui segue l'uguaglianza a zero o a $\pi$ di $ka$.

3. Trovare la legge di dispersione di una particella in un campo periodico unidimensionale, rappresentante una successione di buche di potenziale simmetriche, che verificano la condizione di quasi-classicità (per cui la probabilità di penetrazione della particella attraverso la barriera fra le buche è piccola).

La *soluzione* è analoga alla risoluzione del problema della scomposizione dei livelli in una buca doppia (III, § 50, problema 3). Supponiamo che $\psi_0(x)$ sia la funzione d'onda normalizzata, che descrive il moto (con un'energia $\varepsilon_0$, fig. 13) in una delle buche, cioè che si smorzi esponenzialmente da ambo i lati delle frontiere di questa buca; questa funzione è reale e può essere pari o dispari

rispetto alla variabile $x$. Ma la funzione d'onda corretta di approssimazione zero per il moto della particella in un campo periodico è la somma

$$\psi_k(x) = C \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ikan} \psi_0(x - an), \tag{7}$$

dove $C$ è una costante normalizzata (per traslazione $x \to x + a$ questa funzione è moltiplicata, come necessario, per $e^{ika}$).

Scriviamo le equazioni di Schrödinger

$$\psi_k'' + \frac{2m}{\hbar^2}[\varepsilon(k) - U(x)]\psi_k = 0, \qquad \psi_0'' + \frac{2m}{\hbar^2}[\varepsilon_0 - U(x)]\psi_0 = 0,$$

moltiplichiamo la prima per $\psi_0$ e la seconda per $\psi_k$, sottraiamo termine a termine

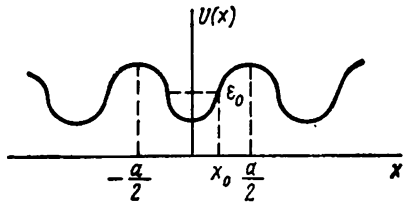



Fig. 13

e integriamo su $dx$ nei limiti da $-a/2$ ad $a/2$ (fig. 13). Osserviamo che i prodotti $\psi_0(x)\psi_0(x - an)$ con $n \neq 0$ sono ovunque trascurabilmente piccoli e perciò

$$\int_{-a/2}^{a/2} \psi_k(x)\psi_0(x)\,dx \approx C.$$

Troviamo che

$$\varepsilon(k) - \varepsilon_0 = \frac{\hbar^2}{2mC}[\psi_0'\psi_k - \psi_0\psi_k']_{-a/2}^{a/2}.$$

Per $x = a/2$ nella somma (7) si devono conservare i soli termini in $n = 0$ e $n = 1$, mentre $\psi_0(-a/2) = \pm\psi_0(a/2)$ a seconda della parità o disparità della funzione $\psi_0(x)$:

$$\psi_k(a/2) = C\psi_0(a/2)(1 \pm e^{ika}),$$
$$\psi_k'(a/2) = C\psi_0'(a/2)(1 \mp e^{ika});$$

analogamente, per $x = -a/2$, si devono conservare i soli termini in $n = 0$ e $n = 1$. Come risultato otteniamo

$$\varepsilon(k) - \varepsilon_0 = \pm\frac{2\hbar^2}{m}\psi_0\left(\frac{a}{2}\right)\psi_0'\left(\frac{a}{2}\right)\cos ka.$$

Occorre sostituirvi i valori

$$\psi_0\left(\frac{a}{2}\right) = \left[\frac{m\omega}{2\pi p(a/2)}\right]^{1/2} \exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_{x_0}^{a/2} |p(x)|\,dx\right],$$

$$\psi_0'\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{p(a/2)}{\hbar}\psi_0\left(\frac{a}{2}\right),$$

dove $\omega$ è la frequenza classica delle oscillazioni della particella nella buca; $x_0$ è il punto di rotazione corrispondente all'energia $\varepsilon_0$. Infine abbiamo

$$\varepsilon(k)-\varepsilon_0=\pm\frac{\hbar\omega}{\pi}\sqrt{D}\cos ka, \qquad D=\exp\left[-\frac{4}{\hbar}\int_{x_0}^{a/2}|p(x)|\,dx\right].$$

Così, ciascun livello energetico $\varepsilon_0$, corrispondente al moto della particella in una buca isolata, si allarga in una fascia stretta (zona) di larghezza $2\hbar\omega D^{1/2}\pi$, definita dal coefficiente di penetrabilità $D$ della barriera di potenziale che separa due buche.

## § 56. *Influenza di un campo esterno sul moto dell'elettrone in un reticolo*

Consideriamo il moto dell'elettrone allorché sul reticolo agisce il campo magnetico costante $\mathbf{H}$. Se partiamo dall'operatore hamiltoniano dell'elettrone in un campo periodico $U(\mathbf{r})$ nella rappresentazione delle coordinate

$$\hat{H}=\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}+U(\mathbf{r}) \tag{56,1}$$

(essendo $\hat{\mathbf{p}}=-i\hbar\nabla$ l'operatore del vero impulso), allora l'introduzione del campo magnetico esterno si esegue nel modo usuale seguente:

$$\hat{H}=\frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2+U(\mathbf{r}), \tag{56,2}$$

dove $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ è il potenziale vettoriale del campo. Tuttavia il problema diventa radicalmente più semplice — nel caso di un campo sufficientemente debole — mediante il passaggio alla rappresentazione dei quasi-impulsi.

La struttura zonale dello spettro energetico dell'elettrone nel reticolo ha una varietà ricchissima di forme possibili, per cui la condizone di debolezza del campo esterno può essere formulata in termini generali soltanto in modo poco corretto. Supponiamo che prima dell'applicazione del campo l'elettrone si trovi in una certa zona ($s$-esima). Indichiamo con $\varepsilon_0$ la più piccola delle grandezze energetiche che caratterizzano questa zona, ossia la sua larghezza caratteristica o la distanza dalle zone vicine (cioè le differenze $\varepsilon_s(\mathbf{k})-\varepsilon_{s'}(\mathbf{k})$ per $\mathbf{k}$ dati). Affinché il campo magnetico si possa considerare debole, in ogni caso deve essere soddisfatta la condizione

$$\hbar\omega_H \ll \varepsilon_0, \tag{56,3}$$

dove la « frequenza di Larmor » $\omega_H\sim|e|H/m^*c$ e $m^*\sim\hbar k/v$ è la massa efficace dell'elettrone [1]).

[1]) Una definizione più esatta della frequenza verrà data più avanti dalla formula (57,7). Per gli elettroni di conduzione in un metallo (si veda il § 61) i valori caratteristici $k\sim 1/a$ (essendo $a$ la costante del reticolo); ponendo anche $\varepsilon_0\sim\hbar^2/m^*a^2$ troviamo che la condizione (56,3) è equivalente alla disuguaglianza $r_H\gg a$, dove il « raggio orbitale » $r_H\sim v/\omega_H$.

In assenza di campo esterno l'operatore hamiltoniano dell'elettrone nel reticolo nella rappresentazione **k** è, come è stato detto, una matrice diagonale di elemento $\varepsilon_s(\mathbf{k})$. Se il campo esiste, l'operatore hamiltoniano conterrà anche il potenziale $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ e le sue derivate rispetto alle coordinate, ossia l'intensità **H** (e in un campo non omogeneo anche le derivate successive dell'intensità); nella rappresentazione **k** la funzione $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ viene sostituita dall'operatore $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}})$, dove $\hat{\mathbf{r}}$ è l'operatore (55,14).

Il potenziale $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ è funzione delle coordinate crescente (linearmente per un campo omogeneo). Essendo crescente, il potenziale, anche per un campo debole, non rappresenta mai una piccola perturbazione nell'operatore hamiltoniano di un sistema illimitato (elettrone nel reticolo). Questa è la ragione per cui persino un campo magnetico debole cambia notevolmente le proprietà di un sistema esteso, trasformando lo spettro continuo in quello discreto (quantizza i livelli, si veda il § 58). Quanto all'intensità di un campo debole (a differenza del potenziale), essa conduce soltanto a piccole correzioni.

Mostriamo che, trascurando queste correzioni, la dipendenza dell'operatore hamiltoniano dal potenziale si può precisare in forma generale partendo dalle sole condizioni di invarianza di gauge. Dato che stiamo considerando campi costanti, è sufficiente sfruttare l'invarianza delle equazioni rispetto alle trasformazioni seguenti, indipendenti dal tempo, del potenziale e delle funzioni d'onda:

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla f, \quad \psi \to \psi \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} f\right), \tag{56,4}$$

dove $f(\mathbf{r})$ è una funzione delle coordinate arbitraria (si veda III (111,8-9)).

In un campo debole $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ è una funzione delle coordinate variabile lentamente. Per chiarire il ruolo di questa variazione lenta, consideriamo dapprima il caso limite del potenziale costante: $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \text{costante} \equiv \mathbf{A}_0$ (è ovvio che il potenziale costante è virtuale poiché in questo caso non esiste campo, per cui si tratta di una trasformazione formale). Il passaggio da $\mathbf{A} = 0$ ad $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0$ è equivalente alla trasformazione (56,4) con $f = \mathbf{A}_0\mathbf{r}$; perciò al posto delle autofunzioni iniziali (per $\mathbf{A} = 0$)

$$\psi_{s\mathbf{k}} = u_{s\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \tag{56,5}$$

il nuovo operatore hamiltoniano avrà le autofunzioni

$$u_{s\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \exp\left\{i\left(\mathbf{k} + \frac{e}{\hbar c}\mathbf{A}_0\right)\mathbf{r}\right\}.$$

Di qui si vede che per dare al quasi-impulso il significato precedente (di una grandezza che definisce il cambiamento di fase della funzione

d'onda per traslazioni) occorre porre $\mathbf{k} + e\mathbf{A}_0/\hbar c = \mathbf{K}$; la grandezza $\mathbf{K}$ così definita si può chiamare *quasi-impulso generalizzato*. Allora le nuove autofunzioni si scrivono nella forma

$$\psi_{s\mathbf{K}} = u_{s,\,\mathbf{K}-e\mathbf{A}_0/\hbar c}(\mathbf{r})\, e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}},$$

cui corrispondono i seguenti valori dell'energia dell'elettrone: $\varepsilon_s(\mathbf{k}) = \varepsilon_s(\mathbf{K} - e\mathbf{A}_0/\hbar c)$. Possiamo ora affermare che per un potenziale $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ non costante, ma variabile lentamente nello spazio, le funzioni d'onda nell'approssimazione « nulla » (rispetto all'intensità del campo) sono

$$\psi_{s\mathbf{K}} = u_{s,\,\mathbf{K}-e\mathbf{A}(\mathbf{r})/\hbar c}\, e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}}, \tag{56,6}$$

dove grazie alla variabilità di $\mathbf{A}$ le funzioni $u$ non sono più rigorosamente periodiche) [1]. Ora le energie $\varepsilon_s(\mathbf{K} - e\mathbf{A}/\hbar c)$ si devono considerare come operatori costituenti l'operatore hamiltoniano nella rappresentazione $\mathbf{K}$. Allora, nella stessa approssimazione, con $\hat{\mathbf{r}}$ va inteso l'operatore $\hat{\mathbf{r}} = i\partial/\partial\mathbf{K}$, omettendo il secondo termine $(\hat{\Omega})$ nella definizione (55,14). Infatti, agendo sulla funzione d'onda l'operatore $i\partial/\partial\mathbf{K}$, come ordine di grandezza, la moltiplica per una « dimensione orbitale » $r_H$, che aumenta al diminuire del campo, mentre il risultato dell'azione dell'operatore $\hat{\Omega}$ sulla funzione d'onda non contiene questo fattore crescente. In questo senso l'operatore $\hat{\Omega}$ in un campo debole è piccolo rispetto ad $i\partial/\partial\mathbf{K}$. Poiché, d'altra parte, l'operatore $\partial/\partial\mathbf{K}$ è diagonale rispetto ai numeri delle zone, l'operatore hamiltoniano è anch'esso diagonale.

Arriviamo così al risultato che il moto dell'elettrone nel reticolo in un campo magnetico debole è descritto dall'operatore hamiltoniano (nella rappresentazione $\mathbf{K}$).

$$\hat{H}_s = \varepsilon_s\left(\mathbf{K} - \frac{e}{\hbar c}\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}})\right), \quad \hat{\mathbf{r}} = i\frac{\partial}{\partial\mathbf{K}} \tag{56,7}$$

(*R. Peierls*, 1933). Questa approssimazione ha quindi una completa analogia con il metodo di introduzione del campo magnetico nell'operatore hamiltoniano della particella libera nella rappresentazione degli impulsi.

---

[1]) Se sviluppiamo le (56,6) in funzioni $\psi_{s\mathbf{k}}$, lo sviluppo in generale conterrà funzioni con $s$ distinti. Sottolineiamo, però, che ciò non significa affatto transizione reale in altra zona, ma esprime soltanto la variazione della funzione d'onda sotto l'influsso del campo costante; ricordiamo in proposito che un campo costante non può in generale causare una transizione reale accompagnata da variazione dell'energia. Per precisare la situazione venutasi a creare, bisogna osservare che, sebbene il campo sia debole, la variazione della classificazione degli stati ad esso legata (comprese le corrispondenze fra il quasi-impulso e l'energia) è notevole.

L'espressione (56,7) non è ancora completamente definita in quanto non è stabilito l'ordine d'azione degli operatori non commutativi componenti del vettore $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{K} - e\hat{\mathbf{A}}/\hbar c$. Questo ordine deve essere determinato in modo tale che l'operatore hamiltoniano sia hermitiano. Si può sempre ottenerlo in teoria rappresentando la funzione periodica (nel reticolo inverso) $\varepsilon_s(\mathbf{k})$ in forma di serie di Fourier

$$\varepsilon_s(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{a}} A_{s\mathbf{a}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}} \tag{56,8}$$

(la sommatoria è estesa a tutti i vettori $\mathbf{a}$ del reticolo diretto). Dopo la sostituzione $\mathbf{k} \to \hat{\mathbf{k}}$ l'esponente di ciascun termine di questa serie conterrà un solo operatore (proiezione del vettore $\hat{\mathbf{A}}$ su $\mathbf{a}$) in modo che non c'è più bisogno di stabilire l'ordine d'azione, in quanto tutto si riduce alle potenze di questo unico operatore. Questo metodo di « hermitizzazione » non è, ovviamente, unico. È importante, tuttavia, che la differenza fra metodi diversi vada oltre i limiti dell'approssimazione considerata, poiché i commutatori degli operatori $\hat{k}_x$, $\hat{k}_y$, $\hat{k}_z$ in questa approssimazione rappresentano grandezze piccole. Così, per l'operatore di campo omogeneo abbiamo

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}[\mathbf{H}\hat{\mathbf{r}}] = \frac{i}{2}\left[\mathbf{H}\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}}\right]; \tag{56,9}$$

un calcolo diretto permette di trovare che i commutatori

$$\hat{k}_x\hat{k}_y - \hat{k}_y\hat{k}_x = i\frac{e}{\hbar c}H_z, \ \ldots \tag{56,10}$$

sono proporzionali alla piccola intensità $\mathbf{H}$.

Gli operatori $\hat{\mathbf{r}} = i\partial/\partial\mathbf{K}$ e $\hat{\mathbf{K}} \equiv \mathbf{K}$ hanno le stesse regole di commutazione delle coordinate e gli impulsi generalizzati della particella « libera » (senza reticolo). È naturale perciò che il calcolo dei commutatori degli operatori $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\mathbf{K}}$ con l'operatore hamiltoniano conduca alle equazioni

$$\hbar\dot{\hat{\mathbf{K}}} = -\frac{\partial\hat{H}}{\partial\hat{\mathbf{r}}}, \quad \dot{\hat{\mathbf{r}}} = \frac{\partial\hat{H}}{\hbar\,\partial\mathbf{K}}, \tag{56,11}$$

che hanno la forma delle equazioni di Hamilton ordinarie (per il loro calcolo si vedano le formule (16,4-5) del volume III).

Ripetiamo di nuovo che l'operatore hamiltoniano (56,7) è approssimato nel senso che in esso sono omessi tutti i termini dipendenti dall'intensità $\mathbf{H}$ e non contenenti grandi fattori, cioè dell'ordine di grandezza delle dimensioni orbitali $r_H$. In approssimazioni successive la risposta può essere presentata sotto forma di un operatore hamiltoniano efficace $\hat{H}_s(\mathbf{K} - e\hat{\mathbf{A}}/\hbar c, \mathbf{H})$, diagonale rispetto ai

numeri delle zone ma non più esprimibile con le sole funzioni $\varepsilon_s(\mathbf{k})$ [1]).

Se trascuriamo l'interazione spin-orbitale e teniamo conto dello spin dell'elettrone, ciò implica nell'operatore hamiltoniano la comparsa di un termine ordinario, che descrive l'interazione fra il momento magnetico e il campo: $-\beta\sigma\mathbf{H}$, dove $\sigma$ sono le matrici di Pauli e $\beta = |e|\hbar/2mc$ è il magnetone di Bohr. Se il cristallo ha centro d'inversione, l'interazione spin-orbitale non fa altro che cambiare il momento magnetico dell'elettrone in modo che l'interazione dello spin con il campo magnetico assuma la forma

$$-\beta\sigma_i H_k \xi_{ik}(\mathbf{k}). \tag{56,12}$$

Infatti, in questo caso l'operatore hamiltoniano deve essere invariante nei confronti delle operazioni contemporanee di inversione del tempo e di inversione. In questa trasformazione bisogna sostituire $\mathbf{H} \to -\mathbf{H}$ e $\sigma \to -\sigma$ per $\mathbf{k}$ invariato; la formula (56,12) è un'espressione generale soddisfacente alla condizione posta. Il tensore $\xi_{ik}(\mathbf{k})$ non si può calcolare, ovviamente, in forma generale.

Consideriamo infine il comportamento dell'elettrone per applicazione al reticolo di un campo elettrico debole $\mathbf{E}$. La condizione di debolezza significa che l'energia acquistata dall'elettrone nel campo a distanza $\sim a$ è piccola rispetto all'energia caratteristica $\varepsilon_0$ : $|e|Ea \ll \varepsilon_0$.

Come nel caso del campo magnetico, sono più importanti i termini contenenti una funzione delle coordinate crescente, cioè il potenziale scalare del campo elettrico $\varphi(\mathbf{r})$. La dipendenza dell'operatore hamiltoniano da $\varphi$ si può precisare di nuovo in forma generale partendo da considerazioni analoghe a quelle suindicate. Infatti, l'applicazione di un potenziale fittizio costante $\varphi = \varphi_0$ è equivalente nell'equazione di Schrödinger all'associazione all'energia di un termine costante $e\varphi_0$; tale termine viene aggiunto anche a tutti gli autovalori $\varepsilon_s(\mathbf{k})$. Se, invece, il potenziale $\varphi(\mathbf{r})$ è non costante, bensì lentamente variabile nello spazio, un termine operatoriale analogo si aggiunge all'operatore hamiltoniano efficace nella rappresentazione $\mathbf{k}$:

$$\hat{H}_s = \varepsilon_s(\mathbf{k}) + e\varphi(\hat{\mathbf{r}}). \tag{56,13}$$

---

[1]) Un esempio semplice di calcolo del termine di correzione verrà dato al § 59. Per un metodo regolare che permetta di ottenere l'operatore hamiltoniano nella forma di serie di potenze di $\mathbf{H}$, nonché per espressioni generali dei primi termini di questa serie si veda *E. I. Blount*, Phys. Rev. **126**, 1636 (1962); Solid State Physics, volume XIII, pag. 306 (1963). Notiamo che, se il cristallo ha centro d'inversione, la serie inizia dai termini dell'ordine di grandezza di $\mathbf{H}^2$ (si veda il § 59).

## § 57. *Traiettorie quasi-classiche*

Applichiamo i risultati ottenuti nel paragrafo precedente a un caso importante in cui il movimento dell'elettrone nel campo magnetico è quasi-classico. La condizione di quasi-classicità richiede, come è noto, che la variazione della lunghezza d'onda di de Broglie della particella sia piccola a distanze dell'ordine della sua grandezza. Nel dato caso questa condizione è equivalente alla disuguaglianza

$$r_H \gg \lambda, \tag{57,1}$$

vale a dire che il raggio di curvatura dell'orbita è grande rispetto alla lunghezza d'onda $\lambda \sim 1/k$ [1]).

Nel caso quasi-classico ha senso il concetto di traiettoria della particella. Essa è definita dalle equazioni del moto che si ottengono dalla (56,11) sostituendovi gli operatori con le grandezze classiche corrispondenti:

$$\hbar\dot{\mathbf{K}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{v} = \frac{\partial H}{\hbar\,\partial \mathbf{K}}, \quad H = \varepsilon\left(\mathbf{K} - \frac{e}{\hbar c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right)$$

(per brevità omettiamo l'indice $s$). Sviluppiamo queste equazioni introducendo al posto del quasi-impulso generalizzato $\mathbf{K}$ il « quasi-impulso cinetico »

$$\mathbf{k} = \mathbf{K} - \frac{e}{\hbar c}\mathbf{A}(\mathbf{r}).$$

Abbiamo

$$\frac{\hbar\, d\mathbf{k}}{dt} + \frac{e}{c}\frac{d\mathbf{A}(\mathbf{r})}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = \frac{e}{c} v_i \frac{\partial A_i}{\partial \mathbf{r}}.$$

Scrivendo qui $d\mathbf{A}/dt = (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A}$ e osservando che

$$(v_i\nabla) A_i - (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A} = [\mathbf{v}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}] = [\mathbf{v}\mathbf{H}],$$

otteniamo l'equazione del moto

$$\frac{\hbar\, d\mathbf{k}}{dt} = \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}], \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{k})}{\hbar\,\partial \mathbf{k}} \tag{57,2}$$

Quest'ultima differisce dall'equazione classica di Lorentz soltanto per una diversa forma di $\varepsilon(\mathbf{k})$: qui al posto della funzione quadratica semplice abbiamo a che fare con una funzione periodica complessa; corrispondentemente $\mathbf{v}(\mathbf{k})$ è anch'essa una funzione periodica complessa. Questa circostanza conduce, naturalmente, a un cambiamento sostanziale del carattere del moto dell'elettrone.

---

[1]) Questa condizione, in generale, è più forte della (56,3). Ma se $k \sim 1/a$ (come si ha per gli elettroni conduttori nel metallo), allora le due condizioni coincidono e di fatto sono sempre soddisfatte: per $r_H \sim c\hbar k/|e|H \sim c\hbar/a\,|e|H$ la condizione $r_H \gg a$ richiede che $H \ll c\hbar/|e|a^2 \sim 10^8$-$10^9$ e.

Consideriamo il moto dell'elettrone in un campo magnetico omogeneo. Moltiplicando per $\mathbf{v}$ l'equazione (57,2), troviamo nel modo ordinario che $\hbar \mathbf{v}\, d\mathbf{k}/dt = d\varepsilon/dt = 0$. Moltiplicando invece per $\mathbf{H}$ l'equazione (57,2), troviamo che $d\,(\mathbf{Hk})/dt = 0$. Quindi, quando l'elettrone si muove nel reticolo, così come quando l'elettrone libero si muove in un campo magnetico, abbiamo

$$\varepsilon = \text{costante}, \qquad k_z = \text{costante} \tag{57,3}$$

(l'asse $z$ coincide con la direzione del campo $\mathbf{H}$). Le uguaglianze (57,3) definiscono la traiettoria dell'elettrone nello spazio $\mathbf{k}$. Geometricamente questa traiettoria rappresenta il contorno della sezione della superficie isoenergetica $\varepsilon\,(\mathbf{k}) =$ costante con un piano perpendicolare al campo magnetico.

Le superfici isoenergetiche possono avere la forma più disparata. Esse possono contenere (in ciascuna cella del reticolo inverso) più fogli non connessi fra di loro. Questi fogli possono essere a connessione semplice o multipla, chiusi o aperti. Per precisare l'ultima distinzione è comodo considerare una superficie isoenergetica prolungata periodicamente a tutto il reticolo inverso. Allora ogni cella conterrà delle cavità identiche chiuse, mentre le superfici aperte attraversano con continuità tutto il reticolo uscendo all'infinito [1]).

Le sezioni della superficie isoenergetica sono formate dalla somma di un insieme infinito di contorni. A questi ultimi appartengono sia i contorni della sezione di fogli distinti della superficie isoenergetica nei limiti di una sola cella del reticolo inverso, sia i contorni della sezione di fogli che si ripetono in celle distinte. Se il foglio della superficie isoenergetica è chiuso, tutte le sue sezioni rappresentano anch'esse curve chiuse. Se invece il foglio è aperto, le sue sezioni possono essere sia chiuse che aperte (cioè prolungabili con continuità attraverso tutto il reticolo inverso).

La quasi-classicità del movimento significa anche una probabilità piccola di *rottura magnetica*, cioè di variazione a salto del quasi-impulso dell'elettrone con passaggio da un contorno all'altro (a questa condizione di probabilità piccola torneremo alla fine del presente paragrafo). Se questa probabilità viene trascurata, allora l'elettrone descrive un solo contorno di sezione della superficie isoenergetica.

Consideriamo in dettaglio il moto lungo una traiettoria chiusa nello spazio dei quasi-impulsi. Questo moto è, evidentemente, periodico nel tempo; determiniamone il periodo.

---

[1]) A scanso di equivoci sottolineiamo che non sempre è possibile scegliere la cella del reticolo inverso in modo tale che tutti i volumi chiusi e sostanzialmente distinti (cioè non periodicamente ripetibili) siano disposti all'interno della medesima cella senza essere tagliati dalle sue facce.

Proiettando l'equazione (57,2) sul piano $k_x$, $k_y$ perpendicolare al campo, otteniamo

$$\frac{dl_k}{dt} = \frac{|e|H}{c\hbar} v_\perp, \quad v_\perp = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

dove $dl_k = \sqrt{dk_x^2 + dk_y^2}$ è l'elemento di lunghezza dell'orbita $\mathbf{k}$. Di qui abbiamo

$$t = \frac{c\hbar}{|e|H} \int \frac{dl_k}{v_\perp}.$$

Se la traiettoria è chiusa, il periodo del moto viene dato dall'integrale

$$T = \frac{c\hbar}{|e|H} \oint \frac{dl_k}{v_\perp}, \tag{57,4}$$

esteso a tutto il suo contorno. Si può dare a questa espressione una forma più evidente nel seguente modo.

Introduciamo l'area $S(\varepsilon, k_z)$ della sezione della superficie isoenergetica $\varepsilon$ = costante con il piano $k_z$ = costante. In questo piano la larghezza dell'anello fra i contorni $\varepsilon$ = costante ed $\varepsilon + d\varepsilon$ = costante vale in ogni suo punto

$$\frac{d\varepsilon}{|\partial\varepsilon/\partial \mathbf{k}_\perp|} = \frac{d\varepsilon}{\hbar v_\perp},$$

in modo che l'area di questo anello è

$$dS = d\varepsilon \oint \frac{dl_k}{\hbar v_\perp}.$$

Si vede di qui che l'integrale (57,4) non rappresenta altro che la derivata parziale $\partial S/\partial\varepsilon$. Quindi, il periodo del moto è

$$T = \frac{c\hbar^2}{|e|H} \frac{\partial S(\varepsilon, k_z)}{\partial\varepsilon} \tag{57,5}$$

(*W. Shockley*, 1950). Qui è naturale introdurre la grandezza

$$m^* = \frac{\hbar^2}{2\pi} \frac{\partial S}{\partial\varepsilon}, \tag{57,6}$$

detta *massa di ciclotrone* dell'elettrone nel reticolo. La frequenza di rotazione dell'elettrone sull'orbita si esprime mediante questa grandezza in base alla formula

$$\omega_H = |e| H/m^* c, \tag{57,7}$$

che differisce dalla nota formula della frequenza di Larmor degli elettroni liberi per la sostituzione della loro massa $m$ con $m^*$ [1]).

[1]) Per gli elettroni liberi la superficie isoenergetica è una sfera $\varepsilon = \hbar^2 k^2/2m$. Le sue sezioni sono dei cerchi di area $S = \pi(2m\varepsilon\hbar^{-2} - k_z^2)$ in modo che la derivata $\partial S/\partial\varepsilon = 2\pi m/\hbar^2$ e $m^* = m$.

Sottolineiamo, tuttavia, che nel caso degli elettroni nel reticolo la massa di ciclotrone non è una grandezza costante, bensì una funzione di $\varepsilon$ e $k_z$ in modo che essa è diversa per elettroni diversi. Osserviamo anche che questa grandezza può essere sia positiva che negativa; nel primo caso l'elettrone descrive l'orbita come una particella carica negativamente, nel secondo come una particella carica positivamente (buca). In relazione a ciò si parla di *traiettorie elettroniche e di buche*, rispettivamente.

Finora abbiamo parlato della traiettoria descritta dall'elettrone nello spazio **k**. È facile vedere, però, che esiste un legame stretto fra le traiettorie descritte nello spazio dei quasi-impulsi e in quello normale. L'equazione (57,2) riscritta nella forma

$$\hbar\, d\mathbf{k} = -\frac{|e|}{c}\,[d\mathbf{r}\mathbf{H}]$$

dà dopo integrazione (e una scelta appropriata dell'origine delle coordinate **r** e dei quasi-impulsi **k**)

$$\hbar\mathbf{k} = -\frac{|e|}{c}\,[\mathbf{r}\mathbf{H}]. \qquad (57,8)$$

Si vede di qui che la proiezione $xy$ nello spazio normale ripete di fatto la traiettoria **k**, differenziandosi da essa per la sola orientazione e la scala: la prima si ottiene dalla seconda con la sostituzione

$$k_x \to -\frac{|e|H}{\hbar c}\,y, \quad k_y \to \frac{|e|H}{\hbar c}\,x.$$

Inoltre, nello spazio normale si produce un moto lungo l'asse $z$ a velocità $v_z = \partial\varepsilon/\hbar\partial k_z$. Se la traiettoria nello spazio **k** è chiusa, nello spazio normale essa rappresenta una spirale con l'asse coincidente con la direzione del campo. Se invece la traiettoria è aperta, sarà aperta anche la proiezione della traiettoria sul piano $xy$ nello spazio normale, vale a dire che il moto in questo piano è infinito.

Soffermiamoci ancora sul moto quasi-classico dell'elettrone quando al reticolo è applicato un campo elettrico costante **E**. Dall'equazione quasi-classica $\hbar\mathbf{k} = e\mathbf{E}$ risulta che

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \frac{e\mathbf{E}}{\hbar}\,t. \qquad (57,9)$$

Dalla legge di conservazione dell'energia abbiamo

$$\varepsilon(\mathbf{k}) - e\mathbf{E}\mathbf{r} = \text{costante}. \qquad (57,10)$$

Ma l'energia $\varepsilon(\mathbf{k})$ assume valori nell'intervallo finito $\Delta\varepsilon$ (larghezza della zona); pertanto dalla (57,10) segue che il moto dell'elettrone nel campo elettrico omogeneo è finito lungo il campo: l'elettrone compie in questa direzione delle oscillazioni di ampiezza $\Delta\varepsilon/|e|E$. Se il campo è parallelo a un periodo **b** del reticolo inverso, il moto

è periodico di frequenza $\omega = 2\pi \mid e \mid E/\hbar b$; per $b \sim 1/a$ abbiamo $\hbar\omega_E \sim \mid e \mid Ea$. Nel caso generale di direzione arbitraria del campo il moto è quasi-periodico.

Infine, soffermiamoci sulla condizione di poter trascurare il suddetto fenomeno di rottura magnetica. La probabilità di passaggio da una traiettoria (nello spazio **k**) a un'altra è naturalmente grande se le traiettorie si avvicinano anomalmente l'una all'altra. Questa situazione si crea nel caso in cui la traiettoria è vicina a una traiettoria con autointersezione, o se la traiettoria passa in prossimità dell'intersezione di due fogli della superficie isoenergetica (cioè in prossimità di un punto di degenerazione). Un quadro tipico delle due traiettorie in questi casi è rappresentato nella fig. 14; il distacco $\delta k$ fra le traiettorie è piccolo rispetto alle dimensioni caratteristiche delle orbite complessive e il raggio di curvatura $R_k$ delle traiettorie nell'intorno dei punti del loro avvicinamento massimo coincide in generale, in ordine di grandezza, con $\delta k$. Il passaggio da un'orbita all'altra si effettua con un fenomeno di tunnel quantistico. La probabilità di questo processo è piccola (esponenzialmente) se $\delta k$ è grande rispetto alla distanza $\Delta k_x$, alla quale la funzione d'onda si smorza nel dominio fra le traiettorie inaccessibile dal punto di vista classico.

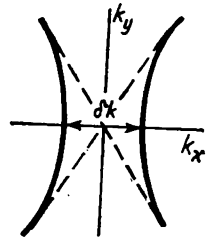


Fig. 14

Si può stimare $\Delta k_x$ sfruttando l'analogia fra il moto dell'elettrone in un campo magnetico e il moto unidimensionale in un campo potenziale $U(x)$. Questa analogia è basata sul fatto che, secondo la (56,10), gli operatori $\hat{q} \equiv \hat{k}_x \hbar c / \mid e \mid H$ e $\hat{p} \equiv \hbar \hat{k}_y$ soddisfano una regola di commutazione che coincide con la regola di commutazione della coordinata e dell'impulso. Nell'intorno dei punti di avvicinamento massimo le traiettorie sono di forma parabolica, cui è analoga la traiettoria di fase parabolica $(x, p)$ del moto unidimensionale in un campo omogeneo ($U = -Fx$); l'equazione di quest'ultima traiettoria è $p^2/2m = Fx$ (se l'origine della coordinata $x$ coincide con il punto d'arresto). Nell'ultimo caso la funzione d'onda si annulla oltre il punto di inversione alla distanza $\Delta x \sim (\hbar^2/mF)^{1/3}$ (si veda III, § 24); introducendo il raggio di curvatura $R \sim (d^2x/dp^2)^{-1} \sim mF$ della traiettoria di fase, scriviamo $\Delta x \sim (\hbar^2/R)^{1/3}$. Per la suddetta analogia si può ottenere il $\Delta k_x$ cercato mediante la sostituzione $\Delta x \to \hbar c \Delta k_x / \mid e \mid H$, $R \to R_k \hbar \mid e \mid H/c$. Troviamo così che $\Delta k_x \sim (\mid e \mid H/\hbar c)^{2/3} (\delta k)^{-1/3}$, e la condizione $\Delta k_x \ll \delta k$ diventa

$$\mid e \mid H/\hbar c \ll (\delta k)^2. \qquad (57,11)$$

## § 58. *Livelli energetici quasi-classici*

Abbiamo visto che al moto classico dell'elettrone in un reticolo, al quale è applicato un campo magnetico, quando l'elettrone descrive una traiettoria chiusa nello spazio **k**, corrisponde nello spazio normale un moto finito nel piano perpendicolare alla direzione del campo **H**. Passando alla meccanica quantistica ciò implica la comparsa di livelli energetici discreti per ogni valore fissato del quasi-impulso longitudinale $k_z$. Questi livelli vengono determinati dalle regole generali di quantizzazione quasi-classica.

Consideriamo il potenziale vettoriale di un campo magnetico omogeneo (diretto lungo l'asse $z$) nella forma $A_x = -Hy$, $A_y = A_z = 0$. Allora le componenti del quasi-impulso generalizzato sono

$$K_x = k_x + \frac{|e|}{c\hbar} Hy, \quad K_y = k_y, \quad K_z = k_z. \tag{58,1}$$

La coordinata $x$ è una variabile ciclica e perciò la componente $x$ del quasi-impulso generalizzato si conserva:

$$K_x = k_x + \frac{|e|}{c\hbar} Hy = \text{costante}. \tag{58,2}$$

In accordo con la regola di quantizzazione di Bohr-Sommerfeld (si veda III, § 48) scriviamo la condizione

$$\frac{1}{2\pi} \left| \oint K_y \, dy \right| = n, \tag{58,3}$$

dove l'integrazione è estesa al periodo del moto e $n$ è un intero positivo supposto grande [1]). Sostituendovi, in accordo con le (58,1-2), $K_y = k_y$ e $dy = -(c\hbar/|e|H)\, dk_x$, otteniamo

$$\frac{c\hbar}{2\pi |e| H} \left| \oint k_y \, dk_x \right| = n, \tag{58,4}$$

dove ora l'integrale è calcolato sulla traiettoria chiusa nello spazio **k**. Questo integrale non è altro che l'area delimitata dalla traiettoria chiusa, cioè l'area $S(\varepsilon, k_z)$, introdotta nel paragrafo precedente, della sezione della superficie isoenergetica con il piano $k_z$ = costante.

---

[1]) Per il moto in un campo magnetico omogeneo, un invariante adiabatico indipendente dal potenziale vettoriale è rappresentato dall'integrale $\frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{K}_t \, d\mathbf{r}$, dove $\mathbf{K}_t$ è la proiezione del quasi-impulso generalizzato sul piano perpendicolare al campo (cfr. II, § 21). Per **A** scelto come nel testo l'integrale $\oint K_x \, dx = K_x \oint dx = 0$ in modo che l'invariante adiabatico coincide con l'integrale che figura nell'espressione (58,3).

Infine, troviamo che

$$S(\varepsilon, k_z) = 2\pi \frac{|e|H}{c\hbar} n \tag{58,5}$$

(*I. M. Lifšits*, 1951; *L. Onsager*, 1952). È questa condizione a determinare in forma implicita i livelli energetici $\varepsilon_n(k_z)$. Quindi, la zona energetica (il cui numero $s$ omettiamo per brevità) si scinde in una serie discreta di *sottozone di Landau*, ognuna delle quali rappresenta uno strato di livelli energetici che differiscono per il valore della variabile continua $k_z$.

Come è noto, la condizione di quantizzazione quasi-classica può essere precisata introducendo una correzione, che si riduce a un numero dell'ordine di grandezza dell'unità da aggiungere al numero quantico $n$ grande. La determinazione di questa correzione richiede che il moto sia considerato in prossimità dei « punti d'arresto » che delimitano il dominio di integrazione nell'espressione (58,3).

La dipendenza di $K_y = k_y$ da $y$ sulla traiettoria dell'elettrone è data dall'equazione

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \varepsilon\left(K_x - \frac{|e|H}{c\hbar} y,\ k_y,\ k_z\right) = \text{costante} \tag{58,6}$$

per $k_z$ dato e per $K_x$ = costante; il punto d'arresto $y = y_0$ è determinato dalla condizione che la velocità $v_y = \partial\varepsilon/\hbar\,\partial k_y$ si annulli. Nell'intorno di questo punto lo sviluppo dell'equazione (58,6) in potenze di $y - y_0$ dà

$$-\frac{|e|H}{c\hbar}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial k_x}\right)_0 (y - y_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial k_y^2}\right)_0 (k_y - k_{y0})^2 = 0,$$

dove $k_{y0} = k_y(y_0)$. Di qui si vede che l'avvicinarsi al punto d'arresto avviene secondo la legge

$$k_y - k_{y0} = \pm A\sqrt{y - y_0}$$

(per fissare le idee supponiamo che il dominio classicamente inaccessibile si trovi per $y < y_0$). Ma questa è la stessa legge cui si riferisce la deduzione ordinaria della correzione nella quantizzazione quasi-classica (si veda III, §§ 47, 48). La regola precisata (58,5) ha quindi la forma

$$S(\varepsilon, k_z) = 2\pi \frac{|e|H}{c\hbar}\left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{58,7}$$

Come risulta con chiarezza dalla deduzione (basata sullo sviluppo della funzione (58,6)), affinché la regola di quantizzazione precisata sia valida è necessario che la traiettoria passi sufficientemente lontano dai punti singolari della funzione $\varepsilon(\mathbf{k})$ (così come dai punti complessi della ramificazione). È necessario anche che la condizione di quasi-classicità non sia violata in nessun punto in prossimità della

traiettoria (in particolare, che la proiezione $x$, $y$ della velocità $\partial\varepsilon/\partial\mathbf{k}$ non si annulli) [1]. Infine, si deve tener conto del carattere approssimativo dell'operatore hamiltoniano stesso (56,7) sul quale sono basate tutte le conclusioni. Se il reticolo ha centro d'inversione, le correzioni all'operatore hamiltoniano sono quadratiche rispetto all'intensità del campo e non incidono sulla condizione (58,7). Ma se il centro d'inversione non esiste le correzioni all'operatore hamiltoniano saranno lineari rispetto a H; in questo caso il termine correttivo 1/2 nella (58,7) perde senso poiché un errore dello stesso ordine dà anche l'approssimazione dell'operatore hamiltoniano [2].

L'intervallo $\Delta\varepsilon$ fra due livelli successivi corrisponde alla variazione di uno del numero grande $n$. Esso è definito quindi dall'uguaglianza

$$\Delta S = \frac{\partial S}{\partial \varepsilon}\Delta\varepsilon = \frac{2\pi\,|\,e\,|\,H}{\hbar c}. \tag{58,8}$$

Introducendo, secondo la (57,7), la frequenza classica del moto periodico $\omega_H$, otteniamo

$$\Delta\varepsilon = \hbar\omega_H. \tag{58,9}$$

Sottolineiamo che la frequenza stessa $\omega_H$ è una funzione di $\varepsilon$ (e di $k_z$). Pertanto i livelli energetici successivi $\varepsilon_n$ (per $k_z$ dato) non sono rigorosamente equidistanti come sarebbe nel caso di elettroni liberi, dove $\omega_H$ è una grandezza costante.

L'indipendenza dei livelli energetici dalla grandezza conservativa $K_x$ significa (così come per gli elettroni liberi in un campo magnetico; si veda III, § 112) la loro degenerazione. Se supponiamo che il reticolo abbia un volume $V$ grande, ma finito, la molteplicità di questa degenerazione sarà finita. Il numero di stati nell'intervallo $dk_z$, con $n$ dato, è determinato come $V\Delta S\cdot dk_z/(2\pi)^3$, dove $\Delta S$ è l'area del piano $k_z$ = costante, compresa fra le traiettorie con numeri quantici $n$ e $n+1$. Questa area è data dall'espressione (58,8), e, quindi, per il numero di stati cercato troviamo l'espressione

$$\frac{V\,dk_z}{(2\pi)^2}\,\frac{|\,e\,|\,H}{c\hbar} \tag{58,10}$$

che è la stessa del caso degli elettroni liberi.

---

[1]) In prossimità dei punti di avvicinamento anomalo di due traiettorie queste condizioni coincidono con la richiesta che la probabilità di rottura magnetica sia piccola.

[2]) Per gli elettroni liberi (si veda la nota alla pag. 291) la condizione (58,7) dà

$$\varepsilon = \hbar\omega_H\left(n+\frac{1}{2}\right)+\hbar^2k_z^2/2m, \qquad \omega_H = |\,e\,|\,H/mc$$

in accordo con la nota espressione di Landau per l'elettrone libero in un campo magnetico (III, § 112).

È evidente che la degenerazione dei livelli in un campo magnetico è dovuta all'indipendenza dell'energia dalla posizione nello spazio del « centro dell'orbita di Larmor » dell'elettrone. Per l'elettrone libero questa degenerazione è precisa. Per quanto riguarda l'elettrone in un reticolo, essa può avere soltanto un carattere approssimato: in presenza di campo elettrico non omogeneo (periodico) le diverse posizioni del « centro orbitale » nella cella elementare del reticolo non sono più equivalenti. Questa circostanza deve implicare una certa separazione dei livelli di Landau.

Se si tiene conto dello spin dell'elettrone, ciò conduce alla separazione di ciascun livello in due componenti; se il legame spin-orbitale è trascurato, queste componenti sono separate (come per l'elettrone libero) dall'intervallo costante $2\beta H$, dove $\beta$ è il magnetone di Bohr:

$$\varepsilon_{n\sigma}(k_z) = \varepsilon_n(k_z) + \sigma\beta H, \quad \sigma = \pm 1. \tag{58,11}$$

Questa situazione si conserva anche se si tiene conto dell'interazione spin-orbitale allorché il cristallo gode di centro d'inversione. In questo caso gli stati elettronici in assenza di campo sono degeneri nello spin, e il campo magnetico elimina questa degenerazione. Come risultato si ottiene la stessa formula (58,11), nella quale $\beta$ è sostituito con $\beta\xi_n(k_z)$, dove $\xi_n(k_z)$ caratterizza la variazione del momento magnetico dell'elettrone.

## § 59. *Tensore delle masse efficaci dell'elettrone nel reticolo*

Consideriamo il punto $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ nello spazio $\mathbf{k}$ in cui l'energia dell'elettrone $\varepsilon_s(\mathbf{k})$ ha un estremo; tali sono in particolare i punti corrispondenti all'estremo superiore e inferiore della zona. Se in questo punto non si ha degenerazione (ad eccezione della sola degenerazione possibile di Kramers per lo spin, si veda la fine del § 55), allora nel suo intorno la funzione $\varepsilon_s(\mathbf{k})$ può essere regolarmente sviluppata in potenze della differenza $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$. I primi termini di questo sviluppo sono quadratici:

$$\varepsilon_s(\mathbf{k}) = \varepsilon_s(\mathbf{k}_0) + \frac{\hbar^2}{2} m_{ik}^{-1} q_i q_k. \tag{59,1}$$

Il tensore $m_{ik}$, inverso del tensore dei coefficienti $m_{ik}^{-1}$ nell'espressione (59,1), è detto *tensore delle masse efficaci* dell'elettrone nel reticolo. Mostriamo in che modo si può esprimere questo tensore mediante gli elementi di matrice rispetto alle funzioni di Bloch $\psi_{s\mathbf{k}_0}$ nel punto $\mathbf{k}_0$.

Se l'interazione spin-orbitale è trascurata l'operatore hamiltoniano dell'elettrone assume la forma (56,1). Sostituiamo nell'equa-

zione di Schrödinger contenente questo operatore hamiltoniano una funzione d'onda della forma

$$\psi_{s\mathbf{k}} = e^{i(\mathbf{k}_0+\mathbf{q})\mathbf{r}} u_{s\mathbf{k}} \equiv e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \varphi_{s\mathbf{k}}. \tag{59,2}$$

Allora l'equazione diventa

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\mathbf{r}) + \left[ \frac{\hbar}{m}\,\mathbf{q}\hat{\mathbf{p}} + \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \right] \right\} \psi_{s\mathbf{k}} = \varepsilon_s(\mathbf{k})\,\varphi_{s\mathbf{k}}, \tag{59,3}$$

dove $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ è l'operatore del vero impulso.

Nell'intorno del punto $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ il vettore $\mathbf{q}$ è una grandezza piccola, e l'espressione fra parentesi quadre nella (59,3) si può considerare come operatore di perturbazione. Nell'approssimazione zero per $\mathbf{q} = 0$, le funzioni $\varphi_{s\mathbf{k}}$ coincidono con quelle $\psi_{s\mathbf{k}_0}$. Pertanto la teoria delle perturbazioni ordinaria permette di esprimere la correzione all'energia mediante gli elementi di matrice rispetto a queste funzioni.

Essendo $\mathbf{k}_0$ punto di estremo, la correzione lineare in $\mathbf{q}$ non esiste. Ciò vuol dire che gli elementi di matrice diagonali sono

$$\langle s\mathbf{k}_0 \mid \mathbf{p} \mid s\mathbf{k}_0 \rangle = 0. \tag{59,4}$$

Per determinare la correzione quadratica in $\mathbf{q}$ occorre tener conto del termine in $q^2$ nell'operatore di perturbazione del primo ordine della teoria delle perturbazioni e il termine in $\mathbf{q}$ del secondo ordine. Come risultato otteniamo per $\varepsilon_s(\mathbf{k})$ la formula (59,1), dove

$$m_{ik}^{-1} = \frac{\delta_{ik}}{m} + \frac{1}{m^2} \sum_{s'}{}' \frac{(p_i)_{ss'}(p_k)_{s's} + (p_k)_{ss'}(p_i)_{s's}}{\varepsilon_{s'}(\mathbf{k}_0) - \varepsilon_s(\mathbf{k}_0)}; \tag{59,5}$$

la sommatoria è estesa a tutti gli $s' \neq s$ [1]). Per rendere più facile la scrittura, qui e più avanti omettiamo nella notazione degli elementi di matrice l'indice diagonale $\mathbf{k}_0$ : $\mathbf{p}_{ss'} \equiv \langle s\mathbf{k}_0 \mid \mathbf{p} \mid s'\mathbf{k}_0 \rangle$. È da notare che in presenza di zone disposte vicino l'una all'altra (aventi cioè piccole differenze $\varepsilon_{s'} - \varepsilon_s$) il secondo termine nell'espressione (59,5) può essere più grande rispetto al primo, per cui le masse efficaci saranno piccole rispetto a $m$.

Supponiamo ora che al cristallo sia applicato un campo magnetico omogeneo $\mathbf{H}$. Allora, secondo la formula (56,7), l'operatore hamiltoniano agente sulle funzioni del quasi-impulso generalizzato $\mathbf{Q}$ si ottiene dalla (59,1) per sostituzione di $\mathbf{q}$ con l'operatore

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} - \frac{e}{\hbar c}\hat{\mathbf{A}}, \quad \hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}\left[ \mathbf{H} \cdot i \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}} \right]. \tag{59,6}$$

---

[1]) La somma su $\mathbf{k}'$ non esiste poiché, secondo la (55,15), l'impulso $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ non ha elementi matriciali che siano non diagonali in $\mathbf{k}$, cosicché tutti gli stati intermedi si riferiscono al medesimo quasi-impulso $\mathbf{k}_0$.

L'operatore hamiltoniano così ottenuto

$$\hat{H}_s^{(0)} = \varepsilon_s(\mathbf{k}_0) + \frac{\hbar^2}{2} m_{ik}^{-1} \hat{q}_i \hat{q}_k \tag{59,7}$$

è applicabile, ovviamente, allo stesso dominio di energie della formula iniziale (59,1). Ciò significa che (oltre alla condizione (56,3) di debolezza del campo) è supposto che i livelli di Landau considerati non siano disposti troppo in alto. In questo senso le grandezze q e Q si devono considerare come piccole (mentre il carattere crescente del potenziale A si manifesta nel fatto che neanche in un campo debole si può considerare A piccolo rispetto a Q).

I termini successivi alla (59,7) nell'operatore hamiltoniano contengono il campo H in forma « pura » (cioè senza operatori $\partial/\partial Q$). Questi termini non si possono più ottenere partendo soltanto dalle considerazioni di invarianza di gauge. Determiniamone il primo, lineare in H. In questo caso, essendo piccola la correzione, per il suo calcolo si può porre $Q = 0$.

Consideriamo dapprima questa questione senza tener conto dell'interazione spin-orbitale. Il termine lineare in H cercato può derivare soltanto dal termine lineare in A nell'operatore hamiltoniano iniziale (56,2) dell'elettrone, cioè calcolando la media rispetto alla funzione d'onda $\psi_{s\mathbf{k}_0}$ dell'espressione

$$-\frac{e}{2mc}(\hat{\mathbf{p}}\mathbf{A} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{p}}) = -\frac{e}{mc}\mathbf{A}\hat{\mathbf{p}} \tag{59,8}$$

(l'uguaglianza è dovuta alla trasformazione di gauge già determinata con $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$). Ciò implica la comparsa nell'operatore hamiltoniano (59,7) del termine

$$H_s^{(1)} = -\mathbf{M}\mathbf{H}, \tag{59,9}$$

dove

$$\mathbf{M} = \frac{e}{2mc}\langle s\mathbf{k}_0 \mid [\mathbf{r}\mathbf{p}] \mid s\mathbf{k}_0\rangle \tag{59,10}$$

è semplicemente la media del momento magnetico dell'elettrone nello stato $s\mathbf{k}_0$. Sottolineiamo che la correzione (59,9) può essere aggiunta all'operatore hamiltoniano (59,7) senza temere che di questo effetto in parte si sia già tenuto conto mediante la sostituzione (59,6); in effetti, termini lineari in H nella formula (59,7) in generale non esistono per $Q = 0$.

Scriviamo l'espressione (59,10) in base alla regola del prodotto di matrici tenendo conto che, in virtù della (59,4), p non ha elementi di matrice diagonali

$$M_x = \frac{e}{2mc} \sum_{s'}{}' \left[(\Omega_y)_{ss'}(p_z)_{s's} - (\Omega_z)_{ss'}(p_y)_{s's}\right] \quad .$$

(e analogamente per $M_y$, $M_z$); come doveva essere, la correzione all'operatore hamiltoniano (59,7) si esprime mediante gli elementi di matrice dell'operatore $\Omega$. La relazione

$$\Omega_{s's} = \frac{\mathbf{p}_{s's}}{i(\varepsilon_{s'} - \varepsilon_s)}$$

permette di riscrivere M nella forma

$$M_x = \frac{ie}{2mc} \sum_{s'}{}' \frac{(p_z)_{ss'}(p_y)_{s's} - (p_y)_{ss'}(p_z)_{s's}}{\varepsilon_{s'}(\mathbf{k}_0) - \varepsilon_s(\mathbf{k}_0)}, \ldots \qquad (59,11)$$

Notiamo che M, e quindi tutta la correzione (59,9), si annulla se il cristallo ha centro d'inversione. Infatti, non cambia per inversione contemporanea del tempo e inversione totale lo stato dell'elettrone (senza tener conto del suo spin) e quindi neanche il secondo membro dell'uguaglianza (59,11) cambia, mentre per questa trasformazione il momento magnetico deve cambiare di segno.

Ora teniamo conto dell'interazione spin-orbitale nel cristallo associando all'operatore hamiltoniano (56,1) il termine spin-orbitale $\hat{H}_{sl}$ dell'espressione (55,17). Ciò implicherà la variazione del termine lineare in $\mathbf{q}$ nell'equazione (59,3): l'operatore $\hat{\mathbf{p}}$ in questo termine verrà sostituito con

$$\hat{\boldsymbol{\pi}} = \hat{\mathbf{p}} + \frac{\hbar}{4m^2c^2}[\sigma \nabla U]. \qquad (59,12)$$

L'operatore $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ ha un significato fisico semplice: facendo commutare direttamente l'operatore hamiltoniano (tenendo conto di $\hat{H}_{sl}$) con $\mathbf{r}$, troviamo che (in assenza di campo magnetico)

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}} = \hat{\boldsymbol{\pi}}/m. \qquad (59,13)$$

Analogamente, in presenza di campo magnetico effettuando la sostituzione ordinaria $\hat{\mathbf{p}} \to \hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}/c$ nell'operatore hamiltoniano (e anche in $\hat{H}_{sl}$), troviamo che il termine lineare in $\mathbf{A}$ ha anch'esso la forma $-e\hat{\boldsymbol{\pi}}\mathbf{A}/mc$ che differisce dalla forma (59,8) per la stessa sostituzione di $\hat{\mathbf{p}}$ con $\hat{\boldsymbol{\pi}}$. Quanto al momento magnetico (59,11), gli si deve aggiungere ancora il momento magnetico di spin dell'elettrone libero in modo che avremo

$$M_x = \beta \langle s\mathbf{k}_0 \mid \sigma_x \mid s\mathbf{k}_0 \rangle + \frac{ie}{2mc} \sum_{s'}{}' \frac{(\pi_z)_{ss'}(\pi_y)_{s's} - (\pi_y)_{ss'}(\pi_z)_{s's}}{\varepsilon_{s'} - \varepsilon_s}. \qquad (59,14)$$

Se teniamo conto dell'interazione spin-orbitale, il secondo termine in questa espressione non è affatto nullo neanche in un cristallo con centro d'inversione. Infatti, il cambiamento del segno del tempo

e un'inversione contemporanea conducono a uno stato che differisce per direzione dello spin, in modo che tutta l'espressione (59,14), affinché cambi di segno per questa trasformazione, si deve ridurre soltanto alla media dell'operatore $\beta\sigma_i\xi_{ix}(\mathbf{k})$ (si veda la (56,12)).

Calcoliamo il tensore $\xi_{ik}$ nel caso in cui l'interazione spin-orbitale può essere considerata come una perturbazione [1]). Riscriviamo l'espressione (55,17) nella forma

$$\hat{H}_{sl} = \sigma\hat{\chi}, \quad \hat{\chi} = \frac{i\hbar^2}{4m^2c^2}[\nabla U \cdot \nabla]. \tag{59,15}$$

Considerando le (59,9) e (59,15) come una perturbazione, troviamo la correzione all'energia nel secondo ordine della teoria delle perturbazioni, lasciando i soli termini intersecantisi (rispetto alle (59,9) e (59,15)). Questa correzione (pur sempre restando un operatore (matrice) nelle variabili di spin) ha la forma (56,12) con il tensore $\xi_{ik}$ uguale a

$$\xi_{ik} = \delta_{ik} + \frac{1}{2}\sum_{s'}{}' \frac{(\chi_i)_{ss'}(L_k)_{s's} + (L_k)_{ss'}(\chi_i)_{s's}}{\varepsilon_{s'} - \varepsilon_s}, \tag{59,16}$$

dove $\hbar\mathbf{L} = [\mathbf{r}\hat{\mathbf{p}}]$.

Quanto detto sopra si riferiva a stati non degeneri (oltre a quelli degeneri nello spin). Se invece per $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ si produce degenerazione, allora per determinare l'energia occorre scrivere l'equazione secolare, che tiene conto della perturbazione (parentesi quadre nell'espressione (59,3)) fino ai termini del secondo ordine (cioè in base alla formula (39,4) del volume III). Le proprietà dell'equazione secolare così ottenuta dipendono dalla simmetria nel punto $\mathbf{k}_0$. Torneremo su questa questione al § 68.

## PROBLEMA

Trovare i livelli energetici quasi-classici per la particella avente legge di dispersione quadratica (59,1) in un campo magnetico di direzione qualsiasi.

*Soluzione.* Riduciamo il tensore $m_{ik}$ alla forma diagonale e calcoliamo l'energia e l'impulso a partire dal punto di estremo (per fissare le idee, supponiamo che sia il punto di minimo). Allora

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{k_1^2}{m_1} + \frac{k_2^2}{m_2} + \frac{k_3^2}{m_3}\right), \tag{1}$$

---

[1]) L'espressione di $\hat{H}_{sl}$ (55,17) rappresenta il primo termine dello sviluppo rispetto al rapporto relativistico $(v/c)^2$ e perciò in un certo senso è sempre piccola. Ma questa piccolezza, però, non ha niente a che vedere con l'applicabilità della teoria delle perturbazioni alla zona data concreta. Pertanto $\hat{H}_{sl}$ nel problema studiato non sempre si può considerare come una piccola perturbazione.

dove $m_1$, $m_2$, $m_3$ sono i tre valori principali del tensore $m_{ik}$ (grandezze positive). Indicando con $\mathbf{n}$ il versore nella direzione del campo $\mathbf{H}$, abbiamo

$$k_z = \mathbf{nk} = n_1 k_1 + n_2 k_2 + n_3 k_3 \tag{2}$$

($n_1$, $n_2$, $n_3$ sono i tre coseni direttori del campo rispetto agli assi principali del tensore $m_{ik}$). Dobbiamo trovare l'area $S$ della parte del piano (2) giacente all'interno dell'ellissoide (1); essa può essere presentata nella forma dell'integrale

$$S = \int \delta(\mathbf{nk} - k_z)\, d^3k \tag{3}$$

calcolato sul volume dell'ellissoide (1) [1]). Con la sostituzione di variabili $\hbar k_i = (2\varepsilon m_i)^{1/2} q_i$ l'integrale si riduce alla forma

$$S = (2\varepsilon)^{3/2} \hbar^{-3} (m_1 m_2 m_3)^{1/2} \int \delta(\mathbf{vq} - k_z)\, d^3q,$$

dove il vettore $\mathbf{v}$ nello spazio $\mathbf{q}$ ha come componenti $v_i = (2\varepsilon m_i)^{1/2} n_i / \hbar$ mentre l'integrazione si effettua sul volume della sfera $\mathbf{q}^2 = 1$. Si integra facilmente in coordinate cilindriche con asse lungo il vettore $\mathbf{v}$ e si ottiene

$$S(\varepsilon, k_z) = \frac{2\pi}{\hbar^2} m_\perp \left(\varepsilon - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_\parallel}\right),$$

dove

$$\begin{aligned} m_\parallel &= m_1 n_1^2 + m_2 n_2^2 + m_3 n_3^2, \\ m_\perp &= (m_1 m_2 m_3 / m_\parallel)^{1/2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Sostituendo nella (58,7), troviamo i livelli energetici

$$\varepsilon_n(k_z) = \frac{|e|\,\hbar H}{m_\perp c}\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_\parallel}. \tag{5}$$

## § 60. *Simmetria degli stati elettronici nel reticolo in un campo magnetico*

In questo paragrafo studieremo le proprietà generali precise della simmetria di traslazione delle funzioni d'onda dell'elettrone di Bloch in un campo magnetico non legate a nessuna approssimazione (del tipo di debolezza del campo o di condizione di quasiclassicità).

---

[1]) Sia $f(x, y, z)$ = costante la famiglia di superfici che riempiono un certo volume. La distanza $dl$ fra due superfici indefinitamente vicine della famiglia vale $dl = df / |\nabla f|$, e il volume compreso fra queste superfici è $dV = S(f)\, dl$, dove $S(f)$ rappresenta l'area della superficie con valore $f$ dato. Moltiplicando per la funzione $\delta\,\delta(f)$ l'uguaglianza $S(f)\, df = |\nabla f|\, dV$ e integrando sul volume e in $df$, otteniamo l'area della superficie $f(x, y, z) = 0$ nella forma $S(0) = \int |\nabla f|\, \delta(f)\, d^3x$. Nel caso considerato $|\nabla f| = 1$ da cui si ottiene l'espressione (3).

L'applicazione di un campo magnetico omogeneo non cambia con una simmetria di traslazione fisica del sistema, che rimane periodico nello spazio. L'originalità della situazione sta, però, nel fatto che l'operatore hamiltoniano dell'elettrone (56,2) perde al tempo stesso la sua simmetria. Ciò è dovuto al fatto che nell'operatore hamiltoniano entra non l'intensità costante **H**, bensì il potenziale vettoriale **A** (**r**) dipendente dalle coordinate e non avente periodicità.

La non invarianza dell'operatore hamiltoniano implica, naturalmente, una complicazione della legge di trasformazione delle funzioni d'onda per traslazioni. Consideriamo per il potenziale vettoriale di un campo omogeneo la seguente trasformazione di gauge:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\,[\mathbf{H}\mathbf{r}] \tag{60,1}$$

e supponiamo che $\psi$ (**r**) sia un'autofunzione dell'operatore hamiltoniano $\hat{H}$ (**r**). Per la traslazione $\mathbf{r} \to \mathbf{r} + \mathbf{a}$ (essendo **a** uno dei periodi del reticolo) questa funzione si trasforma in $\psi$ (**r** + **a**), che sarà autofunzione dell'operatore hamiltoniano $\hat{H}$ (**r** + **a**), non coincidente più con $\hat{H}$ (**r**), in quanto è stata eseguita la sostituzione del potenziale vettoriale

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \to \mathbf{A}(\mathbf{r}+\mathbf{a}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\,[\mathbf{H}\mathbf{a}].$$

Per determinare la legge di trasformazione cercata occorre tornare all'operatore hamiltoniano iniziale, il che si ottiene mediante la trasformazione di gauge

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla f, \quad f = -\frac{1}{2}\,[\mathbf{H}\mathbf{a}]\,\mathbf{r}.$$

In questo caso la funzione d'onda si trasforma, in base alla formula (56,4),

$$\psi \to \psi \exp\,(ief/\hbar c).$$

Indicando con $\hat{T}_{\mathbf{a}}\psi$ (**r**) il risultato di tutte queste operazioni, troviamo che

$$\hat{T}_{\mathbf{a}}\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}+\mathbf{a}) \exp\left(\frac{i}{2}\,\mathbf{r}\,[\mathbf{h}\mathbf{a}]\right), \tag{60,2}$$

dove $\mathbf{h} = |e|\,\mathbf{H}/\hbar c$ e $\hat{T}_{\mathbf{a}}$ si dice operatore di traslazione magnetica. Se $\psi$ (**r**) è soluzione dell'equazione di Schrödinger $\hat{H}(\mathbf{r})\,\psi = \varepsilon\psi$, allora l'espressione (60,2) è anch'essa soluzione della stessa equazione, riferita alla medesima energia $\varepsilon$ (*R. Peierls*, 1933).

Dalla definizione (60,2) è facile concludere che

$$\hat{T}_{\mathbf{a}}\hat{T}_{\mathbf{a}'} = \hat{T}_{\mathbf{a}+\mathbf{a}'}\omega(\mathbf{a}, \mathbf{a}'),$$

$$\omega(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = \exp\left(-\frac{i}{2}\mathbf{h}[\mathbf{a}\mathbf{a}']\right). \tag{60,3}$$

Permutando $\mathbf{a}$ e $\mathbf{a}'$ l'esponente nel fattore $\omega(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ cambia di segno; perciò gli operatori $\hat{T}_{\mathbf{a}}$ e $\hat{T}_{\mathbf{a}'}$ sono in generale non commutativi:

$$\hat{T}_{\mathbf{a}}\hat{T}_{\mathbf{a}'} = \hat{T}_{\mathbf{a}'}\hat{T}_{\mathbf{a}}\exp(-i\mathbf{h}[\mathbf{a}\mathbf{a}']). \tag{60,4}$$

Quindi, il prodotto di due operatori $\hat{T}_{\mathbf{a}}$ e $\hat{T}_{\mathbf{a}'}$ differisce, in generale, per un fattore di fase dall'operatore $\hat{T}_{\mathbf{a}+\mathbf{a}'}$. Secondo il linguaggio matematico ciò significa che gli operatori $\hat{T}_{\mathbf{a}}$ realizzano una rappresentazione non ordinaria, bensì proiettiva del gruppo delle traslazioni; le funzioni d'onda degli stati stazionari dell'elettrone di Bloch nel campo magnetico costituiscono la base di queste rappresentazioni [1]). La classificazione dei livelli energetici deve essere effettuata, quindi, in base alle rappresentazioni proiettive irriducibili del gruppo delle traslazioni, così come in assenza di campo la eseguiamo in base alle rappresentazioni ordinarie irriducibili di questo gruppo.

Ricordiamo a questo proposito che il gruppo delle traslazioni è abeliano (tutti i suoi elementi sono commutativi) e, quindi, tutte le sue rappresentazioni ordinarie irriducibili sono unidimensionali. La funzione $\psi$ della base di ognuna di queste rappresentazioni per traslazione si moltiplica unicamente per un fattore di fase; inoltre per due traslazioni consecutive questo fattore deve essere uguale al prodotto dei fattori di ciascuna traslazione separata. Ciò significa che

$$\hat{T}_{\mathbf{a}}\psi = e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}}\psi,$$

dove $\mathbf{k}$ è un vettore costante (quasi-impulso dell'elettrone) che risulta essere il parametro, che classifica le rappresentazioni irriducibili.

La classificazione completa delle rappresentazioni proiettive irriducibili del gruppo delle traslazioni può essere effettuata (*E. Brown*, 1964; *J. Zak*, 1964) nel caso in cui il campo magnetico verifica la condizione

$$\mathbf{h} = 4\pi\frac{p}{q}\frac{\mathbf{a}_3}{v} \tag{60,5}$$

---

[1]) Con la nozione di rappresentazioni proiettive abbiamo avuto già a che fare nel volume V, § 134. Ricordiamo che si chiamano rappresentazioni proiettive del gruppo $G$ quelle, in generale, che si realizzano mediante gli operatori $\hat{G}$, le relazioni fra i quali coincidono con le relazioni fra gli elementi corrispondenti del gruppo $G$ soltanto a meno di fattori di fase: se $G_1G_2 = G_3$, allora abbiamo per gli operatori $\hat{G}_1\hat{G}_2 = \omega_{12}\hat{G}_3$, dove $\omega_{12}$ deve essere uguale all'unità soltanto in modulo.

dove $p$ e $q$ sono due numeri interi mutuamente semplici; $\mathbf{a}_3$ è uno dei tre periodi principali del reticolo $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ scelti in modo arbitrario; $v = [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]\,\mathbf{a}_3$ è il volume della cella elementare del reticolo. In altre parole, il campo magnetico deve essere diretto lungo uno dei periodi del reticolo e la grandezza $hv/4\pi a_3$ deve essere un numero razionale. Moltiplicando per $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]$ l'uguaglianza (60,5), si può rappresentare questa condizione anche nella forma

$$\mathbf{h}\,[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2] = 4\pi p/q. \tag{60,6}$$

Per la classificazione delle rappresentazioni proiettive irriducibili del gruppo delle traslazioni è essenziale che da questo gruppo si possa estrarre un sottogruppo (che chiameremo *magnetico*) nei confronti del quale la rappresentazione non è più proiettiva, bensì ordinaria. Se la condizione (60,6) è soddisfatta, tale sottogruppo è l'insieme delle traslazioni della forma

$$\mathbf{a}_m = n_1\mathbf{a}_1 + n_2 q\mathbf{a}_2 + n_3\mathbf{a}_3 \tag{60,7}$$

con i coefficienti $n_1$, $n_2$, $n_3$ numeri interi. In effetti, quando il vettore $\mathbf{h}$ è diretto lungo $\mathbf{a}_3$ e verifica la condizione (60,6), per tutte le traslazioni di questa forma l'esponente nell'espressione (60,3) si annulla o si trasforma in multiplo di $2\pi$ in modo che tutti i fattori $\omega(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = 1$ [1]). La totalità delle traslazioni (60,7) forma un reticolo di periodi fondamentali $\mathbf{a}_1$, $q\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ (detto reticolo magnetico). Il reticolo magnetico inverso ha, rispettivamente, periodi $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2/q$, $\mathbf{b}_3$, dove $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ sono i periodi del reticolo inverso fondamentale.

Le rappresentazioni irriducibili ordinarie del sottogruppo magnetico, così come del gruppo totale delle traslazioni, sono unidimensionali e caratterizzate dai vettori d'onda (quasi-impulsi) $\mathbf{K}$, di cui tutti i valori non equivalenti sono compresi in una sola cella del reticolo magnetico inverso.

Supponiamo che $\psi^{(1)}$ sia funzione di base di una di queste rappresentazioni con quasi-impulso $\mathbf{k}^{(1)} \equiv \mathbf{K}$. Per essa

$$\hat{T}_{\mathbf{a}_m}\psi^{(1)}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}^{(1)}\mathbf{a}_m}\psi^{(1)}(\mathbf{r}). \tag{60,8}$$

Per la traslazione di un periodo $\mathbf{a}_2$ (non facente parte del sottogruppo magnetico) dalla $\psi^{(1)}$ si ricava la funzione $\psi^{(2)}$ avente un altro quasi-impulso. Per determinarlo ricorriamo alle formule (60,4) e (60,8) e scriviamo

$$\begin{aligned}\hat{T}_{\mathbf{a}_m}\psi^{(2)} &= \hat{T}_{\mathbf{a}_m}\hat{T}_{\mathbf{a}_2}\psi^{(1)}(\mathbf{r}) = \\ &= \exp(-i\mathbf{h}\,[\mathbf{a}_m\mathbf{a}_2])\,\hat{T}_{\mathbf{a}_2}\hat{T}_{\mathbf{a}_m}\psi^{(1)}(\mathbf{r}) = \\ &= \exp\{-i\mathbf{a}_m\,[\mathbf{a}_2\mathbf{h}] + i\mathbf{a}_m\mathbf{k}^{(1)}\}\,\hat{T}_{\mathbf{a}_2}\psi^{(1)}(\mathbf{r})\end{aligned}$$

[1]) La scelta del sottogruppo magnetico è, in generale, non univoca: al posto della (60,7) si può scegliere qualsiasi insieme di traslazioni della forma $\mathbf{a}_m = n_1 q_1\mathbf{a}_1 + n_2 q_2\mathbf{a}_2 + n_3\mathbf{a}_3$, dove $q_1$, $q_2$ sono due interi tali che $q_1 q_2 = q$.

o, infine,

$$\hat{T}_{\mathbf{a}_m}\psi^{(2)}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}^{(2)}\mathbf{a}_m}\psi^{(2)}(\mathbf{r}),$$

dove

$$\mathbf{k}^{(2)} = \mathbf{k}^{(1)} - [\mathbf{a}_2\mathbf{h}] = \mathbf{K} - 2\frac{p}{q}\mathbf{b}_1$$

(nell'ultima uguaglianza si è sostituita la (60,5) e introdotto il periodo $2\pi\,[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3]/v = \mathbf{b}_1$ del reticolo inverso). In seguito, si devono distinguere casi di valori di $q$ dispari e pari [1]).

Sia $q$ un numero dispari. Ripetendo la traslazione di $\mathbf{a}_2$ ancora $q - 2$ volte, otteniamo in tutto $q$ funzioni distinte con quasi-impulsi

$$\mathbf{k}^{(1)} = \mathbf{K}, \quad \mathbf{k}^{(2)} = \mathbf{K} - 2\frac{p}{q}\mathbf{b}_1, \ \ldots, \ \mathbf{k}^{(q)} = \\ = \mathbf{K} - 2\frac{p\,(q-1)}{q}\mathbf{b}_1. \tag{60,9}$$

La sottrazione di un adeguato vettore intero multiplo di $\mathbf{b}_1$ permette di ridurre questi valori (nell'una o nell'altra successione) a quanto segue:

$$\mathbf{k} = \mathbf{K}, \quad \mathbf{K} + \frac{1}{q}\mathbf{b}_1, \quad \mathbf{K} + \frac{2}{q}\mathbf{b}_1, \ \ldots, \ \mathbf{K} + \frac{q-1}{q}\mathbf{b}_1. \tag{60,10}$$

Sono queste funzioni $q$ a realizzare la rappresentazione proiettiva irriducibile $q$-dimensionale del gruppo delle traslazioni. Otteniamo così tutte le rappresentazioni non equivalenti quando $\mathbf{K}$ descrive i valori nella cella di lati $\mathbf{b}_1/q$, $\mathbf{b}_2/q$, $\mathbf{b}_3$ (mentre i quasi-impulsi $\mathbf{k}^{(1)}$, $\mathbf{k}^{(2)}$, . . . assumono valori nella cella di lati $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2/q$, $\mathbf{b}_3$).

Supponiamo ora che $q$ sia un numero pari. Allora nella successione (60,9) il $(q/2 + 1)$-esimo valore, uguale a $\mathbf{K} - p\mathbf{b}_1$, differisce da $\mathbf{K}$ soltanto per un numero intero di periodi multiplo del reticolo inverso $\mathbf{b}_1$. In altre parole, esistono in tutto $q/2$ valori non equivalenti di $\mathbf{k}$, che sono dati dall'espressione (60,10), dove al posto di $q$ deve figurare $q/2$. In tal modo, in questo caso le rappresentazioni lrriducibili sono $q/2$-dimensionali e $\mathbf{K}$ assume valori nella cella di iati $2\mathbf{b}_1/q$, $\mathbf{b}_2/q$, $\mathbf{b}_3$.

Questi risultati permettono di formulare le seguenti conclusioni sul carattere di variazione dello spettro energetico dell'elettrone in un reticolo al quale è applicato un campo magnetico (soddisfacente la condizione (60,5)). In assenza di campo lo spettro è composto di zone energetiche discrete, in ciascuna delle quali l'energia $\varepsilon(\mathbf{k})$ è una funzione del quasi-impulso che assume valori in una sola cella

[1]) Per $q = 1$ il sottogruppo magnetico coincide con il gruppo di traslazioni totale. Quindi, se $\mathbf{h}$ è un intero multiplo di $4\pi\mathbf{a}_3/v$, le rappresentazioni irriducibili proiettive del gruppo di traslazioni coincidono con quelle ordinarie e la classificazione degli stati elettronici è la stessa come in assenza di campo.

del reticolo inverso. In presenza di un campo, tale zona si scinde in $q$ sottozone, in ognuna delle quali tutti i livelli energetici sono degeneri di molteplicità $q$ per $q$ dispari o di molteplicità $q/2$ per $q$ pari. L'energia nella sottozona può essere espressa come funzione $\varepsilon$ (**K**) del vettore **K**, che assume valori nella $1/q^2$-esima parte (per $q$ dispari) o nella $2/q^2$-esima parte (per $q$ pari) della cella del reticolo inverso.

Il quadro descritto è in un certo senso estremamente sensibile all'intensità e alla direzione del campo magnetico. Infatti, infinitamente vicino al valore **H** che soddisfa la condizione (60,5) con certi $p$ e $q$, giacciono dei valori anch'essi soddisfacenti la stessa condizione, ma con dei $q$ notevolmente più grandi, in modo che con una variazione del campo piccola a piacere si può rendere il numero di sottozone grande a piacere. Sottolineiamo, tuttavia, che ciò non significa affatto la stessa instabilità nelle proprietà fisiche osservate. Queste ultime sono determinate non tanto da una struttura di zone concreta, quanto dalla distribuzione del numero di stati in intervalli di energia piccoli, ma finiti; questa distribuzione varia poco per una piccola variazione del campo. Il fatto è che varia fortemente non l'energia di stati, bensì la sola loro classificazione in seguito al cambiamento del dominio di definizione del quasi-impulso.

## § 61. *Spettro elettronico dei metalli normali*

Nei cristalli reali di metalli normali (non superconduttori) gli elettroni formano un liquido di Fermi quantistico del tipo descritto nel capitolo I. Tuttavia, compaiono alcune distinzioni in quanto abbiamo qui a che fare non con un liquido isotropo « libero », bensì con un liquido nel campo periodico anisotropo del reticolo.

Così come lo spettro energetico del liquido di Fermi libero viene costruito analogamente allo spettro del gas di Fermi perfetto, lo spettro del liquido elettronico di Fermi nel metallo viene costruito anch'esso analogamente allo spettro del « gas perfetto nel reticolo ». La comparsa del quasi-impulso quale grandezza conservativa è dovuta esclusivamente alla periodicità spaziale del sistema (così come la conservazione del vero impulso è una conseguenza dell'omogeneità spaziale totale). È naturale perciò che le proprietà elencate al § 55 si estendano anche al carattere della classificazione dei livelli nello spettro del liquido elettronico in un metallo, dove sono le quasi-particelle a fungere da particelle (elettroni).

Alla temperatura dello zero assoluto le particelle del gas di Fermi perfetto in un campo periodico occuperanno tutti i livelli inferiori con energie $\varepsilon$, fino a un certo valore limite $\varepsilon_F$ (coincidente con il valore del potenziale chimico $\mu$ per $T = 0$) determinato dalla condizione che il numero di stati con $\varepsilon \leqslant \varepsilon_F$ coincida con il numero totale di elettroni. In questo caso le zone energetiche, per le quali

$\varepsilon_s(\mathbf{k}) < \varepsilon_F$ per tutti i valori di $\mathbf{k}$, saranno completamente riempite, le zone con $\varepsilon_s(\mathbf{k}) > \varepsilon_F$ vuote e le zone per le quali l'equazione

$$\varepsilon_s(\mathbf{k}) = \varepsilon_F \tag{61,1}$$

ha soluzione saranno riempite in parte. Le equazioni (61,1) determinano nello spazio $\mathbf{k}$ la superficie limite di Fermi che separa (per ogni zona) gli stati riempiti da quelli vuoti.

Analogamente, in un metallo reale esiste una superficie nello spazio $\mathbf{k}$, che separa il dominio degli stati delle quasi-particelle riempiti (per $T = 0$) dagli stati liberi; da una parte di questa superficie le energie delle quasi-particelle sono $\varepsilon > \varepsilon_F$, e dall'altra parte $\varepsilon < \varepsilon_F$. Ricordiamo, però (si veda il § 1), che la nozione di quasi-particelle nel liquido di Fermi ha un significato fisico reale soltanto in prossimità della superficie di Fermi, dove lo smorzamento delle eccitazioni elementari è relativamente piccolo. Pertanto l'idea di zone energetiche riempite (che compare nella descrizione dello spettro del gas di Fermi perfetto) perde il suo senso letterale in un liquido elettronico reale.

Le quasi-particelle in prossimità della superficie di Fermi sono dette *elettroni di conduzione*. Nel caso generale la loro energia è funzione lineare del quasi-impulso; analogamente alla (1,12) abbiamo

$$\varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon_F \approx \hbar(\mathbf{k} - \mathbf{k}_F)\,\mathbf{v}_F, \tag{61,2}$$

dove $\mathbf{k}_F$ è un punto sulla superficie di Fermi e

$$\hbar\mathbf{v}_F = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{k}}\right)_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_F} \tag{61,3}$$

è la velocità degli elettroni di conduzione in questi punti [1]).

In prossimità della superficie di Fermi deve trovarsi anche il « dominio smussato » della distribuzione degli elettroni di conduzione a temperature diverse da zero. Di qui deriva la condizione di applicabilità della teoria del liquido di Fermi: $T \ll \hbar k_F v_F$, dove $k_F$ e $v_F$ sono le grandezze caratteristiche delle dimensioni della superficie di Fermi e la velocità su di essa. Di solito le dimensioni $k_F$ coincidono in ordine di grandezza con le dimensioni della cella del reticolo inverso cosicché $k_F \sim 1/a$ (fanno eccezione i cosiddetti semimetalli, si veda più avanti). Per fare una stima poniamo anche $v_F \sim \hbar k_F/m$ e otteniamo così la condizione $T \ll 10^4$-$10^5$ K che praticamente è sempre verificabile.

Tutti i metalli di fatto hanno reticoli cristallini con centro d'inversione. In accordo con quanto detto al § 55, tutti i livelli energetici degli elettroni di conduzione (con $\mathbf{k}$ dato) sono doppiamente

---

[1]) È ovvio che le formule del tipo (2,11) per la massa efficace, ottenute al § 2 per il liquido di Fermi « libero » a partire da considerazioni di invarianza galileiana, non si riferiscono al liquido elettronico in un reticolo cristallino.

degeneri nello spin (si parla di metalli non ferro- e non antiferromagnetici).

La forma e la disposizione della superficie di Fermi sono una caratteristica importante di ogni metallo reale. La superficie di Fermi in diversi metalli è in generale di forma assai complicata. Essa può essere composta di più fogli non interconnessi, che possono essere a connessione semplice o multipla, chiusi o aperti (cfr. quanto detto al § 55 sulle superfici isoenergetiche in generale).

I fogli chiusi della superficie di Fermi si possono suddividere in due categorie, a seconda che essi delimitino domini di stati occupati (per $T = 0$) o liberi di quasi-particelle (nel primo caso all'interno della zona $\varepsilon < \varepsilon_F$, nel secondo $\varepsilon > \varepsilon_F$). Entrambi i casi, però, si possono descrivere analogamente, supponendo che nel secondo caso la cavità « vuota » sia riempita da « quasi-buche »; il passaggio del sistema allo stato eccitato viene descritto allora come il passaggio delle quasi-buche dall'interno della superficie di Fermi all'esterno. La superficie di Fermi stessa si dice allora *superficie per le buche* a differenza di quella *elettronica* del primo caso [1]). La differenza fisica fra i due tipi di quasi-particelle — elettroni e buche — si manifesta con evidenza durante il loro moto in campi esterni. Così, tutte le sezioni della superficie di Fermi per le buche (o elettronica), che definiscono le traiettorie quasi-classiche del moto in un campo magnetico, si riferiscono al tipo delle buche (o a quello elettronico) nel senso indicato al § 57.

Nel liquido di Fermi isotropo « libero », di cui si è parlato al § 1, la superficie di Fermi era una sfera, il cui raggio è stato definito dalla densità del liquido secondo il teorema di Landau (1,1). Un legame analogo esiste anche per il liquido elettronico nel metallo, ma la specificità delle proprietà legate alla periodicità del reticolo implica una certa modifica nella formulazione di questo legame.

È comodo riferire il numero di elettroni nel metallo a una cella elementare del suo reticolo; sia $n$ il numero totale di elettroni negli atomi di una cella. Indichiamo con $\tau_F$ il volume totale di una cella del reticolo inverso giacente dal lato occupato della superficie di Fermi (cioè dalla parte dove $\varepsilon < \varepsilon_F$). La parola « totale » significa qui che se i domini occupati corrispondenti ai diversi fogli della superficie di Fermi si sovrappongono in parte, cionondimeno essi vanno sommati tutti indipendentemente. Conveniamo di misurare il volume $\tau_F$ in unità di volume della cella stessa del reticolo inverso; l'osservazione sulla sovrapposizione dei domini significa che la grandezza $\tau_F$ così definita può superare uno.

---

[1]) A scanso di equivoci sottolineiamo, tuttavia, che il significato del termine « buca » non coincide qui con quello applicato alla fine del § 1 al metodo alternativo per descrivere lo spettro del liquido di Fermi (laddove si chiamavano buche soltanto le zone vuote formatesi in un dominio riempito per eccitazione del sistema).

L'affermazione fatta (*teorema di Luttinger*), che sostituisce il teorema di Landau per il metallo, viene espressa dall'uguaglianza

$$n_c \equiv 2\tau_F = n - 2l, \tag{61,4}$$

dove $l$ è un intero ($l \geqslant 0$). Nel modello di un gas perfetto in un reticolo questo numero ha un semplice significato: al riempimento completo di ciascuna zona corrispondono due elettroni nella cella del reticolo inverso (il raddoppio è dovuto a due stati di spin), cosicché $2l$ è il numero di elettroni che occupano $l$ zone inferiori, e la differenza $n - 2l$ il numero di elettroni in zone occupate parzialmente. La formula (61,4) esprime il fatto, per niente banale, che una situazione analoga continua ad aver luogo anche se si tiene conto dell'interazione fra gli elettroni[1]). Per definizione di metallo, l'intero $_c$ è diverso da zero.

Supponiamo che nel metallo vi siano soltanto fogli chiusi della superficie di Fermi, elettronici e di buca. Indichiamo con $\tau_-^{(s)}$ e $\tau_+^{(s)}$ i contributi in $\tau_F$ dei singoli involucri elettronici e di buca:

$$\tau_F = \sum_s \tau_-^{(s)} + \sum_s \tau_+^{(s)}$$

(la somma è estesa rispettivamente a tutti i fogli elettronici e a tutti quelli di buca). La grandezza $\tau_-^{(s)}$ coincide con il volume dell'involucro elettronico, mentre il volume dell'involucro delle buche vale $1 - \tau_+^{(s)}$. Introduciamo i numeri di quasi-particelle, elettroni e buche,

$$n_- = 2\sum_s \tau_-^{(s)}, \quad n_+ = 2\sum_s (1 - \tau_+^{(s)}).$$

Per $n$ pari (e quindi per $n_c$ pari) sono possibili dei casi in cui $n_c$ coincide con il doppio del numero di involucri di buche. Allora, come è facile vedere, l'uguaglianza (61,4) si riduce alla seguente:

$$n_- = n_+. \tag{61,5}$$

Si chiamano metalli *compensati* quelli che hanno un numero uguale di quasi-particelle e di quasi-buche.

Badiamo alla circostanza che se l'uguaglianza (61,5) è rigorosamente soddisfatta le grandezze stesse $n_-$ e $n_+$ possono essere arbitrarie e piccole a piacere. Nei casi in cui i volumi di tutte le cavità della superficie di Fermi sono molto piccoli (rispetto al volume di una cella del reticolo inverso), si hanno i *semimetalli*[2]). Esiste, tuttavia, una frontiera inferiore per il numero di elettroni di conduzione oltre la quale lo spettro elettronico di tipo metallico diventa instabile e non può più esistere (si veda più avanti, al § 66).

---

[1]) Per una deduzione rigorosa di questa affermazione si veda *J. M. Luttinger*, Phys. Rev. 119, 1153 (1960).

[2] Così, per il bismuto $n_- = n_+ \sim 10^{-5}$.

Le grandezze termodinamiche del metallo sono composte di parti reticolari ed elettroniche. La dipendenza dalla temperatura per queste ultime è determinata dalle quasi-particelle nell'intorno della superficie di Fermi (legge di dispersione (61,2)). Il carattere di questa dipendenza è naturalmente lo stesso del gas di Fermi perfetto o del liquido di Fermi isotropo (cfr. § 1); la diversità nelle formule è dovuta unicamente a un altro numero di stati delle quasi-particelle in prossimità della superficie di Fermi, che ora non è più sfera.

Indichiamo con $\nu\, d\varepsilon$ il numero di stati (riferito all'unità di volume del metallo) per un intervallo di energia $d\varepsilon$. L'elemento di volume nello spazio $\mathbf{k}$, compreso fra due superfici isoenergetiche indefinitamente vicine e corrispondenti alle energie $\varepsilon_F$ ed $\varepsilon_F + d\varepsilon$, è uguale a $df\, d\varepsilon/\hbar v_F$, dove $df$ è l'elemento d'area della superficie di Fermi e $v_F$ il modulo del vettore normale ad essa $\mathbf{v}_F = \partial\varepsilon/\hbar\, \partial\mathbf{k}$. Pertanto

$$\nu_F = \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{df}{\hbar v_F}, \tag{61,6}$$

dove l'integrazione è estesa a tutti i fogli della superficie di Fermi, disposti all'interno di una cella del reticolo inverso (è ovvio che per una superficie di Fermi aperta le facce della cella stessa non fanno parte del dominio di integrazione).

La (61,6) sostituisce nelle grandezze termodinamiche un'espressione che per il gas di particelle libere (quando la superficie di Fermi è una sfera) aveva la forma

$$\frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi p_F^2}{p_F/m} = \frac{m p_F}{\pi^2 \hbar^3}.$$

Così, per la parte elettronica del potenziale termodinamico $\Omega$ del metallo abbiamo (cfr. V, § 58)

$$\Omega_e = \Omega_{0e} - \frac{\pi^2}{6} \nu_F V T^2, \tag{61,7}$$

dove $\Omega_{0e}$ è il valore del potenziale per $T = 0$. Considerando il secondo termine nella (61,7) come una piccola aggiunta a $\Omega_{0e}$, in accordo con il teorema delle piccole correzioni, si può scrivere la stessa formula anche per il potenziale termodinamico $\Phi$:

$$\Phi_e = \Phi_{0e} - \frac{\pi^2}{6} \nu_F V T^2, \tag{61,8}$$

dove ora $\nu_F$ e $V$ sono supposti espressi mediante $P$ (in approssimazione « nulla », cioè per $T = 0$).

Determinando con l'espressione (61,8) l'entropia e in seguito il calore specifico, troviamo che

$$C_e = \frac{\pi^2}{3} \nu_F V T. \tag{61,9}$$

La parte reticolare del calore specifico è proporzionale a $T^3$ (a temperature piccole rispetto a quella di Debye $\Theta$); quindi, per temperature sufficientemente basse il contributo elettronico al calore specifico diventa prevalente [1]).

Per la stessa ragione il contributo elettronico alla dilatazione termica del metallo diventa anch'esso prevalente in questo dominio di temperature. Determinando mediante la (61,8) il volume $V = \partial\Phi/\partial P$ troviamo in seguito che il coefficiente di dilatazione termica $\alpha$ vale

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -T\frac{\pi^2}{3V}\frac{\partial(V\nu_F)}{\partial P}. \qquad (61,10)$$

È da notare che qui (così come nel dominio $T \gg \Theta$, si veda V, § 67) la relazione

$$\frac{\alpha V}{C} = -\frac{\partial \ln (V\nu_F)}{\partial P}$$

è indipendente dalla temperatura.

## § 62. *Funzione di Green degli elettroni nel metallo*

Il ragionamento fatto ai §§ 56-58 si riferiva al movimento di un solo elettrone in un reticolo sottoposto a un campo magnetico esterno. Mostriamo ora che i risultati così ottenuti restano di fatto validi anche per le quasi-particelle (elettroni di conduzione) nel liquido elettronico di un metallo reale; cambia un po' soltanto la definizione delle grandezze che figurano nelle relazioni (*Ju. A. Byčkov*, *L. P. Gorkov*, 1961; *J. M. Luttinger*, 1961). Le funzioni di Green rappresentano un apparato matematico appropriato per lo studio generale del liquido elettronico.

Nel capitolo II questo apparato è stato sviluppato per il liquido di Fermi « libero ». Vediamo sotto quali aspetti esso deve essere modificato per il liquido in un reticolo.

La funzione di Green del liquido elettronico (alla temperatura $T = 0$) è definita mediante gli operatori $\psi$ di Heisenberg degli elettroni dalla stessa formula (7,9), dove la media viene presa rispetto allo stato fondamentale del metallo. Per l'omogeneità del tempo questa funzione dipende dagli argomenti $t_1$ e $t_2$ soltanto mediante la loro differenza $t = t_1 - t_2$. Per quanto riguarda l'omogeneità spaziale, ora essa è violata dal campo del reticolo che è esterno nei confronti del liquido. Perciò la funzione di Green dipende non soltanto dalla

[1]) Il rapporto $T/\varepsilon_F$ è il piccolo parametro dello sviluppo nell'espressione (61,9), e nel calore specifico del reticolo lo è $T/\Theta$. Pertanto ambedue le parti del calore specifico vengono confrontate per $T^2 \sim \Theta^3/\varepsilon_F$.

differenza $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Si può solo affermare che essa è invariante rispetto alla traslazione contemporanea di $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ di uno stesso periodo (qualsiasi) del reticolo. Considereremo più avanti la funzione di Green nella rappresentazione $\omega$, $\mathbf{r}$, cioè introdurremo la sua componente di Fourier rispetto a $t$: $G_{\alpha\beta}(\omega;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)$. È esattamente questa funzione a permettere di determinare lo spettro energetico del liquido elettronico nel metallo. Ripetiamo (senza eseguire di nuovo tutti i calcoli) le considerazioni esposte al § 8 in applicazione al dato caso.

È stato mostrato al § 8 che l'omogeneità del sistema permette di determinare completamente la dipendenza dalle coordinate degli elementi di matrice degli operatori $\psi$ e, quindi, dà la possibilità di scrivere l'espressione generale della funzione di Green nella rappresentazione spazio-temporale nella forma (8,5-6); di qui si potrebbe passare in seguito alla rappresentazione degli impulsi sotto forma di sviluppo (8,7).

Per il liquido elettronico in un reticolo l'invarianza degli elementi di matrice espressa dall'uguaglianza (8,3) si verifica unicamente per traslazioni di periodi del reticolo, cioè per $\mathbf{r} = \mathbf{a}$. È naturale che ciò implichi una determinazione minore della dipendenza dalle coordinate: in luogo della (8,4) si potrebbe affermare unicamente che

$$\langle 0 \mid \hat{\Psi}_\alpha(t,\ \mathbf{r}) \mid m\mathbf{k}\rangle = \chi^{(+)}_{\alpha m\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_{m0}(\mathbf{k})\, t),$$
$$\langle m\mathbf{k} \mid \hat{\Psi}_\alpha(t,\ \mathbf{r}) \mid 0\rangle = \chi^{(-)}_{\alpha m,\,-\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \exp(i\omega_{m0}(\mathbf{k})\, t), \qquad (62,1)$$

dove

$$\chi^{(+)}_{\alpha m\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} u_{\alpha m\mathbf{k}}(\mathbf{r}),$$
$$\chi^{(-)}_{\alpha m\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} v_{\alpha m\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \qquad (62,2)$$

$\mathbf{k}$ è il quasi-impulso dello stato; $m$ la totalità degli altri numeri quantici che lo caratterizzano, mentre $u$ e $v$ sono alcune funzioni delle coordinate periodiche nel reticolo (abbiamo scritto gli elementi di matrice soltanto per le transizioni dallo stato fondamentale, ossia lo stato 0). Per le loro proprietà le funzioni $\chi^{(+)}$ e $\chi^{(-)}$ sono analoghe alle funzioni d'onda di Bloch dell'elettrone in un campo periodico. Esprimendo la funzione di Green mediante questi elementi di matrice e passando in seguito alle componenti di Fourier rispetto al tempo (così come abbiamo fatto al § 8), otteniamo ora, in luogo della formula (8,7), il seguente sviluppo:

$$G_{\alpha\beta}(\omega;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2) = \sum_{m,\,\mathbf{k}} \left\{ \frac{\chi^{(+)}_{\alpha m\mathbf{k}}(\mathbf{r}_1)\, \chi^{(+)*}_{\beta m\mathbf{k}}(\mathbf{r}_2)}{\omega + \mu - \varepsilon^{(+)}_{m\mathbf{k}} + i0} + \frac{\chi^{(-)}_{\alpha m\mathbf{k}}(\mathbf{r}_1)\, \chi^{(-)*}_{\beta m\mathbf{k}}(\mathbf{r}_2)}{\omega + \mu - \varepsilon^{(-)}_{m\mathbf{k}} - i0} \right\} \qquad (62,3)$$

con il precedente significato delle notazioni $\varepsilon^{(+)}$ ed $\varepsilon^{(-)}$; il secondo termine è stato sottoposto alla trasformazione $\mathbf{k} \to -\mathbf{k}$.

L'esistenza di eccitazioni elementari unidimensionali non smorzantisi in prossimità della superficie di Fermi del metallo si rivela nel fatto che per $\varepsilon$ nell'intorno di $\mu$ l'energia dello stato dipende unicamente da $\mathbf{k}$. Per questi stati la funzione $G_{\alpha\beta}(\omega;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)$ ha un polo per $\omega = \varepsilon(\mathbf{k}) - \mu$. Nell'intorno del polo la funzione diventa

$$G_{\alpha\beta}(\omega;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2) = \frac{\chi_{\alpha\mathbf{k}}(\mathbf{r}_1)\,\chi^*_{\beta\mathbf{k}}(\mathbf{r}_2)}{\omega+\mu-\varepsilon(\mathbf{k})+i0\cdot\operatorname{sign}\omega}. \tag{62,4}$$

In presenza di degenerazione degli spin si deve ancora sommare sui due stati di spin.

La definizione dello spettro energetico in base alle funzioni di Green si riduce, in principio, al problema degli autovalori di un operatore integro-differenziale lineare.

I principi fondamentali della tecnica dei diagrammi nello spazio coordinato per il caso in questione restano gli stessi che nel caso del liquido di Fermi ordinario. In particolare, introducendo l'autofunzione energetica $\Sigma_{\alpha\beta}(t,\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)$ (quale somma dell'insieme di diagrammi definito al § 14), possiamo scrivere la funzione di Green $G_{\alpha\beta}(t,\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)$ nella forma della serie (14,3), la cui somma dà l'equazione di diagrammi (14,4). La linea continua sottile in questi diagrammi indica la funzione di Green $G^{(0)}_{\alpha\beta}(t,\ \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$ degli elettroni liberi che non interagiscono né con altri elettroni né con il reticolo. In accordo con l'espressione (9,6) questa funzione verifica l'equazione

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\Delta_1}{2m}+\mu\right)G^{(0)}_{\alpha\beta}(t,\ \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)=\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2).$$

Applicando al primo membro dell'equazione (14,4) l'operatore (...) e passando in seguito alle componenti di Fourier rispetto al tempo, otteniamo l'equazione cercata

$$\left(\omega+\mu+\frac{\Delta_1}{2m}\right)G_{\alpha\beta}(\omega;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)-$$
$$-\int\Sigma_{\alpha\gamma}(\omega;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}')\,G_{\gamma\beta}(\omega;\ \mathbf{r}',\ \mathbf{r}_2)\,d^3x'=\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2). \tag{62,5}$$

In prossimità del polo della funzione $G$ (rispetto alla variabile $\omega$) il secondo membro dell'equazione può essere omesso e si ottiene così un'equazione integro-differenziale omogenea, i cui autovalori definiscono lo spettro energetico del sistema. In questo caso l'indice $\beta$ e la variabile $\mathbf{r}_2$ non sono toccati da nessuna operazione, fungendo cioè nell'equazione da parametri inessenziali. Per definire lo spettro si può scrivere quindi un'equazione della forma [1])

$$\left(\omega+\mu+\frac{\Delta_1}{2m}\right)\chi_\alpha(\mathbf{r})-\int\Sigma_{\alpha\gamma}(\omega;\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}')\,\chi_\gamma(\mathbf{r}')\,d^3x'\equiv(\omega-\hat{L})\,\chi(\mathbf{r})=0. \tag{62,6}$$

---

[1]) Per un liquido di Fermi microscopicamente omogeneo questa equazione nella rappresentazione degli impulsi si riduce all'equazione (14,13)

$$\omega+\mu=\varepsilon^{(0)}(\mathbf{p})+\Sigma(\omega,\ \mathbf{p}).$$

Per il liquido di Fermi elettronico nel metallo essa sostituisce l'equazione di Schrödinger ordinaria. I suoi autovalori definiscono, come è stato già detto, lo spettro secondo la relazione $\omega = \varepsilon(\mathbf{k}) - \mu$; le autofunzioni corrispondenti sono le funzioni $\chi_{\alpha k}(\mathbf{r})$ dell'espressione (62,4) (ciò è evidente mediante la sostituzione diretta della (62,4) nella (62,5)). Poiché lo smorzamento delle eccitazioni in prossimità della superficie di Fermi è piccolo, l'operatore $\hat{L}$ è hermitiano per $\omega$ piccolo (a meno di termini dell'ordine di $\omega$).

Per il passaggio al caso dell'esistenza di un campo magnetico esterno debole occorre notare che per trasformazione di gauge del potenziale vettoriale gli operatori $\psi$ si trasformano come funzioni d'onda (cfr. le (44,3-4)) e perciò la funzione di Green $G_{\alpha\beta}(\omega; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ si trasforma come prodotto di funzioni $\psi\,\psi(\mathbf{r}_1)\,\psi^*(\mathbf{r}_2)$. Ciò vuol dire che la funzione $\chi(\mathbf{r})$ nella (62,6) deve trasformarsi anch'essa come una funzione $\psi$ ordinaria. Ma se torniamo alle considerazioni fatte al § 56, è facile vedere che esse sono basate unicamente sulla periodicità del reticolo cristallino, sulle proprietà generali della trasformazione di gauge e sul fatto che lo spettro energetico è determinato dagli autovalori di un certo operatore hamiltoniano; quest'ultimo nel caso considerato è l'operatore $\hat{L}$ nell'espressione (62,6) [1]. È chiaro perciò che il risultato, ossia la regola di passaggio dallo spettro in assenza di campo allo spettro in presenza di campo debole, sarà lo stesso: il nuovo spettro verrà definito dagli autovalori dell'operatore hamiltoniano

$$\varepsilon\left(\mathbf{K} - \frac{e}{\hbar c}\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}})\right), \quad \hat{\mathbf{r}} = i\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}}, \tag{62,7}$$

dove $\varepsilon(\mathbf{k})$ è lo spettro in assenza di campo. È ovvio che ora il senso della funzione stessa $\varepsilon(\mathbf{k})$ differisce dal suo senso nell'espressione (56,7): essa tiene conto dell'interazione collettiva di tutti gli elettroni del sistema.

Inoltre, poiché lo studio del caso quasi-classico effettuato ai §§ 57, 58 è stato basato sull'esistenza dell'operatore hamiltoniano della forma (62,7), questi risultati si estendono anch'essi al liquido elettronico. In questo caso, tuttavia, si deve precisare cosa si intende con intensità del campo agente sull'elettrone di conduzione (e, quindi, con potenziale vettoriale A). A rigore, questo deve essere un valore microscopico preciso del campo creato in un dato punto $\mathbf{r}$ da tutti gli elettroni (e dal campo esterno). Ma nel caso quasi-clas-

---

[1]) A questo proposito può sembrare importante la distinzione che nella (62,6) l'operatore $\hat{L}$ dipende esso stesso da $\omega$. Ciò non significa altro che un modo di scrittura implicita dell'operatore hamiltoniano. Per $\omega$ piccole (in prossimità della superficie di Fermi) si può passare anche alla scrittura esplicita sviluppando $\hat{L} \approx \hat{L}_0 + \omega\hat{L}_1$ e in seguito moltiplicando per l'operatore $(1 - \hat{L}_1)^{-1}$ il primo membro dell'equazione $\hat{L}_0\chi = \omega(1 - \hat{L}_1)\chi$.

sico le dimensioni caratteristiche $r_H$ del dominio in cui si verifica l'interazione (« raggio orbitale di Larmor ») sono grandi rispetto all'ordine di grandezza delle distanze interelettroniche (coincidente con la costante $a$ del reticolo). Questa circostanza conduce automaticamente alla media del campo microscopico. L'origine di questa media può essere precisata dai ragionamenti seguenti.

Rappresentiamo l'intensità microscopica sotto forma di somma del suo valore medio (che, in accordo con la terminologia accettata in elettrodinamica macroscopica, è l'induzione magnetica **B**) e della parte rapidamente variabile $\tilde{\mathbf{H}}$. Il potenziale vettoriale corrispondente al campo omogeneo **B** cresce per tutta l'estensione delle dimensioni orbitali assumendo valori caratteristici $\sim Br_H$. Quanto al potenziale corrispondente al campo $\tilde{\mathbf{H}}$ oscillante a distanze $\sim a$, esso non cresce sistematicamente e assume soltanto valori $\sim Ba$ che si possono trascurare rispetto a $Br_H$. Fra l'altro, come è stato precisato al § 56, è il potenziale del campo a determinare la quantizzazione del moto elettronico. Quindi, possiamo concludere che è sufficiente tener conto del solo potenziale **A** dell'induzione omogenea $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, che fungerà da campo agente sull'elettrone (*D. Shoenberg*, 1962). Vedremo più avanti (fine del § 63) che questa circostanza può condurre a nuovi fenomeni nella magnetizzazione dei metalli.

In tal modo, la regola di quantizzazione quasi-classica (58,7) per il liquido elettronico nel metallo si scrive come segue:

$$S(\varepsilon, k_z) = \frac{2\pi|e|}{\hbar c} B \left(n + \frac{1}{2}\right), \tag{62,9}$$

dove ora $S(\varepsilon, k_z)$ è l'area della sezione delle superfici isoenergetiche autentiche degli elettroni di conduzione dei metalli (vicine alla sua superficie di Fermi).

Come nel problema di un solo elettrone in un reticolo avente centro d'inversione [1]), se teniamo conto dello spin degli elettroni di conduzione, ciò implica la separazione dei livelli nel campo magnetico in due componenti

$$\varepsilon_{n\sigma}(k_z) = \varepsilon_n(k_z) + \sigma\beta\xi(k_z) B, \quad \sigma = \pm 1. \tag{62,9}$$

La grandezza $\xi(k_z)$ rappresenta il risultato dell'operazione di media applicata a una certa funzione $\xi(\mathbf{k})$ sulla traiettoria quasi-classica. Inoltre, tutte le traiettorie si possono considerare, con un'approssimazione sufficiente, come giacenti sulla superficie di Fermi stessa in modo che il risultato dell'operazione di media dipende unicamente da $k_z$. Sottolineiamo il seguente fatto: per il liquido di Fermi elet-

[1]) Di fatto, i reticoli cristallini di tutti i metalli godono di centro d'inversione.

tronico la grandezza $\xi(k_z)$ è diversa dall'unità (il suo valore per gli elettroni liberi); ciò è dovuto non soltanto all'interazione spin-orbitale, ma anche all'interazione di scambio fra gli elettroni.

## § 63. *Effetto di Haas-Van Alphen*

È impossibile calcolare in forma generale la suscettività magnetica di un metallo in campi magnetici deboli ($\beta B \ll T$, dove $\beta$ è il magnetone di Bohr e $B$ l'induzione magnetica). Il fatto è che nei limiti della teoria del liquido di Fermi si può considerare soltanto la parte paramagnetica (di spin) della suscettività: questa parte è definita dagli elettroni di conduzione in prossimità della superficie di Fermi, poiché gli spin degli elettroni all'interno della distribuzione sono reciprocamente compensati. Quanto alla parte diamagnetica (orbitale) della suscettività, ad essa danno un contributo tutti gli elettroni, anche dall'interno della distribuzione dove il concetto di quasi-particelle perde già di senso nella teoria del liquido di Fermi. Fra l'altro, ambedue le parti della suscettività sono, in generale, di un medesimo ordine di grandezza e solo la loro somma ha un significato fisico reale.

Consideriamo campi « forti » in cui

$$T \lesssim \beta B \ll \mu, \tag{63,1}$$

vale a dire che gli intervalli fra i livelli di Landau sono commensurabili con la temperatura, ma sempre piccoli rispetto al potenziale chimico. In questo caso le parti para- e diamagnetica della magnetizzazione non possono essere separate in generale, ma la situazione cambia qui nel senso che nella magnetizzazione del metallo compare la dipendenza oscillatoria dall'intensità del campo (*effetto di Haas-Van Alphen*) [1]). La parte monotona della magnetizzazione dipende anche qui da tutti gli elettroni del metallo e non può essere calcolata nei limiti della teoria del liquido di Fermi. Quanto alla parte oscillante della magnetizzazione, essa è definita, come vedremo, soltanto dagli elettroni di conduzione nell'intorno della superficie di Fermi e può essere studiata in forma generale (*I. M. Lifšits, A. M. Kosevič*, 1955). È esattamente questa parte che ci interesserà qui.

La dipendenza oscillatoria della magnetizzazione dal campo è la conseguenza della quantizzazione dei livelli energetici del moto orbitale degli elettroni. Ma alla quantizzazione sono soggetti i soli stati corrispondenti al moto degli elettroni descriventi traiettorie chiuse (nello spazio **k**). Pertanto il contributo alla parte oscillatoria delle grandezze termodinamiche proviene unicamente dagli elettroni di conduzione sulle sezioni chiuse delle superfici isoenergetiche con

[1]) Si veda V, § 60 dove questo effetto è stato stuadiato per un gas elettronico perfetto.

piani perpendicolari alla data direzione del campo. Supporremo che su queste sezioni si verifichi la condizione di quasi-classicità, cioè che i numeri $n$ determinati dall'uguaglianza (62,8) siano grandi:

$$\hbar c S / |e| B \gg 1. \tag{63,2}$$

Per superfici di Fermi tipiche nei metalli le dimensioni lineari delle sezioni valgono $\sim 1/a$ in modo che $S \sim a^{-2}$, e allora la condizione (63,2) si verifica a priori (si veda la nota alla pag. 289).

I livelli quasi-classici sono dati (tenendo conto dello spin) dall'espressione (62,9), dove $\varepsilon_n(k_z)$ sono soluzioni dell'equazione (62,8); a ciascun livello corrisponde un numero di stati dato dalla formula (58,10). Perciò la somma statistica che determina il potenziale termodinamico $\Omega$ (quale funzione di $\mu$, $T$ e del volume $V$ del sistema) ha la forma

$$\Omega = -T \frac{|e| BV}{4\pi^2 \hbar c} \sum_n \int \sum_{s,\sigma} \ln \left\{ 1 + \exp \frac{\mu - \varepsilon_{n\sigma}^{(s)}(k_z)}{T} \right\} dk_z. \tag{63,3}$$

L'indice $s$ numera i singoli fogli della superficie isoenergetica; questo indice e il segno di sommatoria su di esso sono omessi in seguito per brevità. L'integrazione su $dk_z$ è estesa a un intervallo tale che esso comprenda tutte le diverse sezioni (ad eccezione di ripetizioni periodiche) di tutti i fogli delle superfici isoenergetiche.

Prima di tutto separiamo da $\Omega$ la parte oscillante con il campo (indichiamola con $\tilde{\Omega}$), trasformando la somma (63,3) mediante la formula di Poisson [1]):

$$\frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(n) = \int_0^{\infty} F(x)\, dx + 2\,\mathrm{Re} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^{\infty} F(x)\, e^{2\pi i l x}\, dx. \tag{63,4}$$

Il primo termine di questa formula applicata all'espressione (63,3) dà un contributo non oscillatorio in $\Omega$; omettendolo scriviamo

$$\tilde{\Omega} = -\frac{|e| BVT}{4\pi^2 c\hbar} 2\,\mathrm{Re} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm 1} \tilde{I}_{l\sigma}, \tag{63,5}$$

dove $\tilde{I}_{l\sigma}$ è la parte oscillante dell'integrale

$$I_{l\sigma} = \int_0^{\infty} dn \int \ln \left\{ 1 + \exp \frac{\mu_\sigma - \varepsilon_n(k_z)}{T} \right\} e^{2\pi i l n}\, dk_z \tag{63,6}$$

e dove si è introdotta anche la notazione $\mu_\sigma = \mu - \sigma\beta\xi B$.

---

[1]) Si veda V, § 60. Il fatto che nell'espressione (63,4) il termine della somma $F(0)$ è preceduto dal coefficiente 1/2 non ha importanza, poiché nella somma (63,3) sono essenziali i soli termini con $n$ grandi.

Per la trasformazione ulteriore introduciamo la funzione

$$n(\varepsilon, k_z) = \frac{c\hbar S(\varepsilon, k_z)}{2\pi|e|B} - \frac{1}{2} \tag{63,7}$$

(cfr. la (62,8)) e passiamo dall'integrazione in $dn$ nella (63,6) all'integrazione in $d\varepsilon$:

$$I_{l\sigma} = \int_0^\infty \int \ln\left\{1 + \exp\frac{\mu_\sigma - \varepsilon}{T}\right\} e^{2\pi i l n} \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} dk_z\, d\varepsilon; \tag{63,8}$$

l'estremo inferiore di integrazione in $d\varepsilon$ (supposto convenzionalmente nullo) è inessenziale, poiché nell'integrale sarà importante il solo intorno del valore $\varepsilon = \mu_\sigma$.

Poiché la funzione $n(\varepsilon, k_z)$ è grande, il fattore esponenziale nell'espressione integranda della formula (63,8) è una funzione rapidamente oscillante di $k_z$. Queste oscillazioni smorzano l'integrale in $dk_z$ e perciò il contributo principale in esso proviene dai domini della variabile $k_z$, nei quali la funzione $n(\varepsilon, k_z)$ varia più lentamente (in modo che le oscillazioni sono anch'esse più lente). In altre parole, il contributo principale all'integrale lo danno i domini in prossimità dei punti di estremo di $n$ come funzione di $k_z$ (per ogni $\varepsilon$ dato). Sia $k_{zex}(\varepsilon)$ uno di questi punti; nel suo intorno calcoliamo l'integrale con il metodo del punto di sella: nell'esponente scriviamo

$$n(\varepsilon, k_z) \approx n_{ex}(\varepsilon) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 n}{\partial k_z^2}\right)_{ex}(k_z - k_{zex})^2, \quad n_{ex}(\varepsilon) = n(\varepsilon, k_{zex}(\varepsilon)),$$

e nei fattori non esponenziali prendiamo il loro valore per $k_z = k_{zex}$. Come risultato troviamo che ciascuno dei punti di estremo dà il contributo seguente all'integrale:

$$\int_0^\infty \ln\left\{1 + \exp\frac{\mu_\sigma - \varepsilon}{T}\right\} \frac{dn_{ex}}{d\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{l}} \left|\frac{\partial^2 n}{\partial k_z^2}\right|_{ex}^{-1/2} \exp\left\{2\pi i l n_{ex} \pm \frac{i\pi}{4}\right\} d\varepsilon;$$

la sostituzione di $\partial n(\varepsilon, k_z)/\partial\varepsilon$ con $dn_{ex}/d\varepsilon$ è ammissibile, poiché nel punto di estremo $\partial n/\partial k_z = 0$. I segni positivo e negativo nell'esponente si riferiscono rispettivamente ai casi in cui $k_{zex}$ è un punto di minimo o di massimo della funzione $n(\varepsilon, k_z)$ [1]. Trasformiamo questa espressione mediante integrazione per parti, scrivendo

$$\frac{dn_{ex}}{d\varepsilon} \exp(2\pi i l n_{ex})\, d\varepsilon = \frac{1}{2\pi i l}\, d \exp(2\pi i l n_{ex}(\varepsilon))$$

---

[1]) Un integrale della forma $\int e^{iaz^2} dz$ si calcola mediante la sostituzione $z = ue^{i\pi/4}$ o $z = ue^{-i\pi/4}$ per $a > 0$ o $a < 0$ dopo di che l'integrazione in $du$ si estende da $-\infty$ a $+\infty$.

e tenendo presente che si può non derivare la funzione lentamente variabile $|\partial^2 n/\partial k_z^2|_{\text{ex}}$. Il termine integrato non implica la dipendenza oscillatoria dal campo; omettendolo, abbiamo

$$\tilde{I}_{l\sigma} = \sum_{\text{ex}} \frac{e^{\pm i\pi/4}}{2\pi i T l^{3/2}} \int_0^\infty \frac{\exp(2\pi i l n_{\text{ex}})\, d\varepsilon}{\left[1+\exp\left(\frac{\varepsilon-\mu_\sigma}{T}\right)\right] |\partial^2 n/\partial k_z^2|_{\text{ex}}^{1/2}}, \qquad (63,9)$$

dove la sommatoria è estesa a tutti i punti di estremo (il cui significato verrà discusso più avanti).

Il fattore $\exp(2\pi i l n_{\text{ex}})$ a numeratore dell'espressione integranda è una funzione rapidamente oscillante di $\varepsilon$. Queste oscillazioni smorzano l'integrale in $d\varepsilon$ ovunque, ad eccezione del dominio $\varepsilon - \mu_\sigma \sim T$, nel quale il denominatore varia rapidamente. La funzione stessa $n_{\text{ex}}(\varepsilon)$ ha una variazione regolare in questo dominio e perciò può essere rappresentata nella forma

$$n_{\text{ex}}(\varepsilon) \approx n_{\text{ex}}(\mu_\sigma) + n'_{\text{ex}}(\mu_\sigma)(\varepsilon - \mu_\sigma);$$

quanto al fattore $|\partial^2 n/\partial k_z^2|_{\text{ex}}^{-1/2}$, esso va sostituito semplicemente con il suo valore per $\varepsilon = \mu_\sigma$. Dopo questa operazione, passando dall'integrazione in $\varepsilon$ a quella in $x = (\varepsilon - \mu_\sigma)/T$ e sostituendo il limite inferiore $-\mu_\sigma/T$ con $-\infty$ (poiché $\mu/T \gg 1$), otteniamo [1])

$$\tilde{I}_{l\sigma} = -\sum_{\text{ex}} \frac{\exp[2\pi i l n_{\text{ex}}(\mu_\sigma) \pm i\pi/4]}{2 l^{3/2} |\partial^2 n/\partial k_z^2|_{\text{ex},\,\mu_\sigma}^{1/2}} \operatorname{sh}^{-1}[2\pi^2 l\, T n'_{\text{ex}}(\mu_\sigma)].$$

Sommando questa espressione su $\sigma = \pm 1$, si può sostituire ovunque (ad eccezione del fattore esponenziale) $\mu_\sigma$ con $\mu$ in quanto per l'ipotesi (63,1) $\beta B \ll \mu$. Nel fattore di fase (esponenziale) questa sostituzione è inammissibile: essendo grande il valore della funzione $n_{\text{ex}}(\varepsilon)$, una variazione relativamente piccola del suo argomento implica già un notevole cambiamento di fase; qui, però, è sufficiente

---

[1]) È stato utilizzato il valore dell'integrale

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha z}}{e^z+1}\, dz = -\frac{i\pi}{\operatorname{sh} \pi\alpha}.$$

Si può ottenere questa formula considerando l'integrale su un contorno chiuso nel piano della $z$ complessa, formato dall'asse reale, dalla retta $\operatorname{Im} z = 2\pi$ e da due segmenti « laterali » indefinitamente lontani (per assicurare la convergenza su questi ultimi sostituiamo il parametro reale $\alpha$ con $\alpha - i0$). L'integrale su questo contorno è definito dal resto nel polo $z = i\pi$ da cui ricaviamo $I - e^{-2\pi\alpha} I = -2\pi i e^{-\pi\alpha}$.

sviluppare $n_{ex}(\mu \pm \beta B)$ in potenze di $\beta B$ limitandosi ai termini lineari. Come risultato otteniamo

$$\sum_{\sigma} \tilde{I}_{l\sigma} = -\sum_{ex} \frac{\exp[2\pi i l n_{ex}(\mu) \pm i\pi/4]}{l^{3/2} |\partial^2 n/\partial k_z^2|^{1/2}_{ex.\,\mu}} \times$$
$$\times \operatorname{sh}^{-1}[2\pi^2 l T n'_{ex}(\mu)] \cos[2\pi l \beta B \xi_{ex} n'_{ex}(\mu)], \quad (63,10)$$

dove $\xi_{ex} = \xi(k_{z\,ex})$. Resta da precisare il senso delle grandezze che figurano in questa espressione e sostituirla nella formula (63,5).

Secondo la definizione (63,7) la funzione $n_{ex}(\varepsilon)$ è legata al valore estremale $S_{ex}(\varepsilon)$ dell'area di sezione della superficie isoenergetica $S(\varepsilon, k_z)$ come funzione di $k_z$, mentre il suo valore per $\varepsilon = \mu$ rappresenta l'area della sezione estremale della superficie di Fermi. A titolo di illustrazione la fig. 15 rappresenta tre sezioni (due massime e una minima) della superficie di Fermi a forma di manubrio ginnico; esse sono perpendicolari alla direzione del campo indicata dalla freccia. La somma su ex nella (63,10) viene effettuata su tutte le sezioni estremali chiuse di tutti i fogli della superficie di Fermi. Per rendere più facile la scrittura delle formule, introduciamo anche la massa ciclotronica dell'elettrone di conduzione che si muove su una traiettoria estremale chiusa. In accordo con la definizione (57,6) questa massa vale

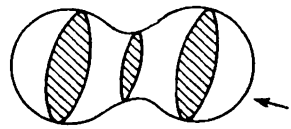


Fig. 15

$$m^* = \frac{\hbar^2}{2\pi} \frac{\partial S(\varepsilon, k_z)}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\mu,\, k_{z\,ex}} = \frac{\hbar^2}{2\pi} S'_{ex}(\mu),$$

dove $S_{ex}(\varepsilon) = S(\varepsilon, k_{z\,ex}(\varepsilon))$; l'ultima uguaglianza è dovuta di nuovo al fatto che nel punto di estremo $\partial S(\varepsilon, k_z)/\partial k_z = 0$.

Come risultato otteniamo infine la seguente formula esprimente la parte oscillatoria del potenziale termodinamico:

$$\tilde{\Omega} = \sum_{ex} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \Omega_l \cos\left\{l \frac{\hbar^2 S_{ex}}{2m\beta B} \pm \frac{\pi}{4}\right\},$$
$$\Omega_l = \frac{2V(m\beta B)^{5/2}}{\pi^{7/2}\hbar^3 m^* l^{5/2}} \left|\frac{\partial^2 S(\mu, k_z)}{\partial k_z^2}\right|^{-1/2}_{ex} \frac{\lambda}{\operatorname{sh}\lambda} \cos\left(\pi l \frac{m^*}{m} \xi_{ex}\right), \quad (63,11)$$
$$\lambda = l\pi^2 T m^*/m\beta B$$

($m$ è la massa vera dell'elettrone, i segni positivo e negativo nell'argomento del coseno si riferiscono rispettivamente ai casi di sezioni minime o massime) [1]).

[1]) Per il gas di elettroni liberi la superficie di Fermi è una sfera di raggio $k_F = \sqrt{2m\mu/\hbar}$, $S_{ex} = \pi k_F^2$, e la formula (63,11) si trasforma nella (60,5) del volume V, § 60.

La magnetizzazione **M** (momento magnetico dell'unità di volume) si calcola come la derivata [1])

$$\mathbf{M} = -\frac{1}{V}\frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{B}}. \tag{63,12}$$

In questo caso vanno soggetti alla derivazione nella (63,11) soltanto i fattori variabili più rapidamente, ossia i coseni. Data l'anisotropia della superficie di Fermi ($m^*$ e $S_{ex}$ dipendono dalla direzione del campo) la direzione di **M** non coincide in generale con quella di **B**. Troviamo che la parte oscillante della magnetizzazione longitudinale (nella direzione del campo) è

$$\tilde{M}_z = \sum_{ex}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1} M_l \operatorname{sen}\left\{\left(l\frac{\hbar^2 S_{ex}}{2m\beta B} \pm \frac{\pi}{4}\right)\right\},$$

$$M_l = \frac{B^{1/2}(m\beta)^{3/2} S_{ex}}{\pi^{7/2} m^* l^{3/2}\hbar}\left|\frac{\partial^2 S(\mu, k_z)}{\partial k_z^2}\right|_{ex}^{-1/2}\frac{\lambda}{\operatorname{sh}\lambda}\cos\left(\pi l\frac{m^*}{m}\xi_{ex}\right). \tag{63,13}$$

Le espressioni (63,11) e (63,13) sono funzioni oscillanti piuttosto complesse del campo magnetico, che contengono, in generale, termini di periodicità diversa: i termini provenienti da ciascuna delle sezioni estremali della superficie di Fermi hanno un loro periodo rispetto alla variabile $1/B$ che vale

$$\Delta\frac{1}{B} = \frac{4\pi m\beta}{\hbar^2 S_{ex}} = \frac{2\pi|e|}{c\hbar S_{ex}}. \tag{63,14}$$

È da notare che questi periodi sono indipendenti dalla temperatura.

---

[1]) Il fatto che la derivazione si effettua rispetto a **B** deve essere precisato. Alla formula (63,12) si può giungere nel seguente modo. La variazione dell'operatore hamiltoniano del sistema per una variazione infinitesima del potenziale vettoriale del campo è

$$\delta\hat{H} = -\frac{1}{c}\int \hat{\mathbf{j}}\delta\mathbf{A}\, dV,$$

dove $\hat{\mathbf{j}}$ è l'operatore densità di corrente (si veda III (115,1)). La variazione del potenziale termodinamico $\Omega$ si ottiene invece calcolando la media di $\delta\hat{H}$ (per dati valori di $\mu$, $T$, $V$). Ma il fatto che la quantizzazione del sistema viene determinata (come è stato mostrato al § 62) non dal campo microscopico esatto **H**, bensì dalla sua media macroscopica **B** significa che anche in $\delta\hat{H}$ si deve intendere con **A** il potenziale vettoriale del campo medio **B**. Quindi, la variazione $\delta\mathbf{A}$ si può portare fuori dal segno di media e allora si ha

$$\delta\Omega = \langle\delta H\rangle = -\frac{1}{c}\int\langle\mathbf{j}\rangle\,\delta\mathbf{A}\, dV.$$

Introducendo ora il momento magnetico in base alla definizione $\langle\mathbf{j}\rangle = c\operatorname{rot}\mathbf{M}$ e integrando per parti, otteniamo

$$\delta\Omega = -\delta\mathbf{B}\int\mathbf{M}\, dV.$$

Quanto alla dipendenza dalla temperatura delle ampiezze delle oscillazioni, essa è determinata dal fattore $\lambda/\mathrm{sh}\,\lambda$. Per $\lambda \gg 1$ le ampiezze decrescono esponenzialmente e le oscillazioni di fatto scompaiono. Per $\lambda \lesssim 1$ il fattore $\lambda/\mathrm{sh}\,\lambda \sim 1$, e l'ordine di grandezza delle ampiezze viene determinato dagli altri fattori in $\Omega_l$ e $M_l$; a questo caso si riferiscono tutte le stime ulteriori.

Per una stima approssimata poniamo

$$m^* \sim m, \quad \mu \sim \hbar^2 k_F^2/m, \quad S \sim k_F^2,$$

dove $k_F \sim 1/a$ sono le dimensioni lineari della superficie di Fermi. Allora otteniamo

$$\tilde{\Omega} \sim V \frac{(m\beta B)^{5/2}}{\hbar^3} \sim Vn\mu \left(\frac{\beta B}{\mu}\right)^{5/2}, \quad \tilde{M} \sim n\beta \left(\frac{\beta B}{\mu}\right)^{1/2}, \tag{63,15}$$

dove $n \sim k_F^3$ è la densità del numero di elettroni. Per quanto riguarda la parte della magnetizzazione dipendente monotonamente dal campo (indichiamola con $\overline{M}$), la si può stimare ponendo

$$\overline{M} \sim \overline{\chi} B \sim \beta^2 \frac{m k_F}{\hbar^2} B \sim n\beta \frac{\beta B}{\mu}, \tag{63,16}$$

dove $\overline{\chi}$ è la parte « monotona » della suscettività magnetica stimata, ad esempio, in base alla formula per la suscettività del gas elettronico in campi deboli (si veda V, § 59). Rispettivamente la parte monotona del potenziale termodinamico è $\overline{\Omega} \sim V\overline{M}B \sim Vn\mu(\beta B/\mu)^2$. Il confronto fra le espressioni scritte mostra che la parte oscillante del potenziale termodinamico è piccola rispetto alla sua parte magnetica monotona,

$$\tilde{\Omega}/\overline{\Omega} \sim (\beta B/\mu)^{1/2} \ll 1,$$

e tanto più rispetto al suo valore $\Omega_0 \sim Vn\mu$ in assenza di campo: $\tilde{\Omega}/\Omega_0 \sim (\beta B/\mu)^{5/2}$. Al contrario, la parte oscillante della magnetizzazione è grande rispetto alla sua parte monotona

$$\tilde{M}/\overline{M} \sim (\mu/\beta B)^{1/2} \gg 1.$$

È da notare a proposito di tutta la teoria delle oscillazioni della magnetizzazione, qui esposta, che essa si riferisce al liquido elettronico in un cristallo perfetto e che non tiene conto dell'eventuale influsso sul risultato dei processi di diffusione degli elettroni di conduzione sui fononi e sui difetti del reticolo (sugli atomi di impurità, ad esempio). Questi processi implicano un'indeterminazione nell'energia degli elettroni: $\Delta\varepsilon \sim \hbar/\tau \sim \hbar v_F/l$ (dove $\tau$ è il tempo fra le collisioni; $l$ la lunghezza del cammino libero; $v_F$ la velocità degli elettroni). Quanto allo smussamento dei livelli energetici, questo processo, a sua volta, livella le oscillazioni della magnetizzazione. La condizione per cui si possono trascurare i processi di diffusione

consiste nell'essere piccola l'indeterminazione $\Delta\varepsilon$ rispetto agli intervalli fra i livelli, cioè deve essere

$$\hbar\omega_B \gg \hbar v_F/l. \tag{63,17}$$

Per $T \to 0$ sono ammissibili (la condizione (63,1)) valori di $B$ piccoli a piacere (più precisamente, limitati dalla sola condizione (63,17)). In questo caso la magnetizzazione $\tilde{M}$ può, in principio, essere commensurabile con l'induzione stessa $B$ (poiché $\tilde{M}/B \sim \sim \bar{\chi}(\mu/\beta B)^{1/2}$), ma ancora prima diventa grande (in modulo) la suscettività magnetica $\chi = \partial M/\partial H$ [1]). Infatti, osservando di nuovo che alla derivazione devono essere soggetti i soli fattori oscillanti, troviamo

$$|\tilde{\chi}| \sim \bar{\chi}(\mu/\beta B)^{3/2}. \tag{63,18}$$

In questa situazione le oscillazioni della magnetizzazione implicano la comparsa, sulla curva della dipendenza dell'intensità macroscopica $H = B - 4\pi M(B)$ dall'induzione $B$, di una successione di flessi rappresentati schematicamente nella fig. 16 (*A. B. Pippard*, 1963). Ma la condizione di stabilità termodinamica richiede che debba essere [2])

$$\left(\frac{\partial H}{\partial B}\right)_{T,\mu} > 0.$$

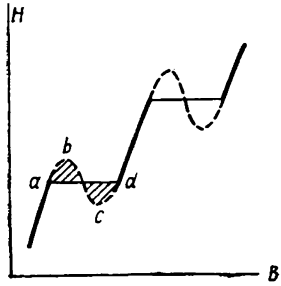


Fig. 16

Perciò sono impossibili stati corrispondenti a tratti della curva del tipo *bc*. La situazione venutasi a creare è completamente analoga a quella che implica la transizione di fase nella sostanza per la comparsa di un'inflessione sulla curva di dipendenza della pressione dal volume (si veda V, §§ 84, 152). Alla curva di dipendenza in equilibrio $H(B)$ corrisponderà in realtà un segmento rettilineo orizzontale *ad* tracciato in modo tale che le due aree tratteggiate nella fig. 16 siano uguali. Quanto ai tratti *ab* e *cd*, essi corrispondono a stati metastabili.

Un campione metallico sia un cilindro con asse diretto lungo il campo esterno $\mathfrak{H}$. Allora l'intensità $H$ all'interno del cilindro coincide con $\mathfrak{H}$, e a misura che quest'ultimo crescerà il corpo verrà soggetto a transizioni di fase consecutive con variazione a salti dell'induzione: ogni volta che si arriva a un punto come *a*, l'induzione

[1]) A scanso di complicazioni inutili, nella considerazione qualitativa seguente prescindiamo dall'influenza dell'anisotropia.

[2]) Si veda VIII, § 18 dove una condizione analoga è dedotta per il caso elettrico.

salta dal valore $B_a$ a quello $B_d$ [1]). Se il campione è una lamina piana in un campo magnetico che le è perpendicolare, il corpo si suddivide in strati alterni (*domini diamagnetici*) con induzione diversa, il che è analogo alla suddivisione di un superconduttore, nello stato intermedio, in strati normali e superconduttori (*J. H. Condon*, 1966). In questo caso il campo esterno $\mathfrak{H}$ coincide con la media dell'induzione magnetica, calcolata rispetto a tutti gli strati. Così, nell'intervallo $B_a < \mathfrak{H} < B_d$ la lamina si suddivide in strati con induzioni $B_a$ e $B_d$; a misura che $\mathfrak{H}$ aumenta, il volume delle seconde cresce a spese di quello dei primi.

## § 64. *Interazione elettrone-fonone*

Finora abbiamo considerato gli elettroni di conduzione nei cristalli a prescindere dalla loro interazione con le oscillazioni del reticolo, cioè con i fononi. Questa interazione esprime il fatto che la deformazione del reticolo modifica il campo in cui si muove l'elettrone; questa modifica è detta *potenziale di deformazione*.

L'interazione elettrone-fonone gioca un ruolo determinante nei fenomeni cinetici che si producono nei semiconduttori e nei metalli; qui ci interesserà la sola influenza qualitativa di questa interazione sullo spettro energetico degli elettroni. Per il suo studio è opportuno evitare complicazioni dovute all'anisotropia del reticolo e alla sua disomogeneità microscopica. In altre parole, consideriamo il mezzo come un liquido isotropo microscopicamente omogeneo, nel quale sono possibili quindi le sole vibrazioni sonore longitudinali.

In prima approssimazione rispetto alla deformazione, rappresentiamo il potenziale corrispondente a questo modello semplificato nella forma

$$U_{\text{def}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho}\int W(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\rho'(\mathbf{r}')\,d^3x', \tag{64,1}$$

dove $\rho'$ è la parte variabile della densità del mezzo (mentre $\rho$ è il suo valore costante d'equilibrio). La funzione $W(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ decresce a distanze dell'ordine di quelle interatomiche $a$. Rendiamo ancora più semplice l'espressione (64,1), osservando che per interazione con fononi di vettori d'onda $k \ll 1/a$ queste distanze si possono supporre nulle, ponendo cioè $W = w\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, dove $w$ è una costante. Allora $U_{\text{def}} = w\rho'(\mathbf{r})/\rho$. Secondo la teoria quantistica, nella rappresentazione della seconda quantizzazione, questo potenziale si scrive come operatore hamiltoniano di interazione elettrone-fonone

$$\hat{H}_{ep} = \frac{w}{\rho}\int \hat{\Psi}^+_\alpha(t,\mathbf{r})\,\hat{\rho}'(t,\mathbf{r})\,\hat{\Psi}_\alpha(t,\mathbf{r})\,d^3x, \tag{64,2}$$

[1]) È supposto che l'energia superficiale della frontiera di separazione fra le fasi sia positiva.

dove gli operatori $\hat{\Psi}$, $\hat{\Psi}^+$ si riferiscono agli elettroni e $\hat{\rho}'$ è l'operatore densità di Heisenberg, che descrive il campo fononico; per i fononi liberi (non interagenti con gli elettroni) questo operatore è dato dalla formula (24,10).

Nel formalismo matematico delle funzioni di Green applicato all'interazione elettrone-fonone, accanto alla funzione di Green elettronica $G$ compare anche una funzione fononica di Green la quale è definita come segue:

$$D(X_1, X_2) \equiv D(X_1 - X_2) = -i \langle T\hat{\rho}'(X_1)\, \hat{\rho}'(X_2) \rangle, \qquad (64,3)$$

dove il prodotto cronologico si sviluppa in base alla regola (31,2) corrispondente al caso dei bosoni. Per i fononi liberi la funzione di Green nella rappresentazione degli impulsi è

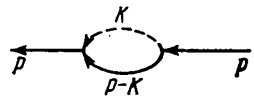
$$D^{(0)}(w, \mathbf{k}) = \frac{\rho k}{2u} \left\{ \frac{1}{\omega - uk + i0} - \frac{1}{\omega + uk - i0} \right\} = \frac{\rho k^2}{\omega^2 - u^2 k^2 + i0} \qquad (64,4)$$

(si veda il problema al § 31; nelle formule intermedie poniamo $\hbar = 1$).

Considerando l'interazione elettrone-fonone come una piccola perturbazione, possiamo costruire la tecnica dei diagrammi basata sull'operatore (64,2), così come abbiamo fatto al § 13 per l'interazione di coppia dei fermioni. Senza ripetere tutti i ragionamenti, formuliamo le regole di costruzione dei diagrammi (nella rappresentazione degli impulsi) [1]).

Elementi fondamentali dei diagrammi sono le linee elettroniche (continue) e fononiche (tratteggiate), a ciascuna delle quali si attribuisce un « quadrimpulso ». Alla curva elettronica con quadrimpulso $P$ è messo in corrispondenza il fattore $iG^{(0)}_{\alpha\beta} = i\delta_{\alpha\beta}G^{(0)}(P)$, che è la funzione di Green degli elettroni liberi. Alla curva fononica di quadrimpulso $K$ è messo in corrispondenza il fattore $iD^{(0)}(K)$ che è la funzione di Green dei fononi liberi. A ciascun punto di vertice del diagramma convergono due linee continue e una tratteggiata; a questo punto si associa il fattore complementare $-iw/\rho$.

Così, la prima correzione alla funzione elettronica di Green è rappresentata dal diagramma [2])




(64,5)

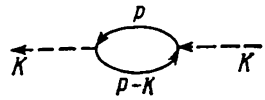
[1]) La struttura dell'espressione (64,2) per l'operatore di interazione elettrone-fonone è analoga a quella dell'operatore di interazione elettrone-fonone in elettrodinamica quantistica. In relazione a ciò sono analoghe anche le regole di tecnica dei diagrammi in ambedue i casi.

[2]) Il diagramma con una linea elettronica chiusa su se stessa (simile al diagramma (13,13a)) manca perché $D^{(0)}(0) = 0$. In questo caso si suppone che

cui corrisponde l'espressione analitica

$$i\delta G(P) = -\frac{w^2}{\rho^2}[G^{(0)}(P)]^2 \int G^{(0)}(P-K)\, D^{(0)}(K) \frac{d^4K}{(2\pi)^4}. \qquad (64,6)$$

La prima correzione alla funzione fononica di Green è rappresentata dal diagramma




(64,7)

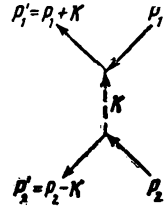
nella forma analitica

$$i\delta D(K) = 2\frac{w^2}{\rho^2}[D^{(0)}(K)]^2 \int G^{(0)}(P)\, G^{(0)}(P-K) \frac{d^4P}{(2\pi)^4} \qquad (64,8)$$

oil coefficiente 2 è dovuto alla convoluzione dei fattori di spin: $\delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\alpha} = 2$; si è tenuto conto anche del fattore —1 legato all'esistenza di un cappio fermionico chiuso; si veda il § 13).

Mostriamo che l'interazione elettrone-fonone nei metalli implica la comparsa dell'« attrazione efficace » fra gli elettroni in prossimità della superficie di Fermi. Essa può essere descritta in modo evidente come risultato dell'emissione di un fonone virtuale da parte di un elettrone e del suo assorbimento da parte di un altro (*J. Bardeen*, 1950; *H. Fröhlich*, 1950).

Consideriamo il diagramma




(64,9)

esprimente la diffusione di due elettroni realizzabile mediante lo scambio di fononi virtuali; i quadrimpulsi $P = (\varepsilon - \mu, \mathbf{p})$ e $K = (\omega, \mathbf{k})$, dove $\mu$ è il potenziale chimico degli elettroni per $T = 0$ coincidente con l'energia limite $\varepsilon_F$. A questo diagramma corrisponde la funzione di vertice

$$\Gamma_{\gamma\delta,\alpha\beta} = \Gamma\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}, \quad i\Gamma = \left(-\frac{iw}{\rho}\right)^2 iD^{(0)}(K),$$

---

il passaggio al limite $\mathbf{k} \to 0$ preceda quello $\omega \to 0$. Ciò esprime il fatto che nello spazio munito di coordinate l'integrazione su $d^3x$ (che esprime qui proprio il passaggio a $\mathbf{k} \to 0$) è già contenuta nella definizione dell'operatore hamiltoniano (64,2) e perciò si effettua prima dell'integrazione sul tempo che compare quando la teoria delle perturbazioni si applica a questo operatore hamiltoniano.

ossia

$$\Gamma = -\frac{w^2k^2}{\rho\,(\omega^2 - u^2k^2 + i0)}, \tag{64,10}$$

dove $\hbar\omega = \varepsilon_1' - \varepsilon_1$, $\hbar\mathbf{k} = \mathbf{p}_1' - \mathbf{p}_1$.

Per ordine di grandezza gli impulsi degli elettroni in prossimità della superficie di Fermi valgono $p \sim p_F \sim \hbar/a$. Alla diffusione degli elettroni di un angolo $\sim 1$ corrisponde l'impulso del fonone $\hbar k \sim \hbar/a$ e la sua energia $\hbar uk \sim \hbar u/a \sim \hbar\omega_D$, dove $\omega_D$ è la frequenza di Debye (per i metalli $\hbar\omega_D \ll \varepsilon_F$). D'altra parte, l'elettrone non può cedere un'energia superiore a $\varepsilon - \varepsilon_F$. Perciò se per ambedue gli elettroni $|\varepsilon - \varepsilon_F| \ll \omega_D$, è chiaro a priori che

$$\Gamma \approx w^2/\rho u^2 > 0. \tag{64,11}$$

Tenendo conto del significato di $\Gamma$ quale ampiezza di diffusione (§ 16), vediamo che il suo segno corrisponde all'attrazione fra le particelle. Sottolineiamo che questo risultato si riferisce unicamente agli elettroni in uno strato relativamente stretto (di larghezza $\sim \hbar\omega_D$ rispetto all'energia) dello spazio degli impulsi in prossimità della superficie di Fermi. Questa circostanza è stata già sfruttata al § 43 per stabilire la grandezza del parametro di taglio nella teoria della superconduttività dei metalli [1]).

## § 65. *Influenza dell'interazione elettrone-fonone sullo spettro elettronico nel metallo*

Consideriamo la questione dell'influenza esercitata dall'interazione elettrone-fonone sullo spettro degli elettroni nel metallo [2]).

Come è stato mostrato al § 14, nel caso dello spettro del tipo di Fermi la correzione alla legge di dispersione $\varepsilon(\mathbf{p})$ (rispetto allo spettro del sistema di fermioni liberi) è determinata dalla differenza

$$\delta\varepsilon(\mathbf{p}) = \Sigma(\varepsilon - \mu, \mathbf{p}) - \Sigma(0, \mathbf{p}), \tag{65,1}$$

dove $\Sigma = G^{(0)-1} - G^{-1}$ è la funzione autoenergetica. Nel caso considerato si tratta della correzione dovuta all'interazione con i fononi e come spettro « imperturbato » serve quello che tiene conto dell'interazione « diretta » delle particelle (elettroni). In accordo con l'espressione (64,6) abbiamo [3])

$$\Sigma(P) = -\delta G^{-1} = \delta G/G^{(0)2} = i\frac{w^2}{\rho^2}\int G^{(0)}(P-K)\,D^{(0)}(K)\frac{d^4K}{(2\pi)^4} \tag{65,2}$$

---

[1]) Quanto alla costante $w$, per avere una stima approssimata per i metalli, si può notare che la variazione dell'energia dell'elettrone deve essere dell'ordine della stessa grandezza ($\sim\varepsilon_F$), quando la variazione della densità è $\rho' \sim \rho$. Di qui $w \sim \varepsilon_F$.

[2]) I risultati qui esposti appartengono a *A. B. Migdal* (1958).

[3]) Poniamo $\hbar = 1$ nelle formule intermedie.

dove ora con $G^{(0)}$ occorre intendere la funzione di Green degli elettroni interagenti. In prossimità del suo polo questa funzione ha la forma

$$G^{(0)}(\varepsilon - \mu, \mathbf{p}) = Z\,[\varepsilon - \mu - v_F^{(0)}(p - p_F) + i0\cdot\mathrm{sign}\,(\varepsilon - \mu)]^{-1} \tag{65,3}$$

(cfr. la (10,2)); l'indice (0) per $v_F$ significa che in questa grandezza non si è tenuto ancora conto dell'interazione elettrone-fonone.

Il nostro scopo è di stimare la grandezza (65,1), cioè l'integrale

$$\delta\varepsilon = \frac{iw^2}{\rho^2}\int\{G^{(0)}(\varepsilon - \mu - \omega, \mathbf{p} - \mathbf{k}) - \\ - G^{(0)}(-\omega, \mathbf{p} - \mathbf{k})\}\,D^{(0)}(\omega, \mathbf{k})\,\frac{d^4K}{(2\pi)^4}. \tag{65,4}$$

Come si vede dai calcoli ulteriori, il contributo fondamentale in questo integrale proviene dal dominio nel quale l'impulso $\mathbf{p} - \mathbf{k}$ e l'energia $\varepsilon - \omega$ (così come le grandezze stesse $\mathbf{p}$ e $\varepsilon$) giacciono in prossimità della superficie di Fermi, cioè $k \ll p_F$, $\omega \ll \mu$. Per questa ragione si può utilizzare l'espressione (65,3) per la funzione $G^{(0)}$.

In coordinate sferiche nello spazio $\mathbf{k}$ con asse lungo $\mathbf{p}$ abbiamo $d^4K = 2\pi k^2\,dk\,d\omega\,d\cos\theta$, dove $\theta$ è l'angolo formato da $\mathbf{k}$ e $\mathbf{p}$. Al posto di $\cos\theta$ introduciamo la variabile $p_1 = |\mathbf{p} - \mathbf{k}|$; osservando che $p_1^2 = p^2 + k^2 - 2pk\cos\theta$, abbiamo

$$d^4K = 2\pi k^2 dk\,d\omega p_1\,dp_1/pk \approx 2\pi k\,dk\,d\omega\,dp_1$$

(abbiamo posto $p_1 \approx p \approx p_F$).

Nell'espressione integranda della formula (65,4) da $p_1$ dipende il solo fattore fra parentesi graffe pari a

$$\{\ldots\} = -(\varepsilon - \mu)\,Z\,[\varepsilon - \mu - \omega - v_F^{(0)}(p_1 - p_F) + \\ + i0\cdot\mathrm{sign}\,(\varepsilon - \mu - \omega)]^{-1} \times \\ \times [-\omega - v_F^{(0)}(p_1 - p_F) - i0\cdot\mathrm{sign}\,\omega]^{-1}.$$

Data la convergenza rapida dell'integrale in $d(p_1 - p_F)$ si può estendere l'integrazione a $\pm\infty$; introducendo la variabile $\eta = v_F^{(0)}(p_1 - p_F)$, otteniamo l'integrale

$$\int\{\ldots\}\,dp_1 = \\ = -\frac{(\varepsilon - \mu)\,Z}{v_F^{(0)}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\eta}{[\eta - (\varepsilon - \mu - \omega) - i0\cdot\mathrm{sign}\,(\varepsilon - \mu - \omega)]\,[\eta + \omega + i0\cdot\mathrm{sign}\,\omega]}.$$

Se ambedue i poli dell'espressione integranda si trovano da una stessa parte dell'asse reale, l'integrale si annulla (ciò si vede immediatamente chiudendo il cammino di integrazione nell'altro

semipiano). Pertanto l'integrale è diverso da zero all'unica condizione che $\varepsilon - \mu > \omega > 0$ o $\varepsilon - \mu < \omega < 0$; nel primo caso l'integrale vale $-2\pi i Z/v_F^{(0)}$, nel secondo $2\pi i Z/v_F^{(0)}$. Tenendo anche conto della parità della funzione $D^{(0)}(\omega, \mathbf{k})$ rispetto alla variabile $\omega$, troviamo così

$$\delta\varepsilon = \frac{Zw^2}{8\pi^2\rho u v_F^{(0)}} \int \int_0^{|\varepsilon-\mu|} \left[\frac{1}{\omega - uk + i0} - \frac{1}{\omega + uk - i0}\right] k^2\, d\omega\, dk. \qquad (65,5)$$

Le parti reale ed immaginaria di questa espressione determinano rispettivamente la correzione allo spettro delle quasi-particelle (degli elettroni di conduzione) e il loro smorzamento. Consideriamo dapprima lo smorzamento.

Separando nell'espressione (65,5) la parte immaginaria secondo la regola (8,11), troviamo

$$-\operatorname{Im}\delta\varepsilon = \frac{Zw^2}{8\pi\rho u v_F^{(0)}} \int k^2\, dk; \qquad (65,6)$$

l'integrazione su $k$ è estesa al dominio da 0 a $|\varepsilon - \mu|/u$ in cui il polo $\omega = uk$ dell'espressione integranda nella (65,5) giace nell'intervallo compreso fra 0 e $|\varepsilon - \mu|$. In tal modo abbiamo (in unità usuali)

$$-\operatorname{Im}\delta\varepsilon = \frac{Zw^2|\varepsilon-\mu|^3}{24\pi\hbar^3\rho u^4 v_F^{(0)}}. \qquad (65,7)$$

Per stimare in modo grossolano questa grandezza, osserviamo che i parametri $v_F^{(0)}$ e $w$ sono di origine elettronica e si esprimono, come ordine di grandezza, soltanto mediante le distanze interatomiche $a$ e la massa dell'elettrone $m$: $v_F^{(0)} \sim p_F/m \sim \hbar/am$, $w \sim \varepsilon_F \sim \hbar^2/ma^2$ (si veda la nota alla pag. 328). La densità $\rho$ e la velocità del suono $u$ dipendono invece anche dalla massa degli ioni $M$; per di più, $\rho \backsim M$, $u \backsim M^{-1/2}$ in modo che $\rho u^4 \backsim 1/M$. Perciò la stima dello smorzamento si può scrivere nella seguente forma:

$$-\operatorname{Im}\delta\varepsilon \sim |\varepsilon - \mu|^3 (\hbar\omega_D)^{-2}, \qquad (65,8)$$

dove la frequenza di Debye vale $\omega_D \sim u/a \backsim M^{-1/2}$.

A rigore, la stima (65,8) si riferisce ai valori $|\varepsilon - \mu| \ll \hbar\omega_D$, per i quali l'integrazione nella (65,6) è estesa al dominio $k < |\varepsilon - \mu|/u\hbar \ll \omega_D/u$, dove è effettivamente applicabile la legge di dispersione dei fononi $\omega = ku$. Ma per una stima grossolana rispetto all'ordine di grandezza si può applicare la (65,8) anche alla frontiera del dominio per $\varepsilon - \mu \sim \hbar\omega_D$, dove si ottiene

$$-\operatorname{Im}\delta\varepsilon \sim \hbar\omega_D \sim |\varepsilon - \mu|. \qquad (65,9)$$

Infine, per $\varepsilon - \mu \gg \hbar\omega_D$ il dominio di integrazione nella (65,6) è indipendente da $\varepsilon - \mu$, poiché il polo $\omega = uk \lesssim \omega_D$ giace sempre

nell'intervallo fra 0 e $\varepsilon - \mu$. In questo caso $\int k^2 dk \sim (\omega_D/u)^3$ e lo smorzamento è

$$-\mathrm{Im}\,\delta\varepsilon \sim \hbar\omega_D \ll \varepsilon - \mu. \tag{65,10}$$

Le espressioni (65,8-10) definiscono uno smorzamento specifico dovuto all'emissione di fononi da parte degli elettroni [1]). Si vede che in prossimità diretta della superficie di Fermi per $|\varepsilon - \mu| \ll \hbar\omega_D$ lo smorzamento è piccolo ($|\mathrm{Im}\,(\varepsilon - \mu)| \ll |\varepsilon - \mu|$) in accordo con la (65,8) in modo che il concetto di quasi-particelle, ossia di elettroni di conduzione, ha un significato ben chiaro. Nel dominio $\varepsilon - \mu \sim \hbar\omega_D$, invece, lo smorzamento della quasi-particella diventa commensurabile con la sua stessa energia per cui lo spettro si smussa in misura notevole e perde senso. Tuttavia, a distanze ancora più grandi sopra la superficie di Fermi per $\varepsilon - \mu \gg \hbar\omega_D$ (ma, ovviamente, come prima $|\varepsilon - \mu| \ll \mu$), lo smorzamento, secondo la (65,10), pur rimanendo lo stesso in modulo, diventa di nuovo piccolo rispetto all'energia $\varepsilon - \mu$ e le quasi-particelle riacquistano un significato determinato. È ovvio che, accanto allo smorzamento fononico degli elettroni di conduzione, esiste sempre anche uno smorzamento per gli urti fra gli elettroni. Questo smorzamento, proprio di ogni liquido di Fermi normale (§ 1), è proporzionale a $(\varepsilon - \mu)^2$ e come ordine di grandezza vale $\sim (\varepsilon - \mu)^2/\mu$, cioè è sempre piccolo nel dominio di applicabilità della teoria.

Stimiamo ora la correzione alla parte reale di $\varepsilon$, cioè allo spettro stesso.

La parte reale dell'integrale in $d\omega$ nell'espressione (65,5) è data dal suo valore principale

$$\mathrm{Re}\int_0^{|\varepsilon-\mu|} D^{(0)}(\omega, \mathbf{k})\, d\omega = \frac{\rho k}{2u}\,\mathrm{P}\int_0^{|\varepsilon-\mu|}\left\{\frac{1}{\omega - uk} - \frac{1}{\omega + uk}\right\} d\omega =$$

$$= \frac{\rho k}{2u}\ln\left|\frac{\varepsilon - \mu - uk}{\varepsilon - \mu + uk}\right|.$$

Perciò Re $\delta\varepsilon$ vale (in unità comuni)

$$\mathrm{Re}\,\delta\varepsilon = \frac{Zw^2}{8\pi^2\rho u v_F^{(0)}}\int k^2 \ln\left|\frac{\varepsilon - \mu - \hbar uk}{\varepsilon - \mu + \hbar uk}\right| dk. \tag{65,11}$$

Per $\varepsilon - \mu \gg \hbar\omega_D$ il logaritmo nell'espressione integranda vale $\sim \hbar uk/(\varepsilon - \mu)$, e la stima di tutto l'integrale è $\hbar u k^3_{\max}/(\varepsilon - \mu) \sim \hbar u/a^3\,(\varepsilon - \mu)$. Osservando inoltre che, in virtù dell'esistenza del

[1]) L'energia si conserva quando la quasi-particella genera un fonone di piccola frequenza, e ciò è espresso dall'uguaglianza $(\partial\varepsilon/\partial\mathbf{k})\,\delta\mathbf{k} \equiv \mathbf{v}\,\delta\mathbf{k} = u\,\delta k$, che può essere verificata solo per $v > u$. Questa condizione si verifica sempre per i metalli poiché $v_F \gg u$.

fattore $\rho$ al denominatore della formula (65,11), tutta questa espressione $\sim 1/M$, otteniamo la seguente stima:

$$\mathrm{Re}\ \delta\varepsilon \sim (\hbar\omega_D)^2/(\varepsilon - \mu) \ll |\ \varepsilon - \mu\ |.$$

Quindi, la correzione allo spettro in questo caso è relativamente piccola, cosicché lo spettro è dato dall'espressione

$$\varepsilon - \mu \approx v_F^{(0)}\ (p - p_F) \text{ per } \varepsilon - \mu \gg \hbar\omega_D, \qquad (65,12)$$

contenente il valore « imperturbato » della velocità $v_F^{(0)}$ sulla superficie di Fermi.

Nel dominio $\varepsilon - \mu \ll \hbar\omega_D$, invece, il logaritmo nella (65,11) vale $\sim (\varepsilon - \mu)/\hbar uk$, e la stima dell'integrale si esprime come $(\varepsilon - \mu)\ k_{\max}^2/\hbar u \sim (\varepsilon - \mu)/\hbar u a^2$. Tutta l'espressione (65,11) risulta quindi proporzionale a $\varepsilon - \mu$ con un coefficiente indipendente dalla massa dello ione $M$ (poiché il prodotto $\rho u^2$ non dipende da $M$). Ciò significa che lo spettro in questo dominio sarà di nuovo dello stesso tipo

$$\varepsilon - \mu \approx v_F\ (p - p_F) \quad \text{per} \quad |\ \varepsilon - \mu\ | \ll \hbar\omega_D, \qquad (65,13)$$

ma con la velocità $v_F$ che differisce da $v_F^{(0)}$ per una quantità uguale al suo ordine di grandezza [1]).

Quindi, lo spettro del tipo di Fermi per gli elettroni nei metalli è caratterizzato da due valori distinti della velocità, $v_F$ e $v_F^{(0)}$, di cui uno si trova in diretta prossimità della superficie di Fermi ($|\ \varepsilon - \mu\ | \ll \hbar\omega_D$), e l'altro per $|\ \varepsilon - \mu\ | \gg \hbar\omega_D$. Nelle proprietà termodinamiche dei metalli a temperature basse ($T \ll \hbar\omega_D$) figura il parametro $v_F$ dell'espressione (65,13). Per frequenze $\omega \gg \omega_D$ la velocità $v_F^{(0)}$ definisce fenomeni, quali le proprietà ottiche di un metallo.

## PROBLEMA

Determinare lo smorzamento dei fononi di onda lunga ($k \ll p_F$) in un metallo a causa del loro assorbimento da parte degli elettroni.

*Soluzione.* La correzione alle funzioni di Green per i fononi è data, in accordo con la (64,8), dall'integrale

$$i\delta D^{-1}(K) = -\frac{2w^2}{\rho^2} \int G^{(0)}(P)\, G^{(0)}(P-K)\, \frac{d^4P}{(2\pi)^4}, \qquad P = (p_0,\ \mathbf{p}), \qquad K = (\omega,\ \mathbf{k}).$$

Tuttavia, nelle funzioni $G$ si deve tener conto delle correzioni dovute all'interazione degli elettroni con i fononi di onda corta. In accordo con quanto detto nel testo, queste correzioni conducono semplicemente alla sostituzione di $G^{(0)}$

---

[1]) S'intende che a queste condizioni l'applicazione della prima approssimazione della teoria delle perturbazioni è, a rigore, non corretta. Tuttavia, le approssimazioni successive non possono alterare il carattere stesso del risultato ottenuto: quando la prima correzione è dell'ordine dell'unità, le altre correzioni saranno dello stesso ordine.

con la funzione $G$, che differisce dalla (65,3) per la sola sostituzione della velocità $v_F^{(0)}$ con $v_F$ e della costante di rinormalizzazione $Z$ con un'altra costante $Z'$. Nel caso di $K$ piccoli si può usare la formula (17,10) per il prodotto $G^{(0)}(P) \times \times G^{(0)}(P-K)$. L'integrazione in $dp_0\, dp$ si riduce alla eliminazione delle funzioni $\delta$; resta ancora l'integrazione in $d\cos\theta$ ($\theta$ è l'angolo formato da $\mathbf{p}$ e $\mathbf{k}$):

$$\delta D^{-1}(\omega, k) = -\frac{Z'^2 w^2 p_F^2 k}{2\pi^2\rho^2} \cdot \int_{-1}^{1} \frac{\cos\theta\, d\cos\theta}{\omega - v_F k\cos\theta + i0}$$

(poniamo $\omega > 0$). Il polo $\cos\theta = \omega/kv_F$ si trova all'interno del dominio di integrazione (poiché $v_F > u$), e la parte immaginaria dell'integrale è

$$\operatorname{Im}\delta D^{-1} = \frac{Z'^2 w^2 p_F^2 \omega}{2\pi\rho^2 v_F^2 k}.$$

La legge di dispersione dei fononi è definita come radice dell'equazione $D^{(0)-1} + \delta D^{-1} = 0$ da cui ricaviamo (in unità comuni)

$$\omega = uk(1 - i\alpha), \qquad \alpha = \frac{Z'^2 w^2 p_F^2}{4\pi\hbar^3 \rho u v_F^2}$$

(trascuriamo la correzione alla parte reale di $\omega$). Il prodotto $\rho u \backsim \sqrt{M}$; perciò, in un'approssimazione grossolana, $\alpha \sim \sqrt{m/M}$, vale a dire che lo smorzamento è sempre piccolo.

## § 66. *Spettro elettronico dei dielettrici solidi*

La proprietà caratteristica dello spettro energetico elettronico di un cristallo dielettrico non magnetico è che già il primo livello eccitato si trova a distanza finita dal livello fondamentale; in altre parole, fra il livello fondamentale e lo spettro dei livelli eccitati esiste una fessura energetica (dell'ordine di grandezza di alcuni elettronvolt per i dielettrici comuni).

L'eccitazione elementare nel cristallo dielettrico può essere descritta ovviamente come lo stato eccitato di un atomo, che, però, non si può attribuire a un determinato atomo; la simmetria traslatoria del reticolo implica, come sempre, una « collettivizzazione » dell'eccitazione che si propaga nel cristallo, come se saltasse da un atomo all'altro. Come negli altri casi, queste eccitazioni si possono considerare quasi-particelle (dette in questo caso *eccitoni*) con energia e quasi-impulso determinati. Come tutte le quasi-particelle che possono comparire a una a una, gli eccitoni godono di momento numerico intero e ubbidiscono alla statistica di Bose [1]).

Per un dato quasi-impulso $\mathbf{k}$ l'energia dell'eccitone può assumere una serie discreta di valori $\varepsilon_s(\mathbf{k})$. Quando il quasi-impulso assume valori in una sola cella del reticolo inverso, ciascuna delle funzioni

[1]) È stato *Ja. I. Frenkel* a introdurre per la prima volta il concetto di eccitoni (1931).

$\varepsilon_s$ (**k**) descrive una *zona* di valori dell'energia dell'eccitone; le diverse zone possono in parte sovrapporsi l'una all'altra. I valori minimi di ciascuna delle funzioni $\varepsilon_s$ (**k**) sono diversi da zero.

Oltre agli eccitoni, nel dielettrico possono esistere eccitazioni elettroniche di altro tipo, che si possono considerare come risultato dell'ionizzazione di alcuni atomi. Ogni ionizzazione di questo tipo implica la comparsa nel dielettrico di due quasi-particelle propagantisi indipendentemente, ossia dell'elettrone di conduzione e della « buca ». Quest'ultima rappresenta la mancanza di un elettrone nell'atomo e perciò si comporta come una particella di carica positiva. Anche qui, parlando del moto dell'elettrone e della « buca », intendiamo in realtà alcuni stati eccitati collettivi degli elettroni del dielettrico, accompagnati (contrariamente agli stati eccitonici) dal trasporto della carica elementare negativa o positiva.

Gli elettroni e le buche hanno spin semintero e ubbidiscono alla statistica di Fermi. Sottolineiamo, tuttavia, che lo spettro elettronico e di buca del dielettrico è diverso dallo spettro elettronico del tipo di Fermi nei metalli. Per quest'ultimo è caratteristica l'esistenza della superficie limite di Fermi nello spazio **k**, nell'intorno della quale giacciono i quasi-impulsi degli elettroni. Nel caso considerato non esiste, in generale, una superficie simile, e l'elettrone e la buca che compaiono contemporaneamente possono avere quasi-impulsi arbitrari.

Si può vedere una distinzione ancora più profonda fra i due tipi di spettri, considerando lo smorzamento delle eccitazioni elementari. Nel liquido di Fermi, ogni quasi-particella all'esterno della superficie di Fermi può generare coppie di nuove eccitazioni (particella e buca) e perciò ha tempo di vita finito, che decresce rapidamente allontanandosi dalla superficie di Fermi (per di più, l'elettrone nel metallo può emettere fononi; si veda il § 65). Quanto allo smorzamento del singolo elettrone (o della buca) del dielettrico in un reticolo perfetto (per $T = 0$) esso è rigorosamente nullo nell'intervallo finito di energie sopra il suo valore minimo [1]). Infatti, la formazione della coppia elettrone-buca richiede in ogni caso (data l'esistenza della fessura energetica $\Delta$, si veda più avanti) un consumo di energia finito. L'emissione di un fonone (acustico) da parte di una quasi-particella è possibile nel solo caso in cui la velocità $v$ della quasi-particella sia non inferiore alla velocità del suono $u$ (si veda la nota alla pag. 331).

I valori possibili dell'energia degli elettroni di conduzione $\varepsilon^{(e)}$ (**k**) e delle buche $\varepsilon^{(h)}$ (**k**) riempiono anch'essi le zone. Di solito si chiama larghezza della fessura energetica nel dielettrico la somma $\Delta = \varepsilon^{(e)}_{\min} + \varepsilon^{(h)}_{\min}$ dei valori minimi possibili delle energie dell'elet-

[1]) Lo smorzamento a temperature finite avviene, ovviamente, sempre per diffusione sulle altre quasi-particelle.

trone e della buca. Poiché l'elettrone e la buca compaiono o scompaiono contemporaneamente, proprio questa somma gode di significato reale e non le grandezze $\varepsilon_{\min}^{(e)}$ ed $\varepsilon_{\min}^{(h)}$ considerate separatamente; di solito è supposto che $\varepsilon_{\min}^{(h)} = 0$. I valori minimi dell'energia possono essere raggiunti dagli elettroni e dalle buche per un valore medesimo o diverso del quasi-impulso $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$; nel primo caso la fessura è detta *diretta*, nel secondo *indiretta*. Se i livelli nella zona sono non degeneri (o degeneri doppiamente solo rispetto allo spin a causa della simmetria rispetto all'inversione di tempo), allora le funzioni $\varepsilon(\mathbf{k})$ nell'intorno del loro minimo hanno la forma

$$\varepsilon^{(e)}(\mathbf{k}) = \Delta + \frac{1}{2} m_{ik}^{(e)-1} q_i q_k, \quad \varepsilon^{(h)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} m_{ik}^{(h)-1} q_i q_k, \qquad (66,1)$$

dove $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$, $m_{ik}^{(e)}$ e $m_{ik}^{(h)}$ sono i tensori delle masse efficaci degli elettroni e delle buche.

Nella letteratura la zona elettronica si chiama spesso *zona di conduzione*, e al posto di zona di buca si suole parlare di *zona di valenza* che, nello stato fondamentale del cristallo, è completamente riempita di elettroni. In questo caso, la comparsa della coppia di quasi-particelle elettrone-buca è considerata come il risultato del passaggio dell'elettrone dalla zona di valenza a quella di conduzione con una buca nel luogo lasciato.

A distanze grandi (rispetto a quelle atomiche) l'elettrone e la buca si attraggono secondo la legge di Coulomb. Pertanto essi possono formare stati legati. L'insieme dell'elettrone e della buca legati rappresenta una quasi-particella elettricamente neutra, ossia l'eccitone. Per un dato valore del quasi-impulso agli stati legati corrispondono livelli energetici discreti del sistema elettrone + buca; ogni livello corrisponde a una delle zone energetiche eccitoniche. Le energie degli eccitoni sono disposte così sotto le energie delle eccitazioni elettroniche e di buca (la fessura energetica, intesa nel senso indicato all'inizio del presente paragrafo, non coincide perciò con la grandezza $\Delta$ e le è inferiore di una grandezza pari all'energia massima di legame dell'eccitone) [1]).

I livelli energetici dell'eccitone si possono calcolare facilmente nel caso limite di stati debolmente legati in cui le distanze medie fra l'elettrone e la buca sono grandi rispetto alla costante di reticolo $a$; un eccitone di questo tipo si chiama *eccitone di Wannier-Motta*. Nel caso limite inverso in cui la distanza fra l'elettrone e la buca è dell'ordine di quella atomica, l'eccitone porta il nome di *eccitone di Frenkel*; si intende che l'eccitone di Frenkel si può considerare come stato legato di un elettrone e di una buca in modo puramente formale.

---

[1]) Gli stati eccitonici godono, però, di un tempo finito di vita, poiché l'elettrone e la buca possono ricombinarsi con emissione di fonone o fotone, ad esempio.

Consideriamo un cristallo dielettrico di simmetria cubica. Nel caso dell'eccitone di Wannier-Motta si può ritenere che l'elettrone e la buca si attraggono secondo la legge di Coulomb, mentre il ruolo degli altri atomi del reticolo si riduce unicamente a formare uno sfondo dielettrico omogeneo che indebolisce l'interazione di $\varepsilon$ volte, essendo $\varepsilon$ la permeabilità dielettrica del cristallo (considerata per valori delle frequenze corrispondenti, in ordine di grandezza, all'energia di legame dell'eccitone); in altre parole, l'energia di interazione fra l'elettrone e la buca si scrive nella forma $U = -e^2/\varepsilon r$. Sia la fessura dello spettro diretta, e per semplicità supponiamo che i minimi dell'energia dell'elettrone e della buca giacciano per $\mathbf{k} = 0$. In un cristallo cubico i tensori delle masse efficaci si riducono alle costanti scalari $m_e$ e $m_h$ in modo che

$$\varepsilon^{(e)}(\mathbf{k}) = \Delta + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e}, \quad \varepsilon^{(h)}(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_h}. \tag{66,2}$$

Alla fine del § 56 è stato rilevato che il moto della particella in un reticolo cristallino sottoposto a un campo elettrico esterno, variabile lentamente nello spazio, è descritto dall'equazione di Schrödinger con un operatore hamiltoniano, in cui la funzione $\varepsilon(\mathbf{k})$ funge da energia cinetica. Siccome in questo caso le funzioni $\varepsilon^{(e)}(\mathbf{k}) - \Delta$ ed $\varepsilon^{(h)}(\mathbf{k})$ coincidono in forma con le energie cinetiche delle particelle libere comuni, allora l'equazione di Schrödinger del sistema in questione coincide formalmente con quella per un sistema di due particelle interagenti secondo la legge di Coulomb, cioè con l'equazione di Schrödinger per il problema dell'atomo d'idrogeno. Per questa ragione possiamo immediatamente scrivere i livelli energetici del sistema, cioè l'energia dell'eccitone nella forma

$$\varepsilon_n^{(\mathrm{ex})}(\mathbf{k}) - \Delta = \frac{\hbar^2 k^2}{2(m_e + m_h)} - \frac{me^4}{2\varepsilon^2 \hbar^2 n^2} \tag{66,3}$$

(*G. H. Wannier*, 1937). Il primo termine in questa espressione è l'energia del moto dell'eccitone « come un tutt'uno » di quasi-impulso $\mathbf{k}$. Il secondo termine, invece, dà l'energia di legame dell'elettrone e della buca nell'eccitone ($m = m_e m_h/(m_e + m_h)$ è la massa ridotta del sistema). Per $\mathbf{k}$ dato i livelli energetici discreti del sistema diventano più densi all'aumentare dell'energia verso la frontiera dello spettro continuo. La condizione di applicabilità della formula (66,3) è che il « raggio orbitale » $r_{\mathrm{ex}} \sim \hbar^2 \varepsilon n^2/me^2 \gg a$ sia sufficientemente grande. Questa condizione è verificabile a priori per grandi $n$, ma nei cristalli con $\varepsilon$ grande può essere soddisfatta anche per $n \sim 1$ [1]).

---

[1]) È interessante notare che in prossimità dell'estremo superiore (massimo) della zona, dove le masse efficaci sono negative, due elettroni (o due buche) possono formare stati legati. L'energia di questi stati giace nella banda proibita sopra il massimo dell'energia totale degli elettroni.

Per concludere questo paragrafo, torniamo all'affermazione del § 61, secondo la quale per la densità del numero di elettroni di conduzione nei semimetalli esiste una frontiera inferiore.

Nel dielettrico, dove per $T = 0$ non esistono elettroni e buche, la possibilità di formazione di stati legati non significa altro che la comparsa di nuovi rami dello spettro energetico. In un metallo compensato, invece, questa possibilità significherebbe che lo stato con elettroni e buche liberi non è il più basso, vale a dire che lo spettro di tipo metallico sarebbe instabile. La possibilità di formazione di stati legati è eliminata dalle altre quasi-particelle che si trovano « fra » l'elettrone e la buca e fungono da schermo all'interazione coulombiana. In altre parole, la distanza media fra le quasi-particelle deve essere dell'ordine di grandezza della dimensione dell'eccitone $r_{ex}$ (nel suo stato fondamentale) o più piccola. Sottolineiamo che il limite inferiore delle densità ammissibili per un metallo del numero di elettroni e di buche, stabilito da questa condizione, cala al diminuire delle loro masse efficaci.

## § 67. *Elettroni e buche nei semiconduttori*

Lo spettro energetico dei cristalli semiconduttori puri (o, come si suol dire, *propri*) differisce da quello dei dielettrici soltanto per un rapporto quantitativo, cioè per valori più piccoli della fessura $\Delta$; è la ragione per cui, a temperature ordinarie, il semiconduttore (a differenza del dielettrico) ha una notevole densità di portatori di corrente. È chiaro che questa distinzione ha carattere convenzionale e, fra l'altro, dipende dal dominio di temperature che ci interessano [1]. Nei semiconduttori *impuri* (o *leghe* semiconduttrici) sono gli atomi delle impurità a servire come sorgente complementare di elettroni e buche; per le impurità la fessura energetica, rispetto alla cessione dell'elettrone al reticolo (*impurità donatrice*) o alla sua cattura dal reticolo (*impurità accettrice*), risulta essere inferiore alla fessura energetica dello spettro fondamentale.

Esaminiamo in dettaglio la questione del legame esistente fra la grandezza della fessura $\Delta$ e la densità di elettroni di conduzione e di buche nel semiconduttore (o nel dielettrico).

La comparsa o la scomparsa a coppie dell'elettrone ($e$) e della buca ($h$) si può considerare, dal punto di vista termodinamico, come « reazione chimica » $e + h \rightleftarrows 0$ (lo stato fondamentale del cristallo funge da « vuoto ». In base alle regole generali (cfr. V, § 101) la condizione di equilibrio termodinamico di questa reazione si scrive nel seguente modo:

$$\mu_e + \mu_h = 0, \tag{67,1}$$

[1]) Diamo i valori della fessura energetica $\Delta$ per alcuni semiconduttori: Si-1,17 eV, Ge-0,74 eV, InSb-0,24 eV, GaAs-1,52 eV, PbS-0,29 eV. Per un dielettrico tipico il diamante $\Delta = 5{,}4$ eV.

dove $\mu_e$ e $\mu_h$ sono i potenziali chimici degli elettroni e delle buche. Data la densità relativamente piccola di elettroni ($n_e$) e di buche ($n_h$) nel semiconduttore (per $T \ll \Delta$), la distribuzione di Fermi per essi si riduce con grande precisione alla distribuzione di Boltzmann in modo che gli elettroni e le buche formano un gas classico [1]). Dalla condizione (67,1) deriva allora in modo comune (si veda V, § 101) la legge delle masse agenti, secondo la quale il prodotto di densità in equilibrio vale

$$n_e n_h = K(T), \tag{67,2}$$

dove a secondo membro figura una funzione della temperatura, dipendente unicamente dalle proprietà del reticolo fondamentale, sugli atomi del quale avviene la creazione e l'annichilazione di elettroni e buche; questa funzione è indipendente dalla presenza o meno delle impurità. Calcoliamo la funzione $K(T)$ supponendo, per fissare le idee, che le energie degli elettroni e delle buche siano funzioni quadratiche del quasi-impulso (66,1).

La distribuzione (nell'unità di volume) dei quasi-impulsi degli elettroni è data dalla distribuzione di Boltzmann

$$\exp\left(\frac{\mu_e - \varepsilon_e(\mathbf{k})}{T}\right) 2\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

(il fattore 2 tiene conto delle due direzioni dello spin). Il passaggio alla distribuzione delle energie si realizza mediante la sostituzione

$$2\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3} \to \frac{\sqrt{2}\,m_e^{3/2}}{\pi^2\hbar^3}\sqrt{\varepsilon_e - \Delta}\,d\varepsilon_e,$$

dove $m_e = (m_1 m_2 m_3)^{1/3}$, e $m_1$, $m_2$, $m_3$ sono i valori principali del tensore delle masse efficaci $m_{ik}^{(e)}$. Il numero totale di elettroni nell'unità di volume è, quindi,

$$n_e = \frac{\sqrt{2}\,m_e^{3/2}}{\pi^2\hbar^3}\,e^{\mu_e/T}\int_\Delta^\infty \sqrt{\varepsilon_e - \Delta}\,e^{-\varepsilon_e/T}\,d\varepsilon_e$$

(essendo rapida la convergenza, si può estendere l'integrazione all'infinito). Calcolando l'integrale, troviamo

$$n_e = 2\left(\frac{m_e T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{(\mu_e - \Delta)/T}. \tag{67,3}$$

Analogamente otteniamo

$$n_h = 2\left(\frac{m_h T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{\mu_h/T}. \tag{67,4}$$

[1]) Le densità di elettroni e buche nei semiconduttori a temperature comuni sono $10^{13}$-$10^{17}$ cm$^{-3}$, mentre nei metalli valgono $10^{22}$-$10^{23}$ cm$^{-3}$.

Infine, moltiplicando le due espressioni e tenendo conto della (67,1), otteniamo il risultato cercato

$$n_e n_h = \frac{(m_e m_h)^{3/2}}{2\pi^3 \hbar^6} T^3 e^{-\Delta/T}. \tag{67,5}$$

In un semiconduttore proprio, in cui tutti gli elettroni e le buche sono comparsi a coppie, abbiamo

$$n_e = n_h = \frac{(m_e m_h)^{3/4}}{\sqrt{2}\,\pi^{3/2}\hbar^3} T^{3/2} e^{-\Delta/2T}. \tag{67,6}$$

Eguagliando le espressioni (67,6) e (67,3), otteniamo il potenziale chimico degli elettroni [1])

$$\mu_e = \frac{\Delta}{2} + \frac{3T}{4} \ln \frac{m_h}{m_e}. \tag{67,7}$$

Per quanto riguarda il contributo degli elettroni e delle buche alle grandezze termodinamiche del semiconduttore, per $T \ll \Delta$ esso è esponenzialmente piccolo. Tenendo presente che per la generazione di una coppia elettrone-buca occorre un'energia vicina a $\Delta$, troviamo che il contributo da parte della coppia elettrone-buca all'energia interna vale $E_{eh} \approx V n_e \Delta$ con $n_e$ proveniente dalla (67,6). Si può generalmente trascurare questa grandezza rispetto al contributo all'energia del cristallo proveniente dal reticolo.

## § 68. *Spettro elettronico in prossimità di un punto di degenerazione*

In questo paragrafo mostriamo su esempi semplici in che modo si può trovare, partendo da considerazioni di simmetria, la forma dello spettro energetico degli elettroni o delle buche in un semiconduttore (o in un dielettrico) in determinati punti dello spazio **k** (reticolo inverso) individuati per la loro simmetria [2]).

Consideriamo un reticolo appartenente alla classe cristallina cubica $O_h$ e studiamo le proprietà dello spettro energetico in prossimità del punto $\mathbf{k} = 0$, vertice della cella cubica del reticolo inverso; questo punto gode dell'autosimmetria del gruppo puntuale totale $O_h$.

Quale primo esempio consideriamo lo spettro trascurando lo spin elettronico e supponiamo che nel punto stesso $\mathbf{k} = 0$ il livello energetico della zona sia doppiamente degenere riferendosi alla

---

[1]) Nella letteratura questa grandezza spesso si chiama livello di Fermi. Sottolineiamo, però, che il potenziale chimico degli elettroni nel semiconduttore non ha per niente quel significato di energia limite, che ha nei metalli.

[2]) Se lo spin elettronico viene trascurato, la questione sarà formalmente identica a quella dello spettro energetico dei fononi nel cristallo; si veda V, § 136.

rappresentazione irriducibile $E_g$ del gruppo $O_h$ [1]). Uscendo dal punto $\mathbf{k} = 0$ la degenerazione si elimina; il problema consiste nel trovare tutti i rami della legge di dispersione $\varepsilon(\mathbf{k})$ nell'intorno di questo punto.

Al § 59 è stato detto in che modo si può considerare come perturbazione una deviazione da un certo punto $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ nello spazio $\mathbf{k}$. La forma concreta dell'operatore di perturbazione è qui inessenziale. È sufficiente conoscere la sola struttura delle espressioni che definiscono la correzione all'energia in ogni ordine rispetto alla piccola grandezza $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ (nel caso considerato $\mathbf{k}_0 = 0$ cosicché $\mathbf{q} \equiv \mathbf{k}$). Nel primo ordine, le correzioni sono definite dall'equazione secolare composta degli elementi matriciali (per le transizioni fra gli stati appartenenti a un medesimo livello degenere) di un operatore della forma $\mathbf{k}\hat{\gamma}$, dove $\hat{\gamma}$ è un operatore vettoriale. Nel caso in questione, data l'esistenza del centro d'inversione nel gruppo, tutti gli elementi matriciali dell'operatore $\hat{\gamma}$ si annullano a priori in modo che l'effetto del primo ordine in $\mathbf{k}$ non esiste (cfr. V, § 136). Nel secondo ordine in $\mathbf{k}$, le correzioni all'energia sono definite dall'equazione secolare composta degli elementi di matrice di un operatore della forma

$$\hat{V} = \hat{\gamma}_{ik} k_i k_k, \tag{68,1}$$

dove $\hat{\gamma}_{ik}$ è un operatore hermitiano tensoriale (simmetrico rispetto agli indici $i$, $k$); qui rientrano le correzioni dei termini lineari in $\mathbf{k}$ dell'operatore hamiltoniano nella seconda approssimazione della teoria delle perturbazioni e le correzioni dei termini quadratici in $\mathbf{k}$ in prima approssimazione. Fra gli elementi matriciali dell'operatore (68,1) esistono quelli non nulli a priori, ma sottoposti a determinati legami dalla condizione di simmetria.

Le funzioni d'onda costituenti la base della rappresentazione $E_g$, intese nel senso della legge propria di trasformazione sotto operazioni di simmetria, si possono prendere nella forma

$$\psi_1 \sim x^2 + \omega y^2 + \omega^2 z^2, \quad \psi_2 \sim x^2 + \omega^2 y^2 + \omega z^2,$$

dove

$$\omega = e^{2\pi i/3}, \quad \omega^2 = \omega^*, \quad 1 + \omega + \omega^2 = 0,$$

il segno $\sim$ esprime qui la locuzione « si trasformano come ». La rotazione $C_3$ intorno alla diagonale del cubo trasforma le coordinate in base alla legge $x, y, z \to z, x, y$; inoltre le funzioni $\psi_1$, $\psi_2$ si trasformano come

$$C_3: \psi_1 \to \omega\psi_1, \quad \psi_2 \to \omega^2\psi_2.$$

---

[1]) Per la notazione delle rappresentazioni dei gruppi puntuali si veda III, §§ 95 e 99.

La rotazione $C_4^x$ attorno allo spigolo del cubo (la trasformazione $x$, $y$, $z \to x$, $-z$, $y$) fa cambiare le funzioni secondo la legge

$$C_4^x\colon\ \psi_1 \to \psi_2, \quad \psi_2 \to \psi_1$$

ecc. Per inversione le coordinate $x$, $y$, $z$ cambiano di segno, mentre le funzioni $\psi_1$, $\psi_2$ restano immutate.

Di qui è facile concludere che tutti gli elementi matriciali delle componenti non diagonali $\hat{\gamma}_{ik}$ si annullano, mentre gli elementi matriciali delle componenti diagonali si riducono alle due costanti reali indipendenti seguenti:

$$\langle 1 \mid \gamma_{xx} \mid 1 \rangle = \langle 2 \mid \gamma_{xx} \mid 2 \rangle = \langle 1 \mid \gamma_{yy} \mid 1 \rangle = \ldots \equiv A,$$
$$\langle 1 \mid \gamma_{xx} \mid 2 \rangle = \langle 2 \mid \gamma_{xx} \mid 1 \rangle \equiv B, \quad \langle 1 \mid \gamma_{yy} \mid 2 \rangle = \omega B,$$
$$\langle 1 \mid \gamma_{zz} \mid 2 \rangle = \omega^2 B.$$

Ora gli elementi matriciali dell'operatore (68,1) sono

$$\langle 1 | V | 1 \rangle = \langle 2 | V | 2 \rangle = Ak^2,$$
$$\langle 1 | V | 2 \rangle = \langle 2 | V | 1 \rangle^* = B\,(k_x^2 + \omega k_y^2 + \omega^2 k_z^2).$$

Costruendo mediante questi elementi matriciali l'equazione secolare e risolvendola, otteniamo due rami dello spettro:

$$\varepsilon_{1,2}(k) - \varepsilon(0) = Ak^2 \pm B\,[k^4 - 3\,(k_x^2 k_y^2 + k_x^2 k_z^2 + k_y^2 k_z^2)^2]^{1/2}. \qquad (68,2)$$

La degenerazione si elimina uscendo dal punto $\mathbf{k} = 0$ in tutte le direzioni, ad eccezione della diagonale del cubo ($k_x = k_y = k_z$) [1].

A titolo di secondo esempio consideriamo lo spettro tenendo conto dello spin elettronico; in questo caso ai livelli energetici corrispondono rappresentazioni a due valori (spinoriali) del gruppo di simmetria. Supponiamo che nel punto $\mathbf{k} = 0$ il livello sia degenere quattro volte e corrisponda alla rappresentazione irriducibile $D'_u$ (o $D'_g$) del gruppo $O_h$ [2].

Le funzioni di base di questa rappresentazione si possono scegliere tali che si trasformino come le autofunzioni $\psi_m^j$ ($m = -j, \ldots, j$) del momento $j = 3/2$ [3]. Questa circostanza permette di usare il

[1]) Lo stesso risulato (68,2) si ottiene anche per la rappresentazione $E_u$ (nel punto $\mathbf{k} = 0$). In generale, la legge di dispersione in prossimità di un dato punto è sempre identica per le rappresentazioni che differiscono solo per moltiplicazione per qualche rappresentazione unidimensionale del gruppo (nel caso in questione $E_u = E_g \times A_{1u}$). È evidente che in questi casi gli elementi matriciali per le transizioni fra le funzioni di base distinte sono legati tra loro da legami identici.

[2]) Una situazione simile ha luogo per il fondo della zona delle buche nel diamante, nel silicio e nel germanio, che hanno tutti e tre un reticolo dello stesso tipo.

[3]) Nel problema al § 99 del volume III è stato mostrato che la rappresentazione irriducibile $D^{(3/2)}$ del gruppo totale delle rotazioni resta irriducibile anche nei confronti del gruppo $O$ coincidendo con la sua rappresentazione $D'$.

seguente procedimento che semplifica notevolmente la risoluzione del problema (*J. M. Luttinger*, 1956).

Per una rappresentazione quadridimensionale la matrice dell'operatore (68,1) sarà di rango $4 \times 4$ con 16 elementi. Ogni matrice di questo tipo può essere rappresentata sotto forma di combinazione lineare di 16 matrici $4 \times 4$ linearmente indipendenti date; come tali prendiamo le 15 matrici

$$\hat{j}_x,\ \hat{j}_x^2,\ \{\hat{j}_x,\ \hat{j}_y\}_+,\ \hat{j}_x^3,\ \{\hat{j}_x,\ \hat{j}_y^2 - \hat{j}_z^2\}_+$$

e la matrice $\{\hat{j}_x,\ \{\hat{j}_y,\ \hat{j}_z\}_+\}_+$ che si ottiene da esse per permutazioni cicliche degli indici $x$, $y$, $z$ (il simbolo $\{\ldots\}_+$ indica qui l'anticommutatore). Qui $\hat{j}_x$, $\hat{j}_y$, $\hat{j}_z$ sono le matrici delle componenti cartesiane del momento $j = 3/2$ prese rispetto alle quattro funzioni $\psi_m^{3/2}$. D'altra parte per queste funzioni di base si deve supporre che gli operatori stessi $\hat{j}_x$, $\hat{j}_y$, $\hat{j}_z$ si trasformino per rotazioni e riflessioni come componenti di un vettore assiale. Questa circostanza permette di scrivere l'operatore $\hat{V}$, quadratico in $k_x$, $k_y$, $k_z$ costruendolo dalle espressioni invarianti rispetto a tutte le trasformazioni del gruppo $O_h$:

$$\hat{V} = \beta_1 \mathbf{k}^2 + 4\beta_2 (k_x^2 \hat{j}_x^2 + k_y^2 \hat{j}_y^2 + k_z^2 \hat{j}_z^2) +$$
$$+ \beta_3 (k_x k_y \{\hat{j}_x,\ \hat{j}_y\}_+ + k_y k_z \{\hat{j}_y,\ \hat{j}_z\}_+ + k_x k_z \{\hat{j}_z,\ \hat{j}_x\}_+), \qquad (68,3)$$

dove $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ sono costanti reali.

Gli elementi di matrice dell'operatore (68,3) rispetto alle funzioni

$$\psi_1 \sim \psi_{3/2}^{3/2},\quad \psi_2 \sim \psi_{1/2}^{3/2},\quad \psi_3 \sim \psi_{-1/2}^{3/2},\quad \psi_4 \sim \psi_{-3/2}^{3/2}$$

si possono ora calcolare facilmente mediante i ben noti elementi matriciali del momento (dati dalle formule (29,7-10) del volume III). Questo calcolo conduce alle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}
V_{11} &= V_{44} = (\beta_1 + 3\beta_2)\,(k_x^2 + k_y^2) + (\beta_1 + 9\beta_2)\,k_z^2,\\
V_{22} &= V_{33} = (\beta_1 + 7\beta_2)\,(k_x^2 + k_y^2) + (\beta_1 + \beta_2)\,k_z^2,\\
V_{12} &= -V_{34} = \frac{\sqrt{3}}{2}\beta_3 k_z (k_y + i k_x), \qquad (68,4)\\
V_{13} &= V_{24} = 2\sqrt{3}\,\beta_2 (k_y^2 - k_x^2) + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta_3 i k_x k_y,\\
V_{14} &= V_{23} = 0.
\end{aligned}$$

La costruzione dell'equazione secolare si può semplificare osservando che la scissione del livello non può evidentemente essere totale: deve restare la doppia degenerazione (di Kramers). Ciò vuol dire che ogni radice $\lambda \equiv \varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(0)$ dell'equazione secolare (autovalore della matrice $\hat{V}$) sarà doppia. In altre parole, ad ogni autovalore $\lambda$ corri-

sponderanno due combinazioni linearmente indipendenti di grandezze $\varphi_n$ ($n = 1, 2, 3, 4$), ossia di soluzioni delle equazioni

$$\sum_n V_{nm}\varphi_m = \lambda\varphi_n. \tag{68,5}$$

Combinando questi due insiemi possiamo, quindi, imporre alle grandezze $\varphi_n$ una condizione supplementare, in particolare, annullarne una, $\varphi_4 = 0$, ad esempio. Allora l'equazione (68,5) con $n = 4$ dà

$$V_{41}\varphi_1 + V_{42}\varphi_2 + V_{43}\varphi_3 = 0.$$

~~Riportando da~~ qui $\varphi_3$ nelle equazioni con $n = 1, 2$, otteniamo un sistema di due sole equazioni omogenee con due incognite $\varphi_1$ e $\varphi_2$:

$$\begin{pmatrix} V_{11} - V_{41}V_{13}/V_{43} & V_{12} - V_{42}V_{13}/V_{43} \\ V_{21} - V_{41}V_{23}/V_{43} & V_{22} - V_{42}V_{23}/V_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

(quanto all'equazione con $n = 3$, essa non fornisce niente di nuovo). Dunque, il problema degli autovalori della matrice $4 \times 4$ si riduce a quello di una matrice $2 \times 2$. Costruendo per quest'ultima l'equazione secolare e risolvendola (con i valori $V_{nm}$ presi dalla (68,4)), otteniamo

$$\lambda = \frac{1}{2}(V_{11} + V_{22}) \pm \left[\frac{1}{4}(V_{11} - V_{22})^2 + |V_{12}|^2 + |V_{13}|^2\right]^{1/2},$$

o, infine,

$$\varepsilon_{1,2}(\mathbf{k}) - \varepsilon(0) = Ak^2 \pm [Bk^4 + C(k_x^2k_y^2 + k_x^2k_z^2 + k_y^2k_z^2)]^{1/2}, \tag{68,6}$$

dove

$$A = \beta_1 + 5\beta_2, \quad B = 16\beta_2^2, \quad C = 3\left(\frac{1}{4}\beta_3^2 - 16\beta_2^2\right)$$

(*G. Dresselhaus*, *A. F. Kip*, *Ch. Kittel*, 1955). Il livello si scinde all'uscita dal punto $\mathbf{k} = 0$ in tutte le direzioni [1]).

Soffermiamoci in breve sulla questione inerente alla forma delle equazioni che descrivono il comportamento delle particelle in prossimità del fondo degenere della zona in un campo magnetico. Per fissare le idee, considereremo il secondo dei casi studiati nel presente paragrafo, ossia lo spettro (68,6).

L'applicazione diretta dell'operatore hamiltoniano formato in base alla (68,6), secondo la regola generale (56,7), implicherebbe delle complicazioni dovute al carattere non analitico dello spettro in prossimità del punto $\mathbf{k} = 0$. Queste difficoltà si possono superare

[1]) Si ricordi che l'applicazione della teoria delle perturbazioni agli stati di un solo livello degenere presuppone che gli intervalli della scissione $\varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(0)$ siano piccoli rispetto alle distanze fra le zone vicine, comprese quelle che si sono distaccate per interazione spin-orbitale.

effettuando la sostituzione $\mathbf{k} \to \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{K} - e\hat{\mathbf{A}}/\hbar c$ non nella (68,6), bensì nell'operatore hamiltoniano matriciale (68,3) (per conservare il carattere hermitiano è necessario inoltre effettuare la simmetrizzazione rispetto alle componenti $\mathbf{k}$). Ogni elemento matriciale dell'operatore hamiltoniano si trasforma dopo questa operazione in un operatore differenziale lineare agente non soltanto sugli indici di spin, ma anche sugli argomenti delle funzioni $\varphi_n(\mathbf{K})$ nelle equazioni (68,5), che si riducono quindi a un sistema di quattro equazioni differenziali lineari.

Per tener conto degli effetti di spin in presenza di un campo magnetico, all'operatore hamiltoniano (68,3) si devono associare ancora i termini dipendenti direttamente da $\mathbf{H}$ che non si possono definire in base a considerazioni di invarianza di gauge. Siccome il campo è supposto debole, i termini aggiuntivi devono essere lineari rispetto a $\mathbf{H}$; al tempo stesso in quanto $\mathbf{k}$ è supposto piccolo, essi non devono dipendere da $\mathbf{k}$ (cfr. § 59). In questo caso la forma generale di questi termini invarianti rispetto a tutte le trasformazioni di simmetria del cristallo è la seguente:

$$\beta_4 \mathbf{H}\hat{\mathbf{j}} + \beta_5 (H_x \hat{j}_x^3 + H_y \hat{j}_y^3 + H_z \hat{j}_z^3). \tag{68,7}$$

Per concludere questo paragrafo ricordiamo una situazione interessante che viene a crearsi se una delle zone tangenti nel punto di degenerazione $\mathbf{k}_0$ è la zona di conduzione e l'altra di valenza. La fessura energetica nello spettro di questo tipo è nulla; è sufficiente un'energia piccola a piacere affinché siano generati un elettrone e una buca con impulsi vicini a $\mathbf{k}_0$. Cristalli di questo tipo occupano, in un certo senso, una posizione intermedia fra dielettrico e metallo. La fessura energetica non esiste, ma gli stati elettronici e di buca non sono separati in un solo punto dello spazio $\mathbf{k}$. Si può dire che si tratta di un metallo, la cui superficie di Fermi è ridotta al punto $\mathbf{k}_0$. Per $T = 0$ in questo *semiconduttore senza fessura* [1]) non esistono portatori di corrente, ma alle basse temperature il loro numero cresce secondo una legge di potenza, e non esponenziale. È impossibile stabilire la forma dello spettro in prossimità del punto $\mathbf{k}_0$, partendo da sole considerazioni di simmetria; l'interazione coulombiana fra gli elettroni e le buche implica la comparsa in questo punto di singolarità negli elementi di matrice della perturbazione [2]).

---

[1]) Come esempio si può prendere una delle modificazioni dello stagno: stagno grigio.

[2]) Per uno studio particolareggiato di questa questione si veda *A. A. Abrikosov, S. D. Beneslavskij*, ŽETF 59, 1280 (1970).

Capitolo VII

# MAGNETISMO

## § 69. *Equazione del moto del momento magnetico in un ferromagnete*

La struttura magnetica dei cristalli implica in essi la comparsa di rami specifici dello spettro energetico. Passando allo studio di questi spettri, ricordiamo anzitutto alcune particolarità delle interazioni nei corpi magnetici.

La forma fondamentale delle interazioni nei ferromagneti è l'interazione di scambio fra gli atomi che conduce a magnetizzazione spontanea. Il tratto caratteristico di questa interazione è la sua indipendenza dall'orientazione della magnetizzazione rispetto al reticolo: l'interazione di scambio è conseguenza dell'interazione elettrostatica fra gli elettroni, tenuto conto della simmetria della funzione d'onda del sistema, e non dipende dalla direzione dello spin totale [1]).

Quale esempio di sistema ferromagnetico elementare si può prendere un dielettrico il cui reticolo cristallino ha atomi dotati di momento magnetico, mentre il segno dell'interazione di scambio è tale (« ferromagnetizzato ») che energeticamente è più vantaggiosa la posizione parallela dei momenti. Allora il sistema avrà quale stato fondamentale quello in cui tutti gli spin sono paralleli. Più precisamente, in questo stato la proiezione dello spin totale del sistema su una certa direzione è uguale al valore massimo possibile $\Sigma s_a$ (somma su tutti gli atomi), dove $s_a$ è lo spin di un solo atomo. Infatti, l'operatore hamiltoniano dell'interazione di scambio $\hat{H}_{\text{scamb}}$ commuta con l'operatore di spin totale del sistema $\hat{\mathbf{S}}$ e, quindi, con la sua proiezione $\hat{S}_z$ (ciò deriva dal fatto che $\hat{H}_{\text{scamb}}$ è indipendente dalla direzione degli spin, mentre $\hat{\mathbf{S}}$ è l'operatore di rotazione nello spazio degli spin). Perciò lo stato fondamentale deve godere di un

---

[1]) Dati sperimentali sui rapporti giromagnetici $g$, che danno per i ferromagneti valori molto vicini a 2, testimoniano la natura di spin del ferromagnetismo.

determinato valore $S_z$ e all'energia minima corrisponde un $S_z$ massimo. Osserviamo che in questo caso anche le proiezioni $s_z$ degli spin di tutti gli atomi sono uguali ai loro valori massimi $s_a$ in modo che il momento magnetico nello stato fondamentale è pari al suo valore « nominale » $\Sigma\mu_a$, dove $\mu_a$ è il momento magnetico di un solo atomo. Questa proprietà, però, viene violata da interazioni più deboli, ossia da quelle relativistiche.

Nei casi più complessi la magnetizzazione del corpo non è uguale a quella nominale. In particolare, quando l'interazione non è di carattere ferromagnetico fra tutti gli atomi, è possibile la formazione di strutture di due sottoreticoli, magnetizzati in modo opposto, le cui magnetizzazioni sono distinte e perciò non si compensano completamente; le sostanze con una struttura simile si chiamano ferriti (il caso di compensazione completa corrisponde all'antiferromagnete).

Infine, nel metallo ferromagnetico non si possono considerare gli spin degli atomi indipendentemente dagli elettroni di conduzione che, comunque, non saranno completamente magnetizzati (per gli effetti di degenerazione di Fermi) neanche per $T = 0$. Le particolarità delle interazioni magnetiche possono implicare anche la comparsa di una struttura più complicata dello stato fondamentale del ferromagnete con disposizione non collineare degli atomi dei momenti magnetici; queste strutture si dicono elicoidali.

Come in ogni sistema macroscopico, gli stati del ferromagnete debolmente eccitati si possono considerare come una totalità di eccitazioni elementari, ossia come un gas di quasi-particelle. Le eccitazioni elementari in una distribuzione ordinata di momenti magnetici atomici si chiamano *magnoni*. Poiché si tratta di quasi-particelle nel reticolo cristallino dotato di simmetria di traslazione, i magnoni hanno non impulsi veri, bensì quasi-impulsi che assumono valori in una sola cella del reticolo inverso. Nel quadro classico ai magnoni corrispondono le *onde di spin* propagantisi lungo il reticolo di oscillazione dei momenti magnetici. I magnoni ubbidiscono alla statistica di Bose, e al caso classico limite delle onde di spin corrispondono grandi numeri di riempimento degli stati dei magnoni.

Se la lunghezza dell'onda di spin è grande rispetto alla costante del reticolo $a$ (cioè se il vettore d'onda $k \ll 1/a$), l'onda può essere considerata macroscopicamente; come risultato, la legge di dispersione $\omega(\mathbf{k})$ sarà espressa mediante parametri fenomenologici (costanti materiali) che figurano nell'equazione macroscopica del moto dei momenti magnetici. Così, lo spettro dei magnoni $\varepsilon = \hbar\omega(\mathbf{k})$ sarà espresso anch'esso mediante questi parametri. Questo metodo di definizione dello spettro dei magnoni è completamente analogo alla definizione dello spettro dei fononi a onda lunga mediante parametri macroscopici (moduli elastici) che figurano nelle equazioni macroscopiche delle oscillazioni nelle onde sonore. Per eseguire

questo programma è necessario dedurre preliminarmente le dette equazioni del moto [1]).

Prima di tutto consideriamo il problema tenendo conto delle sole interazioni di scambio.

Poiché ci interessano gli stati del ferromagnete debolmente eccitati (in quanto le loro proprietà possono essere precisate in forma generale), dobbiamo limitarci ai moti « lenti » del momento magnetico con piccole frequenze. Sono tali i moti in cui la direzione del momento magnetico varia lentamente nello spazio e il suo valore resta costante. Infatti, il valore della magnetizzazione in equilibrio è fissato dall'interazione di scambio; pertanto la sua variazione comporta in ogni caso un dispendio finito di energia, qualunque sia la lunghezza d'onda (è supposto che il corpo si trovi sufficientemente lontano dal suo punto di Curie in cui la magnetizzazione spontanea scompare). D'altra parte, l'energia non cambia per la rotazione del momento magnetico del corpo come un tutt'uno; pertanto la rotazione non omogenea della magnetizzazione lungo il corpo richiederà tanto meno energia quanto più grande sarà la lunghezza d'onda (in altre parole, le oscillazioni di onda lunga avranno una piccola frequenza). L'equazione cercata per la densità di momento magnetico (magnetizzazione) **M** deve avere la seguente forma che conserva $|\mathbf{M}|$:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = [\mathbf{\Omega M}], \tag{69,1}$$

dove $\mathbf{\Omega}$ è la velocità angolare della precessione del momento, che ora ci proponiamo di definire. Scriviamo l'equazione del moto come equazione differenziale del primo ordine rispetto al tempo poiché per piccole frequenze le derivate di ordine superiore si possono trascurare.

Per determinare $\mathbf{\Omega}$ bisogna tener conto che per grandi lunghezze d'onda e basse temperature la dissipazione di energia per variazione della magnetizzazione è piccola e si può trascurare (al § 70 daremo una spiegazione a questa ipotesi). Per precisare, invece, quale è la condizione di mancanza di dissipazione, considereremo il momento magnetico di un magnete come un parametro indipendente, la cui distribuzione d'equilibrio viene determinata minimizzando l'energia libera. Eseguiremo l'operazione di minimizzazione a temperatura, volume ed intensità del campo **H** costanti in ogni punto del corpo; l'energia libera $\tilde{F}$ funge da potenziale termodinamico rispet-

---

[1]) I risultati ulteriori di questo paragrafo appartengono a *L. D. Landau* e *E. M. Lifšits* (1935). È da notare che questi risultati sono validi per i ferromagneti « di scambio ». Non trattiamo qui il cosiddetto ferromagnetismo debole in cui il momento ferromagnetico compare nel solo caso in cui si tenga conto delle interazioni relativistiche.

to a queste variabili [1]). La variazione $\delta\widetilde{F}$ per un cambiamento indefinitamente piccolo di **M** si può scrivere come segue:

$$\delta\widetilde{F} = -\int \mathbf{H}_{\text{eff}}\,\delta\mathbf{M}\,dV, \tag{69,2}$$

dove abbiamo introdotto la notazione $\mathbf{H}_{\text{eff}}$ per il « campo efficace » per analogia con l'espressione dell'energia del momento magnetico in un campo magnetico esterno. In equilibrio $\mathbf{H}_{\text{eff}} = 0$.

La dissipazione dell'energia al variare della magnetizzazione con il tempo si calcola come la derivata

$$Q = T\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial R_{\text{min}}}{\partial t} = -\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial t},$$

dove $S$ è l'entropia del corpo, e $R_{\text{min}}$ il lavoro minimo necessario per portare il corpo in un dato stato non in equilibrio. La formula (69,1) permette così di ottenere

$$Q = \int \mathbf{H}_{\text{eff}}\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial t}\,dV = \int \mathbf{H}_{\text{eff}}\,[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{M}]\,dV. \tag{69,3}$$

Si vede da qui che in mancanza di dissipazione il vettore $\boldsymbol{\Omega}$ deve essere parallelo al vettore $\mathbf{H}_{\text{eff}}$ in modo che si può porre $\boldsymbol{\Omega}$ = costante$\cdot\mathbf{H}_{\text{eff}}$ e, quindi, l'equazione (69,1) diventa

$$\dot{\mathbf{M}} = \text{costante}\,[\mathbf{H}_{\text{eff}}\mathbf{M}]; \tag{69,4}$$

il significato e il valore della costante verranno precisati più avanti.

In accordo con la definizione (69,2), la forma esplicita del campo efficace si trova, facendo variare l'energia libera totale del corpo. Quest'ultima è data dall'integrale

$$\widetilde{F} = \int \left\{ f_0(M) + U_{\text{eter}} - \mathbf{MH} - \frac{H^2}{8\pi} \right\} dV \tag{69,5}$$

(si veda VIII, § 36). Qui $f_0(M)$ è la densità di energia libera di un corpo magnetizzato in modo omogeneo per $H = 0$, che tiene conto delle sole interazioni di scambio e, quindi, è indipendente dalla direzione **M**. $U_{\text{eter}}$ è la densità di energia di scambio addizionale dovuta alla variazione lenta della direzione del vettore **M** lungo un corpo magnetizzato in modo non omogeneo.

---

[1]) Si veda VIII, § 36 (le grandezze termodinamiche riferite all'intero corpo vi sono state indicate con lettere manoscritte). Per una distribuzione non omogenea sarebbe più corretto parlare dell'energia libera del corpo (per un suo dato volume), anziché del potenziale termodinamico $\widetilde{\Phi}$. Qui trascuriamo gli effetti di strizione, cioè tensioni e deformazioni del cristallo dovute alla variazione della magnetizzazione.

I primi termini dello sviluppo di questa energia in potenze delle derivate del momento **M** rispetto alle coordinate hanno la forma

$$U_{\text{eter}} = \frac{1}{2}\alpha_{ik}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_k} \tag{69,6}$$

inoltre, questa forma quadratica (nelle derivate) è essenzialmente positiva. L'espressione (69,6) è composta in modo tale che (in accordo con le proprietà dell'interazione di scambio) possa non dipendere dalla direzione assoluta del vettore **M**. Nei cristalli monoassiali il tensore simmetrico di secondo rango $\alpha_{ik}$ ha come componenti $\alpha_{xx} = \alpha_{yy} \equiv \alpha_1$, $\alpha_{zz} \equiv \alpha_2$ (l'asse $z$ è l'asse di simmetria del cristallo); nei cristalli cubici $\alpha_{ik} = \alpha\delta_{ik}$.

Si può stabilire l'ordine di grandezza dei coefficienti $\alpha_{ik}$, osservando che l'energia della disomogeneità, riferita al volume di una sola cella elementare del reticolo cristallino, dovrebbe raggiungere i valori atomici caratteristici dell'energia dell'interazione di scambio se la direzione del momento variasse notevolmente a distanze dell'ordine della costante $a$ del reticolo. L'energia di scambio caratteristica coincide, come ordine di grandezza, con la temperatura di Curie $T_c$ (punto di scomparsa del ferromagnetismo). Dalla condizione $T_c/a^3 \sim \alpha M^2/a^2$ troviamo che

$$\alpha \sim T_c/aM^2. \tag{69,7}$$

Facendo variare l'integrale (69,5) (per valori dati di **H** in ogni punto del corpo) e integrando per parti nel secondo termine, otteniamo

$$\delta\widetilde{F} = \int \left\{ f_0'(M)\frac{\mathbf{M}}{M} - \alpha_{ik}\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial x_i\,\partial x_k} - \mathbf{H} \right\} \delta\mathbf{M}\, dV.$$

In accordo con la definizione (69,2), l'espressione fra parentesi graffe è $-\mathbf{H}_{\text{eff}}$. Il primo termine di questa espressione è diretto lungo **M**, ma, sostituito nell'equazione del moto (69,4), questo termine scompare lo stesso, cosicché lo si può omettere [1]). Troviamo così

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = \alpha_{ik}\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial x_i\,\partial x_k} + \mathbf{H}. \tag{69,8}$$

Se si tiene conto delle sole interazioni di scambio indipendenti dalla direzione del momento magnetico, allora l'equazione (69,4) per un corpo magnetizzato in modo omogeneo deve ridursi all'equazione di moto del momento in precessione libera:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \frac{g\,|e|}{2mc}[\mathbf{HM}],$$

[1]) Dopo questa omissione, però. $\mathbf{H}_{\text{eff}}$ non si annullerà necessariamente in equilibrio.

dove $e = -|e|$, $m$ sono rispettivamente la carica e la massa dell'elettrone, $g$ il rapporto giromagnetico del ferromagnete (cfr. II, § 45). D'altra parte, per magnetizzazione omogenea $\mathbf{H}_{eff} = \mathbf{H}$; ne segue che il coefficiente costante nella (69,4) è uguale $g\,|e|/2mc$ in modo che l'equazione del moto diventa, con $\mathbf{H}_{eff}$ dalla (69,8),

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \frac{g\,|e|}{2mc}\,[\mathbf{H}_{eff}\mathbf{M}]. \tag{69,9}$$

Per ottenere un sistema di equazioni completo vi si deve aggiungere ancora l'equazione di Maxwell che lega il campo $\mathbf{H}$ alla distribuzione di magnetizzazione $\mathbf{M}$. Le onde di spin, che verranno studiate al prossimo paragrafo, sono di bassa frequenza nel senso che $\omega \ll ck$. A queste condizioni il campo è quasi-stazionario; nelle equazioni di Maxwell si possono trascurare le derivate rispetto al tempo ed esse si riducono alla forma

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div}(\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}) = 0. \tag{69,10}$$

A questo proposito può sorgere la questione della legittimità della variazione dell'integrale (69,5) rispetto a $\mathbf{M}$ per $\mathbf{H}$ costante, nonostante queste grandezze siano legate dalla seconda equazione (69,10). Tuttavia, le cose stanno nel seguente modo: se poniamo $\mathbf{H} = -\nabla\varphi$ (tenendo presente la prima equazione) e calcoliamo la variazione dell'integrale in $\varphi$, essa si annulla in virtù della seconda equazione, cosicché la variazione rispetto a $\mathbf{H}$ non porta nessun contributo in $\delta\widetilde{F}$.

Se il corpo non è collocato in un campo magnetico esterno, allora il suo campo interno è completamente legato alla distribuzione di magnetizzazione e rappresenta, in generale, una grandezza dello stesso ordine di $\mathbf{M}$. In questo senso il termine $\mathbf{H}$ nel campo efficace (69,8) rappresenta un effetto relativistico (si ricordi che i momenti magnetici atomici, così come la magnetizzazione spontanea $\mathbf{M}$, sono definiti dal magnetone di Bohr $\beta = |e|\,\hbar/2\,mc$, cioè da una grandezza che contiene $c$ a denominatore). Questa è la ragione per cui nell'approssimazione di puro scambio in questione si deve omettere il secondo termine nella (69,8) in modo che l'equazione del moto diventa

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \frac{g|e|}{2mc}\,\alpha_{ik}\left[\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial x_i\,\partial x_k}\,\mathbf{M}\right]. \tag{69,11}$$

Sottolineiamo il carattere non lineare di questa equazione.

L'equazione (69,11) si può riscrivere sotto forma d'equazione di continuità per il momento magnetico,

$$\frac{\partial M_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{il}}{\partial x_l} = 0,$$

dove il tensore di flusso del momento ha la forma

$$\Pi_{il} = \frac{g|e|}{2mc}\,\alpha_{ik}\left[\mathbf{M}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_k}\right]_l.$$

È un risultato atteso poiché nell'approssimazione di scambio il momento magnetico totale si conserva.

Teniamo ora presente che nel ferromagnete, accanto alle interazioni di scambio, esistono anche interazioni relativistiche molto più deboli fra i momenti elettronici: spin-spin e spin-orbitali. Nella teoria macroscopica esse vengono descritte dall'energia di anisotropia magnetica, la cui densità $U_{\text{an}}$ dipende dalla direzione del vettore di magnetizzazione rispetto al reticolo cristallino; queste interazioni stabiliscono la direzione d'equilibrio della magnetizzazione spontanea del ferromagnete. Come è stato detto, anche l'interazione fra **M** e il campo magnetico **H** è di tipo relativistico.

In un cristallo monoassiale l'energia di anisotropia ha la forma

$$U_{\text{an}} = -\frac{K}{2}M_z^2. \tag{69,12}$$

Se $K > 0$, la magnetizzazione d'equilibrio è diretta lungo l'asse di simmetria, ossia lungo l'asse $z$ (ferromagnete del tipo ad « asse leggero »); se $K < 0$, la direzione della magnetizzazione spontanea giace nel piano $xy$ (ferromagnete del tipo a « piano leggero »). Nel cristallo cubico l'energia di anisotropia può essere rappresentata nella forma

$$U_{\text{an}} = \frac{K'}{M^2}\left(M_x^2M_y^2 + M_x^2M_z^2 + M_y^2M_z^2\right), \tag{69,13}$$

dove gli assi $x$, $y$, $z$ sono diretti lungo i tre assi di simmetria del quarto ordine (spigoli delle celle cubiche). Se $K' > 0$, il vettore d'equilibrio **M** è diretto lungo uno degli spigoli delle celle cubiche, ma se $K' < 0$, esso è diretto lungo una delle diagonali spaziali delle celle [1]).

Per fissare le idee, considereremo un ferromagnete monoassiale. Associando all'espressione integranda nella (69,5) il termine $U_{\text{an}}$ della (69,12), otteniamo dopo la variazione il termine addizionale $-KM_z\mathbf{v}\delta\mathbf{M}$, dove $\mathbf{v}$ è il vettore unità nella direzione dell'asse di simmetria del cristallo. In tal modo troviamo che il campo efficace è

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = \alpha_{ik}\frac{\partial^2\mathbf{M}}{\partial x_i\,\partial x_k} + KM_z\mathbf{v} + \mathbf{H}. \tag{69,14}$$

È facile vedere che con questa variazione del campo efficace si esauriscono le variazioni dell'equazione del moto (69,9) dovute agli effetti relativistici. Infatti, se trascuriamo la dissipazione, ciò

[1]) Le grandezze adimensionali $K$, $K'$ per i diversi ferromagneti hanno valori appartenenti a un largo intervallo che va dai decimi alle decine. L'ordine di grandezza del rapporto fra le interazioni relativistiche e quelle di scambio è caratterizzato dalla grandezza $a^3U_{\text{an}}/T_c$ ed è in genere $10^{-4}$-$10^{-5}$.

significa, come prima, che il secondo membro dell'equazione del moto deve essere perpendicolare a $\mathbf{H}_{\text{eff}}$, cioè deve avere la forma $[\mathbf{M}'\mathbf{H}_{\text{eff}}]$, dove $\mathbf{M}'$ può differire da $\mathbf{M}$ solo per correzioni relativistiche, sempre piccole rispetto al valore grande di $\mathbf{M}$ e perciò inessenziali. Quanto ai termini relativistici in $\mathbf{H}_{\text{eff}}$, essi si aggiungono a una grandezza piccola, essendo lenta la variazione di $\mathbf{M}$ lungo il corpo; questi termini possono diventare notevoli per lunghezze d'onda sufficientemente grandi.

## § 70. *Magnoni in un ferromagnete. Spettro*

Applichiamo le equazioni ottenute nel paragrafo precedente alla propagazione delle onde in cui la densità del momento magnetico compie piccole oscillazioni, con una precessione rispetto al suo valore d'equilibrio $\mathbf{M}_0$. Considereremo un campione formato di un solo dominio, in tutto il volume del quale $\mathbf{M}_0$ è costante, e ci limiteremo al caso di onde di lunghezza notevolmente più piccola delle dimensioni del campione stesso. Allora si può considerare il mezzo come illimitato.

Studiamo dapprima la questione tenendo conto delle sole interazioni di scambio, cioè in base all'equazione (69,11). Poniamo $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{m}$, dove $\mathbf{m}$ è una grandezza piccola, e linearizziamo l'equazione omettendo i termini del secondo ordine in $\mathbf{m}$; poiché il valore assoluto è $M = M_0$, allora in questa approssimazione $\mathbf{m} \perp \mathbf{M}_0$. Otteniamo così

$$\dot{\mathbf{m}} = \frac{|e|}{mc}\,\alpha_{ik}\left[\frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x_i\,\partial x_k}\,\mathbf{M}_0\right] \tag{70,1}$$

(qui e più avanti poniamo $g = 2$). Per $\mathbf{m}$ dipendente dalle coordinate e dal tempo come $\exp\,[i\,(\mathbf{kr} - \omega t)]$ otteniamo

$$i\omega\mathbf{m} = \frac{|e|}{mc}\,\alpha k^2\,[\mathbf{m}\mathbf{M}_0], \tag{70,2}$$

dove $\alpha = \alpha\,(\mathbf{n}) = \alpha_{ik} n_i n_k$, essendo $\mathbf{n}$ il vettore unità diretto lungo il vettore d'onda $\mathbf{k}$. Sviluppando questa equazione nelle componenti, abbiamo

$$i\omega m_x = \frac{|e|}{mc}\,\alpha M k^2 m_y,$$

$$i\omega m_y = -\frac{|e|}{mc}\,\alpha M k^2 m_x$$

(l'asse $z$ è diretto lungo $\mathbf{M}_0$). Di qui ricaviamo la legge di dispersione delle onde di spin [1]).

$$\omega = \frac{|e|\,M}{mc}\,\alpha\,(\mathbf{n})\,k^2. \tag{70,3}$$

---

[1]) È stato per primo *F. Bloch* (1930) a dedurre la legge di dispersione quadratica delle onde di spin mediante la teoria microscopica. L'espressione di questo spettro mediante parametri macroscopici è stata data da *L. D. Landau* e *E. M. Lifšits* (1945).

Vediamo, in accordo con quanto detto all'inizio del paragrafo precedente, che nell'approssimazione di scambio la frequenza tende a zero per $k \to 0$. Il vettore **m** nell'onda di spin ruota nel piano $xy$ con velocità angolare costante $\omega$ restando costante in valore assoluto.

Nel quadro quantistico, la formula (70,3) definisce lo spettro energetico dei magnoni $\varepsilon = \hbar\omega$ [1]):

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = 2\beta M\alpha(\mathbf{n})\, k^2. \qquad (70,4)$$

Nel formalismo della seconda quantizzazione, le grandezze macroscopiche descriventi il ferromagnetismo vanno sostituite da operatori espressi mediante operatori di annichilazione e creazione dei magnoni. Mostriamo come si deve eseguire questa operazione per i magnoni (70,4).

Mettiamo in corrispondenza alla grandezza classica **M** l'operatore vettoriale $\hat{\mathbf{M}}$, le cui componenti soddisfano certe regole di commutazione. $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r})\,\delta V$ sia l'operatore dello spin atomico totale nel punto **r** dell'elemento di volume $\delta V$ fisicamente infinitesimale. Gli operatori $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r}_1)\,\delta V_1$ e $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r}_2)\,\delta V_2$, riferiti agli elementi di volume $\delta V_1$ e $\delta V_2$ distinti, sono commutativi. Le componenti del medesimo operatore $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r})\,\delta V$ verificano le regole comuni di commutazione del momento:

$$\hat{S}_x\delta V \cdot \hat{S}_y\delta V - \hat{S}_y\delta V \cdot \hat{S}_x\delta V = i\hat{S}_z\delta V,$$

ossia $\hat{S}_x\hat{S}_y - \hat{S}_y\hat{S}_x = i\hat{S}_z/\delta V$ (e analogamente per gli altri commutatori). Nel limite $\delta V \to 0$ queste regole si esprimono nell'unica forma seguente qualunque siano $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$:

$$\hat{S}_x(\mathbf{r}_1)\,\hat{S}_y(\mathbf{r}_2) - \hat{S}_y(\mathbf{r}_2)\,\hat{S}_x(\mathbf{r}_1) = i\hat{S}_z(\mathbf{r}_1)\,\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

Moltiplicando ora questa uguaglianza per $4\beta^2$ e osservando che l'operatore di magnetizzazione $\hat{\mathbf{M}} = -2\beta\hat{\mathbf{S}}$, otteniamo

$$\hat{M}_x(\mathbf{r}_1)\,\hat{M}_y(\mathbf{r}_2) - \hat{M}_y(\mathbf{r}_2)\,\hat{M}_x(\mathbf{r}_1) = -2i\beta\hat{M}_z(\mathbf{r}_1)\,\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \qquad (70,5)$$

In caso di onde di spin, in cui **M** è soggetto a piccole oscillazioni intorno all'asse $z$, in prima approssimazione rispetto alle grandezze piccole $m_x$, $m_y$ si può sostituire l'operatore $\hat{M}_z$ a secondo membro della relazione (70,5) con un numero $M_z \approx M$; allora si ha

$$\hat{m}_x(\mathbf{r}_1)\,\hat{m}_y(\mathbf{r}_2) - \hat{m}_y(\mathbf{r}_2)\,\hat{m}_x(\mathbf{r}_1) = -2i\beta M\,\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \qquad (70,6)$$

Di qui si vede che le grandezze $m_y$ e $m_x$ fungono in questo caso (a meno di fattori costanti) da « coordinate ed impulsi generalizzati » canonicamente coniugati, così come $\varphi$ e $\rho'$ giocavano lo stesso ruolo nella quantizzazione delle onde sonore nel liquido (§ 24). Sottolineiamo,

---

[1]) In questo capitolo $\beta$ indica ovunque il magnetone di Bohr: $\beta = |e|\,\hbar/2mc$.

però, che fra i due casi esiste una differenza notevole. La regola di commutazione (24,7) per gli operatori fononici è precisa e non legata alla piccolezza delle oscillazioni (cioè alla piccolezza dei numeri di riempimento degli stati fononici). Quanto alla regola (70,6), essa non è così precisa e vale esclusivamente in prima approssimazione rispetto alla grandezza piccola **m**.

Partendo dalla regola di commutazione (70,6) e dalla relazione fra gli operatori $\hat{m}_x$ e $\hat{m}_y$, corrispondente alle equazioni lineari (70,1), si possono ottenere espressioni di questi operatori in funzione degli operatori di annichilazione e creazione dei magnoni, così come abbiamo fatto al § 24 per i fononi (si veda il problema 4 al § 71).

Torniamo allo studio dello spettro dei magnoni e teniamo conto dell'influenza degli effetti relativistici su questo spettro. Ora dobbiamo tener presente anche il campo magnetico **H** che compare per le oscillazioni di **M**. Esso sarà dello stesso ordine di infinitesimo di **m**; indichiamolo qui con **h**.

Le equazioni di Maxwell (69,10) danno

$$[\mathbf{kh}] = 0, \quad \mathbf{kh} = -4\pi\mathbf{km}.$$

Di qui si vede che il campo **h** è diretto lungo il vettore **d'onda** e vale

$$\mathbf{h} = -4\pi(\mathbf{nm})\,\mathbf{n}. \tag{70,7}$$

Sostituendo la (70,7) negli ultimi due termini dell'espressione integranda nella (69,5), otteniamo

$$-\mathbf{mh} - \frac{h^2}{8\pi} = 2\pi\,(\mathbf{nm})^2 \tag{70,8}$$

(qui è omesso il termine $\mathbf{M}_0\mathbf{h}$ che, dato il carattere potenziale del campo **h**, si trasforma per integrazione su tutto il volume in integrale di superficie e si annulla); questa parte dell'energia di anisotropia nell'onda di spin talvolta si dice *magnetostatica*.

Supponiamo che il ferromagnete in esame sia monoassiale e si riferisca al tipo ad « asse leggero », in modo che $\mathbf{M}_0$ coincida con l'asse di simmetria del cristallo (asse $z$): $\mathbf{M}_0 = \mathbf{v}M$. Avendo in vista ulteriori applicazioni, supponiamo anche l'esistenza di un campo esterno $\mathfrak{H}$ parallelo alla stessa direzione **v**; in questo caso il campione si deve immaginare come un cilindro con asse lungo **v**. Allora il campo all'interno del corpo è $\mathbf{H} = \mathfrak{H} + \mathbf{h}$. L'equazione linearizzata del moto (che scriviamo già moltiplicata per $\hbar$) è

$$-i\varepsilon\mathbf{m} = 2\beta\left\{\left(\alpha k^2 + K + \frac{\mathfrak{H}}{M}\right)[\mathbf{vm}] - [\mathbf{vh}]\right\}. \tag{70,9}$$

Per il cristallo monoassiale $\alpha = \alpha_1 \operatorname{sen}^2\theta + \alpha_2 \cos^2\theta$, dove $\theta$ è l'angolo formato da **k** e **v**.

Sostituendovi **h** dalla (70,7), scriviamo l'equazione nelle componenti (è comodo prendere l'asse $x$ sul piano individuato dalle dire-

zioni $\mathbf{v}$ e $\mathbf{n}$). Dalla condizione di compatibilità delle due equazioni ottenute per $m_x$ e $m_y$ deduciamo la legge di dispersione

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = 2\beta M\left[\left(\alpha k^2 + K + \frac{\mathfrak{H}}{M}\right)\left(\alpha k^2 + K + \frac{\mathfrak{H}}{M} + 4\pi \operatorname{sen}^2\theta\right)\right]^{1/2}. \tag{70,10}$$

È da notare che grazie all'esistenza del termine $\operatorname{sen}^2\theta = k_x^2/k^2$ lo sviluppo di $\varepsilon(\mathbf{k})$ in potenze delle componenti $\mathbf{k}$ non ha carattere semplicemente di potenza; ciò è dovuto al grande raggio d'azione delle interazioni magnetiche.

L'espressione della forma (70,10), dedotta qui per un ferromagnete monoassiale (del tipo ad « asse leggero »), è valida ugualmente per i cristalli cubici. Ciò deriva dal fatto che la variazione dell'energia di anisotropia per piccole deviazioni del vettore $\mathbf{M}$ dalla sua direzione d'equilibrio ha la medesima forma in entrambi i casi. Così, per un cristallo cubico con $K' > 0$ la variazione $\delta U_{\text{an}}$ per una deviazione di $\mathbf{M}$ dalla direzione $\mathbf{M}_0$ lungo lo spigolo del cubo dipende unicamente dall'angolo $\vartheta$ fra $\mathbf{M}$ e $\mathbf{M}_0$ e vale $\delta U_{\text{an}} = K'M^2\vartheta^2$. Confrontando questa espressione con quella analoga $\delta U_{\text{an}} = KM^2\vartheta^2/2$ per il cristallo monoassiale, vediamo che per il passaggio al caso di cristallo cubico con $K' > 0$ è sufficiente sostituire nella (70,10) $K \to 2K'$. È facile convincersi in modo analogo che per il passaggio al caso di cristallo cubico con $K' < 0$ (la direzione $\mathbf{M}_0$ coincide con la diagonale spaziale del cubo) si deve sostituire $K \to 4\,|\,K'\,|/3$. Notiamo anche che nel cristallo cubico la grandezza $\alpha(\mathbf{n})$ diventa costante. Per un ferromagnete monoassiale del tipo a « piano leggero » ($K < 0$) si ha una situazione diversa: la variazione $\delta U_{\text{an}}$ per una deviazione di $\mathbf{M}$ da $\mathbf{M}_0$ dipende sia dall'angolo polare che dall'azimut della direzione $\mathbf{M}$ rispetto a $\mathbf{M}_0$; pertanto questo caso necessita di un esame particolare, si veda il problema.

Ricordiamo che il risultato (70,10) si riferisce soltanto alla parte iniziale dello spettro, nella quale i quasi-impulsi $k \ll 1/a$ ed è ammissibile un esame macroscopico. Dal lato dei valori $k$ grandi ($\alpha k^2 \gg 4\pi, K$), ma soddisfacenti questa condizione, l'espressione (70,10) si riduce a

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = 2\beta M\alpha(\mathbf{n})\,k^2 + 2\beta\mathfrak{H}. \tag{70,11}$$

Il primo termine qui coincide con l'espressione puramente di scambio (70,4). Quanto al campo esterno, esso aggiunge semplicemente all'energia del magnone il termine $2\beta\mathfrak{H}$. Quindi, in questa approssimazione il magnone ha la proiezione del momento su $\mathbf{M}_0$ pari a $-2\beta$. L'eccitazione nel corpo di ogni magnone diminuisce di $2\beta$ il momento magnetico totale del corpo.

Nel caso inverso, per $\mathbf{k} \to 0$, l'espressione (70,10) tende ad una grandezza diversa da zero e pari (per $\mathfrak{H} = 0$) a

$$\varepsilon(0) = 2\beta MK\left(1 + \frac{4\pi}{K}\operatorname{sen}^2\theta\right)^{1/2}. \qquad (70,12)$$

Quindi, se si tiene conto dell'anisotropia magnetica, ciò implica la comparsa della fessura energetica nello spettro dei magnoni [1]). Questo risultato è naturale poiché, in presenza di anisotropia, persino una rotazione del momento magnetico come un tutt'uno (cioè per $\mathbf{k} = 0$) è legata a un'energia finita. Si vede così che per $\mathbf{k}$ piccoli gli effetti relativistici, pur essendo esigui, conducono a delle correzioni relativamente grandi dello spettro.

La rappresentazione dei magnoni quali eccitazioni elementari si riferisce a stati del corpo debolmente eccitati e, quindi, a temperature basse. Pertanto nelle formule relative ai magnoni i valori di tutte le costanti materiali (compresa la magnetizzazione $M$) si devono calcolare per $T = 0$.

Torniamo all'ipotesi di dissipazione debole fatta al § 69. Nel quadro quantistico la dissipazione significa che il tempo di vita dei magnoni è finito, il che è condizionato dalle loro interazioni reciproche e da quelle con le altre quasi-particelle.

Se parliamo dapprima dell'interazione reciproca fra i magnoni, si deve notare prima di tutto che nell'approssimazione di scambio il numero di magnoni non cambia (ogni magnone dà in $M_z$ il medesimo contributo $-2\beta$, e l'interazione di scambio conserva $M_z$). Pertanto in questa approssimazione sono possibili unicamente processi di diffusione. La loro probabilità, però, diminuisce al diminuire della temperatura (cioè semplicemente per diminuzione del numero di diffusori) in modo che lo smorzamento di scambio tende comunque a zero per $T = 0$. Vedremo più avanti (§ 72) che lo stato con un solo magnone nell'approssimazione di scambio è effettivamente uno stato rigorosamente stazionario del sistema [2]).

Per $T = 0$ lo smorzamento dei magnoni è condizionato esclusivamente dai processi di decadimento. Questi processi sono possibili soltanto a causa delle interazioni relativistiche, e già per questo la loro probabilità è piccola. Inoltre, per $\mathbf{k}$ piccoli la probabilità di decadimento diminuisce sempre, poiché i pesi statistici (volumi di fase) degli stati finiti del processo sono piccoli.

Lo smorzamento dei magnoni è dovuto anche alla loro interazione

---

[1]) La frequenza corrispondente $\omega(0) = \varepsilon(0)/\hbar$ si chiama frequenza di *risonanza ferromagnetica*.

[2]) È da notare anche che la sezione di diffusione di due magnoni l'uno sull'altro nell'approssimazione di scambio tende a zero al diminuire della loro energia (§ 73). Questa circostanza diminuisce anch'essa lo smorzamento di scambio dei magnoni a temperature basse. Per temperature sufficientemente basse gli effetti relativistici sono essenziali anche per i processi di diffusione.

con i fononi (qui l'operatore di perturbazione è la parte dell'operatore hamiltoniano dell'interazione di scambio dipendente dalla deformazione del cristallo). Per $T = 0$ è possibile il processo di generazione di un fonone da parte del magnone; a tale scopo, però, il quasi-impulso del magnone deve essere sufficientemente grande, vale a dire che la velocità del magnone $\partial\varepsilon/\hbar\partial\mathbf{k}$ deve superare la velocità del suono (si veda la nota alla pag. 331). La probabilità del processo è piccola anche per il fatto che il peso statistico dello stato finale è esiguo.

Infine, in un metallo ferromagnetico è sempre possibile (grazie all'interazione di scambio con gli elettroni di conduzione) che l'elettrone sia eccitato da un magnone da sotto la superficie di Fermi. Ma anche qui la probabilità del processo per $\mathbf{k}$ piccoli è piccola, poiché il peso statistico degli stati finali è esiguo.

### PROBLEMA

Trovare lo spettro dei magnoni in un ferromagnete monoassiale del tipo a « piano leggero » ($K < 0$).

*Soluzione.* La magnetizzazione d'equilibrio $\mathbf{M}_0$ si trova nel piano perpendicolare all'asse di simmetria del cristallo (asse $z$); consideriamo la direzione $\mathbf{M}_0$ come asse $x$. In questo caso l'equazione linearizzata del moto del momento magnetico ha la forma

$$-i\varepsilon\mathbf{m} = 2\beta\,\{\alpha k^2\,[\mathbf{n}_x\mathbf{m}] - |\,K\,|\,m_z\mathbf{n}_y - [\mathbf{n}_x\mathbf{h}]\},$$

dove $\mathbf{n}_x$, $\mathbf{n}_y$ sono due vettori unità diretti lungo gli assi coordinati, mentre il vettore $\mathbf{m}$ giace nel piano $yz$ perpendicolare a $\mathbf{M}_0$. Sostituendovi $\mathbf{h}$ dalla (70,7), scrivendo l'equazione nelle componenti e uguagliando a zero il determinante del sistema così ottenuto, otteniamo lo spettro dei magnoni

$$\varepsilon\,(\mathbf{k}) = 2\beta M\,[\alpha k^2\,(\alpha k^2 + |\,K\,|) + 4\pi\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,(\alpha k^2 + |\,K\,|\,\mathrm{sen}^2\,\varphi)]^{1/2},$$

dove $\theta$ e $\varphi$ sono l'angolo polare e l'azimut di $\mathbf{k}$ rispetto alla direzione $\mathbf{M}_0$ (l'azimut va calcolato a partire dal piano $xz$). Per $\alpha k^2 \gg 1$ riotteniamo lo stesso spettro quadratico (70,4), ma per $k \to 0$ l'energia del magnone tende alla grandezza

$$\varepsilon\,(0) = 4\,(\pi\,|\,K\,|)^{1/2}\beta M\,|\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\,|,$$

che si annulla quando il vettore $\mathbf{k}$ giace nel piano $xz$ formato dall'asse di simmetria e dalla magnetizzazione spontanea del cristallo. Questo annullamento, tuttavia, è approssimato: se si tiene conto dei termini di ordine superiore nell'energia di anisotropia, vi è la comparsa dell'anisotropia anche nel piano $xy$ e, quindi, di una fessura energetica finita in tutte le direzioni di $\mathbf{k}$ [1]).

## § 71. *Magnoni in un ferromagnete. Grandezze termodinamiche*

I magnoni eccitati in un ferromagnete danno un contributo alle sue grandezze termodinamiche. I risultati ottenuti nel paragrafo precedente permettono di calcolare questo contributo a temperature

---

[1]) Ricordiamo (si veda VIII, § 37) che lo sviluppo dell'energia di anisotropia in potenze di $\mathbf{M}$ è effettivamente lo sviluppo nel rapporto relativistico $v/c$ (e non è legato a $\mathbf{M}$ piccolo, cioè alla vicinanza al punto di Curie).

basse, nel senso che $T \ll T_c$. Infatti, in equilibrio termico alla temperatura $T$ la parte fondamentale dei magnoni ha energia $\varepsilon \sim T$. Ciò significa per lo spettro quadratico

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = 2\beta M\alpha(\mathbf{n})\, k^2 \tag{71,1}$$

che alle temperature $T \ll T_c$ i magnoni con quasi-impulsi $k \ll (T_c/\beta M\alpha)^{1/2}$ sono eccitati. Sfruttando la stima (69,7) per $\alpha$ e stimando la magnetizzazione come $M \sim \beta/a^3$ (il momento magnetico dell'ordine di qualche $\beta$ è riferito a una sola cella elementare), di qui ricaviamo $ak \ll 1$, che è la condizione di applicabilità dei risultati del § 70.

Le parti « magnoniche » delle grandezze termodinamiche di un ferromagnete vanno calcolate come grandezza termodinamiche di un gas di Bose perfetto con potenziale chimico nullo. Così, per la parte magnonica del potenziale termodinamico $\Omega$ abbiamo

$$\Omega_{\text{mag}} = T \int \ln\left(1 - e^{-\varepsilon/T}\right) \frac{V\, d^3k}{(2\pi)^3} \tag{71,2}$$

(si veda V (54,4)). Di qui ricaviamo il contributo magnonico all'energia interna [1])

$$E_{\text{mag}} = \Omega_{\text{mag}} - T\frac{\partial \Omega_{\text{mag}}}{\partial T} = \int \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/T} - 1} \frac{V\, d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{71,3}$$

Quanto al contributo magnonico alla magnetizzazione spontanea, esso rappresenta la variazione con la temperatura e si calcola come derivata rispetto al campo magnetico esterno

$$M_{\text{mag}} \equiv M(T) - M(0) = -\frac{1}{V}\frac{\partial \Omega_{\text{mag}}}{\partial \mathfrak{H}}\bigg|_{\mathfrak{H}\to 0}$$

(cfr. VIII (31,4)). Derivando l'espressione (71,2), otteniamo

$$M_{\text{mag}} = -\int \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathfrak{H}}\bigg|_{\mathfrak{H}\to 0} \frac{1}{e^{\varepsilon/T} - 1} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{71,4}$$

La derivata $-(\partial\varepsilon/\partial\mathfrak{H})$ rappresenta il momento magnetico proprio del magnone.

Calcoliamo gli integrali (71,3-4) alle temperature $T \gg 2\pi\beta M$ [2]); allora per lo spettro dei magnoni si può usare l'espressione limite (71,1). Data la rapida convergenza degli integrali, si può estendere l'integrazione a tutto lo spazio $\mathbf{k}$ (al posto di una sola cella del reticolo inverso). Ponendo costante la grandezza $\alpha$ (per cristalli cubici)

---

[1]) Per il potenziale chimico $\mu = 0$ (e quindi per $\Phi = N\mu = 0$) abbiamo $E = \Phi + TS - PV = TS + \Omega$; l'entropia invece vale $S = -\partial\Omega/\partial T$. È ovvio che l'espressione (71,3) si potrebbe anche scrivere direttamente senza ricorrere alla formula (71,2).

[2]) Per il valore tipico $M = 2 \cdot 10^3$ G questa condizione dà $T \gg 1$ K.

e sostituendo $d^3k \to 4\pi k^2 dk$, otteniamo dopo una sostituzione evidente

$$E_{\text{mag}} = \frac{VT^{5/2}}{4\pi^2 A^{3/2}} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}\,dx}{e^x - 1} = V \frac{T^{5/2}\Gamma(5/2)\,\zeta(5/2)}{4\pi^2 A^{3/2}},$$

dove per brevità si è indicato $A = 2\beta M\alpha$ (in modo che $\varepsilon = Ak^2$) [1]. Di qui troviamo il calore specifico $C_{\text{mag}} = \partial E_{\text{mag}} / \partial T$ che vale

$$C_{\text{mag}} = V \frac{5\Gamma(5/2)\,\zeta(5/2)}{8\pi^2 A^{3/2}} T^{3/2} = 0{,}113 \left(\frac{T}{A}\right)^{3/2} V. \qquad (71{,}5)$$

Ricordiamo che questa espressione fornisce la sola parte magnonica del calore specifico; insieme ad essa, il calore specifico del cristallo contiene ancora la comune parte fononica.

Tornando all'integrale (71,4), sostituiamo, in accordo con la (70,11), il valore $-2\beta$ del momento magnetico del magnone. Come risultato, per $T \gg 2\pi\beta M$ otteniamo

$$M_{\text{mag}} = -\frac{\beta T^{3/2}}{2\pi^2 A^{3/2}} \int_0^\infty \frac{x^{1/2}\,dx}{e^x - 1}, \qquad (71{,}6)$$

da cui

$$M(T) = M(0) - \frac{\beta T^{3/2}\Gamma(3/2)\,\zeta(3/2)}{2\pi^2 A^{3/2}} = M(0) - 0{,}117\beta\,(T/A)^{3/2} \qquad (71{,}7)$$

(il contributo magnonico esaurisce, certamente, tutta la variazione della magnetizzazione, poiché i fononi non portano con sé momento magnetico). Quindi, la variazione della magnetizzazione spontanea nel dominio delle temperature $2\pi\beta M \ll T \ll T_c$ segue la legge $T^{3/2}$ (*F. Bloch*, 1930).

L'esistenza della fessura (70,10) nello spettro dei magnoni implica la dipendenza esponenziale di $C_{\text{mag}}$ e $M_{\text{mag}}$ da $T$ nel dominio delle temperature ancora più basse. Per $T \ll \beta KM$ si ha

$$C_{\text{mag}},\ M_{\text{mag}} \sim \exp(-2\,\beta KM/T). \qquad (71{,}8)$$

La grandezza che figura al numeratore dell'esponente è il valore più piccolo della fessura energetica che si ottiene per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ (si veda anche il problema 1).

Se la magnetizzazione spontanea del ferromagnete nello stato fondamentale è pari al più grande valore possibile (come si dice, al valore nominale) corrispondente al parallelismo di tutti i momenti atomici nel corpo, questo valore non cambierà se viene applicato (nella stessa direzione) un campo magnetico esterno, vale a dire che la suscettività $\chi$ in questa direzione è nulla.

---

[1]) Per il calcolo degli integrali di questo tipo si veda V, § 58.

Se si tiene conto delle interazioni relativistiche, ciò diminuisce la magnetizzazione spontanea (per $T = 0$) rispetto al suo valore « di scambio » ed implica la comparsa di una suscettività diversa da zero (*T. Holstein*, *H. Primakoff*, 1940). Sebbene questo effetto sia molto piccolo, il suo calcolo presenta un interesse di principio.

Calcolando sopra la parte magnetica delle grandezze termodinamiche abbiamo omesso l'energia nulla degli « oscillatori magnetici », che non dà nessun contributo alla dipendenza di queste grandezze dalla temperatura. L'energia nulla corrisponde ai numeri di riempimento degli stati magnonici, uguali a 1/2:

$$E(0)_{\text{mag}} = \int \frac{1}{2}\,\varepsilon(\mathbf{k})\,\frac{V\,d^3k}{(2\pi)^3}.$$

Rispettivamente la magnetizzazione « nulla » è

$$M(0) = -\int \frac{1}{2}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathfrak{H}}\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{71,9}$$

Questo integrale diverge per grandi $k$, vale a dire che esso viene definito soprattutto dai magnoni a onde corte ($ka \sim 1$), che in generale non si possono considerare macroscopicamente. Tuttavia la variazione della magnetizzazione sotto l'influsso degli effetti relativistici va determinata, come vedremo, dal dominio delle onde lunghe dello spettro dei magnoni e può essere calcolata mediante le formule dedotte al § 70.

Per semplicità, considereremo il cristallo cubico e trascureremo la costante di anisotropia che è piccola in questo caso, cioè scriveremo lo spettro dei magnoni (70,10) nella forma

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = 2\beta\,[(bk^2 + \mathfrak{H})\,(bk^2 + \mathfrak{H} + 4\pi M \operatorname{sen}^2\theta)]^{1/2} \tag{71,10}$$

dove $b = \alpha M$; agli effetti relativistici in questa espressione corrisponde il termine $4\pi M \operatorname{sen}^2\theta$ che compare quando si tiene conto dell'energia magnetostatica. La variazione cercata della magnetizzazione sotto l'influsso degli effetti relativistici si ottiene sottraendo dalla (71,9) lo stesso integrale nel quale $\varepsilon_{\text{scamb}}(\mathbf{k}) = 2\beta bk^2 + 2\beta\mathfrak{H}$ sostituisce $\varepsilon(\mathbf{k})$:

$$\delta M = -\frac{1}{2}\int \frac{\partial}{\partial\mathfrak{H}}\,[\varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon_{\text{scamb}}(\mathbf{k})]\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{71,11}$$

Questo integrale è già convergente per grandi $\mathbf{k}$ [1]).

[1]) Notiamo, a scanso di equivoci, che è impossibile definire con questo metodo la correzione all'energia dello stato fondamentale: senza derivazione rispetto a $\mathfrak{H}$ l'integrale di $\varepsilon - \varepsilon_{\text{scamb}}$ diverge utilizzando le espressioni ad onde lunghe per lo spettro dei magnoni.

Per il calcolo è comodo dapprima derivarlo rispetto a $M$ per $b$ costante (a tale scopo nella (71,10) è stato introdotto $b$). Dopo semplici trasformazioni otteniamo

$$\frac{\partial \delta M}{\partial M} = -\frac{4\pi^2 \beta M}{(2\pi)^3} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^4 \theta \cdot 2\pi k^2\, dk \cdot \operatorname{sen} \theta\, d\theta}{(bk^2 + \mathfrak{H})^{1/2} (bk^2 + \mathfrak{H} + 4\pi M \operatorname{sen}^2 \theta)^{3/2}}$$

Data la convergenza, si può estendere l'integrazione in $dk$ a $\infty$.

Per $\mathfrak{H} = 0$ l'integrale si calcola facilmente; integrando in seguito su $M$ otteniamo

$$\delta M = -\frac{\sqrt{\pi}\, \beta}{8\alpha^{3/2}}. \tag{71,12}$$

Questa grandezza è piccola: $\delta M/M \sim 10^{-6}$.

Se, invece, il campo esterno è grande ($\mathfrak{H} \gg 4\pi M$), si può trascurare il termine $4\pi M \operatorname{sen}^2\theta$ a denominatore dell'espressione integranda. Il calcolo dà il seguente risultato:

$$\delta M = -\frac{2\pi \beta M^{1/2}}{15\alpha^{3/2} \mathfrak{H}^{1/2}}. \tag{71,13}$$

Per $\mathfrak{H} \to \infty$ $\delta M$ tende a zero, come doveva essere.

Per concludere notiamo che se tentassimo di studiare la dipendenza della magnetizzazione di un ferromagnete bidimensionale dalla temperatura con il metodo applicato in questo paragrafo al caso tridimensionale, allora otterremmo (in approssimazione puramente di scambio) un integrale logaritmicamente divergente in luogo di quello (71,6). Ciò significa che la magnetizzazione spontanea in un sistema bidimensionale con interazione di scambio in realtà non esiste per tutte le temperature $T \neq 0$. Questa situazione è analoga a quella menzionata al § 27 per il liquido di Bose bidimensionale (e nel volume V, § 137 per un cristallo bidimensionale). L'indipendenza dell'energia del sistema dalla direzione del momento magnetico fa sì che nella sua espressione figurino le sole derivate del vettore **M**; a sua volta, ciò implica, in ultima analisi, la divergenza delle fluttuazioni (nel caso bidimensionale) che distruggono la magnetizzazione. Le interazioni relativistiche, di cui si è tenuto conto, stabilizzano le fluttuazioni, in quanto dipendono dalla direzione **M**, e rendono possibile l'esistenza di un ferromagnete bidimensionale.

## PROBLEMI

**1. Calcolare le parti magnoniche delle grandezze termodinamiche alle temperature $T \ll \varepsilon(0)$.**

*Soluzione.* Sono essenziali i magnoni di quasi-impulsi **k** piccoli, propagantisi nella direzione in cui la fessura è minima, cioè in prossimità di $\theta = 0$ e $\theta =$

$= \pi$; questi due valori danno un medesimo contributo. Ad esempio, per $\theta$ piccoli, abbiamo con la precisione richiesta

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = 2\beta KM + Ak^2 + 4\pi\beta M\theta^2,$$

dove $A = 2\beta M\alpha$ per i cristalli cubici o $A = 2\beta M\alpha_2$ per i cristalli monoassiali del tipo ad « asse leggero ». La distribuzione dei magnoni alle temperature considerate si può supporre come quella di Boltzmann (cioè si può trascurare l'unità ai denominatori delle espressioni integrande) e sostituire ovunque nei fattori davanti all'esponente $\varepsilon(\mathbf{k})$ con $\varepsilon(0)$. L'integrazione in $k$ e $\theta$ si estende a $\infty$, e come risultato otteniamo

$$E_{\text{mag}} = V\frac{KT^{5/2}}{32\pi^{5/2}A^{3/2}}\exp\left(-\frac{2\beta KM}{T}\right), \qquad M_{\text{mag}} = -\frac{E_{\text{mag}}}{VKM}.$$

Calcolando il calore specifico, si deve derivare il solo fattore esponenziale

$$C_{\text{mag}} = 2\beta KMT^{-2}E_{\text{mag}}.$$

2. Definire la dipendenza della magnetizzazione dal campo esterno per le condizioni $\mathfrak{H} \gg 4\pi M$, $T \gg \beta\mathfrak{H}$.

*Soluzione.* Nelle dette condizioni si possono trascurare i termini relativistici e scrivere $\varepsilon(\mathbf{k})$ nella forma (70,11). Derivando l'espressione (71,4), troviamo

$$\frac{\partial M}{\partial \mathfrak{H}} = \frac{4\beta^2}{T}\int\frac{e^{\varepsilon/T}}{(e^{\varepsilon/T}-1)^2}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

Nell'integrale sono essenziali i $\mathbf{k}$ piccoli, perciò

$$\frac{\partial M}{\partial \mathfrak{H}} \approx 4\beta^2 T\int\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \frac{T}{2\pi^2}\int_0^\infty\frac{k^2\,dk}{(\alpha k^2 M_0 + \mathfrak{H})^2}$$

(poniamo $\alpha =$ costante; $M_0$ è il valore di $M$ per $\mathfrak{H} = 0$) e infine

$$\frac{\partial M}{\partial \mathfrak{H}} = \frac{T}{8\pi(\alpha M_0)^{3/2}\mathfrak{H}^{1/2}}.$$

Quindi, nelle condizioni considerate $M - M_0 \sim \mathfrak{H}^{1/2}$.

3. Definire la dipendenza della magnetizzazione per $T = 0$ dal campo esterno in campi deboli.

*Soluzione.* Derivando su $\mathfrak{H}$ l'integrale (71,11) con $\varepsilon(\mathbf{k})$ dalla (71,10), otteniamo

$$\frac{\partial M}{\partial \mathfrak{H}} = \int\frac{4\pi^2\beta M_0^2\,\text{sen}^4\,\theta}{[(\alpha M_0 k^2 + 4\pi M_0\,\text{sen}^2\,\theta + \mathfrak{H})(\alpha M_0 k^2 + \mathfrak{H})]^{3/2}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

Per $\mathfrak{H} \to 0$ l'integrale in $dk$ diverge logaritmicamente per $k$ piccoli. Pertanto, limitandosi alla precisione logaritmica, si può porre $k = 0$, $\mathfrak{H} = 0$ nel primo fattore a denominatore e $\mathfrak{H} = 0$ nel secondo, ma, inoltre, si deve tagliare l'integrale inferiormente per $k^2 \sim \mathfrak{H}/\alpha M_0$ e superiormente per $k^2 \sim 4\pi/\alpha$. Come risultato otteniamo

$$\frac{\partial M}{\partial \mathfrak{H}} = \frac{\beta}{32\sqrt{\pi}\,M_0\alpha^{3/2}}\ln\frac{4\pi M_0}{\mathfrak{H}}.$$

Ricordiamo che nella (71,10) abbiamo trascurato $K$. Per $\mathfrak{H} \ll KM$ nel logaritmo a $\mathfrak{H}$ si sostituisce $KM_0$.

4. Nell'approssimazione di scambio definire la funzione di correlazione spaziale delle fluttuazioni della magnetizzazione a distanze $r \gg a$.

*Soluzione.* Gli operatori $\hat{m}_x$ e $\hat{m}_y$, soddisfacenti la regola di commutazione (70,6) ed espressi mediante gli operatori di annichilazione e creazione dei magnoni, hanno la seguente forma (nella rappresentazione di Schrödinger):

$$\hat{m}_x(\mathbf{r}) = (\beta M/V)^{1/2} \sum_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} + \hat{a}^+_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{kr}}),$$

$$\hat{m}_y(\mathbf{r}) = i\,(\beta M/V)^{1/2} \sum_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} - \hat{a}^+_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{kr}}).$$

Mediante questi operatori calcoliamo la funzione di correlazione

$$\varphi_{ik}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \langle \hat{m}_i(\mathbf{r}_1)\, \hat{m}_k(\mathbf{r}_2) + \hat{m}_k(\mathbf{r}_2)\, \hat{m}_i(\mathbf{r}_1) \rangle, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

(gli indici $i$, $k$ assumono i valori $x$, $y$). Tenendo conto che gli elementi matriciali diagonali non nulli hanno soltanto i prodotti $\langle \hat{a}^+_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} \rangle = n_{\mathbf{k}}$, $\langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}^+_{\mathbf{k}} \rangle = n_{\mathbf{k}} + 1$ (dove $n_{\mathbf{k}}$ sono i numeri di riempimento degli stati magnonici), otteniamo

$$\varphi_{ik}(\mathbf{r}) = \delta_{ik} \int 2\beta M \left( n_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

L'espressione integranda fornisce direttamente la componente di Fourier della funzione di correlazione. Si può omettere in essa il termine costante cui corrisponde l'addendo funzionale $\delta$ in $\varphi_{ik}(\mathbf{r})$, mentre tutto l'esame si riferisce unicamente alle distanze $r \gg a$. In tal modo abbiamo

$$\varphi_{ik}(\mathbf{k}) = 2\beta M n_{\mathbf{k}} \delta_{ik} = 2\beta M\, [e^{\varepsilon(\mathbf{k})/T} - 1]^{-1} \delta_{ik}.$$

Nel limite classico per $\varepsilon \ll T$ troviamo

$$\varphi_{ik}(\mathbf{k}) = \delta_{ik} T/\alpha k^2.$$

In un ferromagnete cubico $\alpha$ = costante, e allora

$$\varphi_{ik}(\mathbf{r}) = \delta_{ik} T/4\pi\alpha r, \qquad r \gg (\beta M \alpha/T)^{1/2}.$$

## § 72. *Operatore hamiltoniano di spin*

Per ottenere la legge di dispersione dei magnoni in tutto l'intervallo di variazione del quasi-impulso (e non soltanto nel limite delle onde lunghe) è necessario, ovviamente, utilizzare delle rappresentazioni più dettagliate della struttura microscopica del ferromagnete.

Consideriamo un dielettrico composto di atomi di momento orbitale nullo e di spin $S$ diverso da zero. A prescindere dagli stati altamente eccitati legati all'eccitazione degli strati elettronici degli atomi, si può calcolare la media dell'operatore hamiltoniano del sistema rispetto alle variabili orbitali degli elettroni degli atomi nello stato fondamentale (e per i nuclei atomici fissati nei nodi del reticolo). Come risultato otteniamo l'operatore hamiltoniano di spin del sistema contenente i soli operatori degli spin completi degli atomi [1]).

[1]) Questa procedura è analoga al metodo di costruzione degli operatori hamiltoniani di singoli atomi che descrivono la struttura fine dei loro livelli; cfr. III, § 72.

Se si tiene conto della sola interazione di scambio dipendente unicamente dalle orientazioni relative degli spin, allora gli operatori dei vettori di spin degli atomi possono figurare nell'operatore hamiltoniano soltanto sotto forma di combinazioni scalari. Un interesse notevole presenta lo studio di un sistema descritto da un operatore hamiltoniano di questo tipo

$$\hat{H}_{\text{scamb}} = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{m} \neq \mathbf{n}} J_{\mathbf{nm}} \hat{S}_{\mathbf{n}} \hat{S}_{\mathbf{m}}, \qquad J_{\mathbf{nm}} = J(\mathbf{r}_{\mathbf{n}} - \mathbf{r}_{\mathbf{m}}), \tag{72,1}$$

dove la sommatoria è estesa a tutti gli atomi; gli indici « vettoriali » (di componenti numeriche intere) $\mathbf{m}$ e $\mathbf{n}$ numerano i nodi del reticolo; $\mathbf{r}_{\mathbf{n}}$ ne sono i raggio-vettori. I numeri $J_{\mathbf{nm}}$ si chiamano *integrali di scambio* (cfr. III, § 62, problemi) [1]). Per sommatoria indipendente su $\mathbf{m}$ e $\mathbf{n}$ ogni coppia di atomi si incontra due volte nella somma (72,1) e, ovviamente, $J_{\mathbf{nm}} = J_{\mathbf{mn}}$.

Nell'espressione (72,1) tutti gli atomi magnetici nel reticolo sono supposti identici (uno in ogni cella elementare). L'ipotesi fondamentale sulla quale è basato un operatore hamiltoniano di questo tipo consiste in una sufficiente mutua lontananza degli atomi nel reticolo. L'integrale di scambio viene determinato dalla « sovrapposizione » delle funzioni d'onda di due atomi e decresce molto rapidamente (in modo esponenziale) all'aumentare della distanza fra gli atomi. Per un sistema di atomi mutuamente lontani si può quindi supporre che l'interazione sia a coppie, per cui l'espressione (72,1) non contiene termini con prodotti di operatori di spin di più di due atomi. Con la stessa approssimazione si può ritenere che l'interazione di scambio fra due atomi sia realizzata ogni volta da una sola coppia di elettroni, uno di ogni atomo. Allora l'operatore di interazione verrà costruito in modo bilineare negli operatori di spin degli elettroni, e dopo il calcolo della media rispetto agli stati atomici, in modo bilineare negli spin atomici (*C. Herring*, 1966) [2]).

Il sistema descritto dall'operatore hamiltoniano (72,1) è ferromagnetico se gli integrali di scambio $J_{\mathbf{mn}} > 0$. Determiniamo l'energia dello stato fondamentale di questo sistema. Supponiamo in

---

[1]) La descrizione dell'interazione di scambio mediante l'operatore hamiltoniano di spin è stata introdotta da *P.A.M. Dirac* (1929). L'operatore hamiltoniano (72,1) è stato introdotto da *J. H. van Vleck* (1931); di solito è chiamato operatore hamiltoniano di Heisenberg poiché esso corrisponde al modello ferromagnetico studiato per la prima volta da *Heisenberg*.

[2]) In queste condizioni la sommatoria nella (72,1) deve essere eseguita, ovviamente, soltanto su coppie di atomi vicini. Con ciò la scrittura delle formule non si semplifica per niente, e per questa ragione non terremo conto in modo esplicito di questa condizione.

questo caso che esista anche un campo magnetico esterno $\mathfrak{H}$ ed associamo all'operatore hamiltoniano (72,1) l'operatore

$$\hat{V} = -2\beta\mathfrak{H} \sum_{\mathbf{m}} \hat{S}_{\mathbf{m}z} \tag{72,2}$$

(l'asse $z$ coincide con la direzione del campo). L'operatore $\sum \hat{S}_{\mathbf{m}z}$ della proiezione dello spin totale del sistema è commutativo sia con $\hat{H}_{\text{scamb}}$ sia con $\hat{V}$; pertanto gli stati del sistema si possono classificare in base agli autovalori di questa grandezza.

Nel caso ferromagnetico allo stato fondamentale corrisponde il valore massimo possibile della proiezione dello spin totale pari a $NS$, dove $N$ è il numero di atomi nel sistema (ciò non è legato, s'intende, all'esistenza del campo esterno, il quale non fa altro che evidenziare la direzione scelta dell'asse). $\chi_0$ sia la funzione d'onda di spin normalizzata dello stato fondamentale.

Il valore massimo $NS$ della proiezione dello spin totale può essere raggiunto nel solo caso in cui anche la proiezione dello spin di ciascun atomo abbia il suo valore massimo $S$. Perciò $\chi_0$ è, al tempo stesso, autofunzione di ciascuno degli operatori $\hat{S}_{\mathbf{n}z}$:

$$\hat{S}_{\mathbf{n}z}\chi_0 = S\chi_0. \tag{72,3}$$

Introduciamo, in quanto necessari per le considerazioni ulteriori, gli operatori $\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$, soddisfacenti le seguenti regole di commutazione:

$$\begin{aligned} \hat{S}_+\hat{S}_- - \hat{S}_-\hat{S}_+ &= 2\hat{S}_z, \\ \hat{S}_z\hat{S}_\pm - \hat{S}_\pm\hat{S}_z &= \pm\hat{S}_\pm \end{aligned} \tag{72,4}$$

(si veda III (26,12)). I loro elementi matriciali sono

$$\langle S_z | S_+ | S_z - 1\rangle = \langle S_z - 1 | S_- | S_z\rangle = \sqrt{(S+S_z)(S-S_z+1)} \tag{72,5}$$

(si veda III (27,12)); l'operatore $\hat{S}_+$ aumenta e l'operatore $\hat{S}_-$ diminuisce di uno il valore della proiezione $S_z$. In seguito, scriviamo

$$\hat{S}_{\mathbf{m}}\hat{S}_{\mathbf{n}} = \hat{S}_{\mathbf{m}z}\hat{S}_{\mathbf{n}z} + \frac{1}{2}(\hat{S}_{\mathbf{m}+}\hat{S}_{\mathbf{n}-} + \hat{S}_{\mathbf{m}-}\hat{S}_{\mathbf{n}+})$$

e poi

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{m}\neq\mathbf{n}} J_{\mathbf{mn}}(\hat{S}_{\mathbf{m}z}\hat{S}_{\mathbf{n}z} + \hat{S}_{\mathbf{m}-}\hat{S}_{\mathbf{n}+}) - 2\beta\mathfrak{H}\sum_{\mathbf{m}} \hat{S}_{\mathbf{m}z}, \tag{72,6}$$

dove sono state utilizzate la simmetria $J_{\mathbf{mn}} = J_{\mathbf{nm}}$ e la commutatività degli operatori relativi ad atomi distinti.

Poiché gli operatori $\hat{S}_{n+}$ hanno elementi matriciali soltanto per le transizioni che fanno crescere i numeri $S_z$, per gli stati con valori massimi di questi numeri abbiamo

$$\hat{S}_{n+}\chi_0 = 0 \tag{72,7}$$

(ciò che si vede anche dalle espressioni esplicite (72,5) degli elementi matriciali). Pertanto, quando l'operatore hamiltoniano (72,6) agisce sulla funzione d'onda $\chi_0$, si ha

$$\hat{H}\chi_0 = \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{m \neq n} J_{mn} S^2 - 2\beta \mathfrak{H} NS \right\} \chi_0.$$

L'espressione fra parentesi rappresenta esattamente l'energia $E_0$ dello stato fondamentale. Sostituendo la somma su m e n con quella su m e $q = n - m$, scriviamo $E_0$ nella forma definitiva

$$E_0 = -\frac{1}{2} NS^2 \sum_{q \neq 0} J_q - 2\beta SN\mathfrak{H}. \tag{72,8}$$

Il momento magnetico totale del sistema in questo stato è $2\beta SN$.

Lo stato del sistema successivo, nell'ordine di diminuzione della proiezione dello spin totale, risponde al valore $NS - 1$ della detta proiezione e corrisponde all'eccitazione di un magnone di momento magnetico $-2\beta$. Di questo valore della proiezione dello spin totale gode lo stato con la funzione d'onda

$$(2S)^{-1/2} \hat{S}_{n-}\chi_0, \tag{72,9}$$

nel quale la proiezione dello spin di uno degli atomi è diminuita di 1 sotto l'azione dell'operatore $\hat{S}_{n-}$ [1]). Questa funzione, però, non è autofunzione dell'operatore hamiltoniano del sistema poiché in essa non si è tenuto ancora conto della simmetria traslazionale del reticolo. Un'autofunzione dell'operatore hamiltoniano deve essere costruita come combinazione lineare delle funzioni (72,9) con tutti i numeri n. Dagli stessi ragionamenti che ci hanno condotto nel § 55 alle funzioni di Bloch per l'elettrone in un campo periodico risulta che questa combinazione lineare deve avere la forma

$$\chi_k = (2NS)^{-1/2} \sum_n e^{ikr_n} \hat{S}_{n-}\chi_0 \tag{72,10}$$

---

[1]) È facile verificare la normalizzazione della funzione (72,9), osservando che

$$(\hat{S}_{n-}\chi_0)^* (\hat{S}_{n-}\chi_0) = \chi_0^* \hat{S}_{n-}^+ \hat{S}_{n-}\chi_0 \equiv$$

$$\equiv \langle S \mid S_{n+} S_{n-} \mid S \rangle = \langle S \mid S_{n+} \mid S-1 \rangle \langle S-1 \mid S_{n-} \mid S \rangle = 2S.$$

($N^{-1/2}$ è fattore di normalizzazione) affinché si possa correttamente tener conto della simmetria traslazionale. Il vettore costante **k** non è altro che il quasi-impulso del magnone.

L'energia $\varepsilon(\mathbf{k})$ del magnone è la differenza $E_{\mathbf{k}} - E_0$ fra le energie degli stati eccitato e fondamentale del sistema. Perciò

$$(\hat{H} - E_0)\chi_{\mathbf{k}} = \varepsilon(\mathbf{k})\,\chi_{\mathbf{k}}.$$

Sostituendo a primo membro di questa uguaglianza l'espressione (72,10) e sostituendo $E_0\chi_0$ con $\hat{H}\chi_0$, otteniamo

$$\varepsilon(\mathbf{k})\,\chi_{\mathbf{k}} = (2NS)^{-1/2} \sum_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_{\mathbf{n}}} (\hat{H}\hat{S}_{\mathbf{n}-} - \hat{S}_{\mathbf{n}-}\hat{H})\,\chi_0. \qquad (72,11)$$

È facile calcolare il commutatore, che qui figura, scrivendo $\hat{H}$ nella forma (72,6) e usando le regole di commutazione (72,4). Tenendo di nuovo conto della simmetria dei coefficienti $J_{\mathbf{mn}}$, otteniamo

$$\hat{H}\hat{S}_{\mathbf{n}-} - \hat{S}_{\mathbf{n}-}\hat{H} = \sum_{\mathbf{m}}{}^{*} J_{\mathbf{mn}} (\hat{S}_{\mathbf{m}z}\hat{S}_{\mathbf{n}-} - \hat{S}_{\mathbf{n}z}\hat{S}_{\mathbf{m}-}) + 2\beta\mathfrak{H}\hat{S}_{\mathbf{n}-}. \qquad (72,12)$$

Infine, sostituendo questa espressione nella (72,11), tenendo conto della (72,3) e passando alla sommatoria su $\mathbf{q} = \mathbf{n} - \mathbf{m}$, troviamo

$$\varepsilon(\mathbf{k})\,\chi_{\mathbf{k}} = \{S \sum_{\mathbf{q}\neq 0} J_{\mathbf{q}} (1 - e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_{\mathbf{q}}}) + 2\beta\mathfrak{H}\}\,\chi_{\mathbf{k}}.$$

L'espressione fra parentesi graffe è l'energia cercata del magnone. La parte immaginaria dell'espressione sotto il segno di somma, essendo funzione dispari di $\mathbf{r}_{\mathbf{q}}$, si annulla in seguito alla sommatoria, cosicché si ha infine

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = S \sum_{\mathbf{q}\neq 0} J_{\mathbf{q}} (1 - \cos \mathbf{k}\mathbf{r}_{\mathbf{q}}) + 2\beta\mathfrak{H} \qquad (72,13)$$

(*F. Bloch*, 1930).

Questa formula esprime la legge di dispersione precisa dei magnoni nel sistema descritto dall'operatore hamiltoniano (72,1). Nel caso limite di **k** piccoli questa legge si trasforma, naturalmente, in quella quadratica

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} S k_i k_k \sum_{\mathbf{q}\neq 0} J_{\mathbf{q}} x_{\mathbf{q}i} x_{\mathbf{q}k} + 2\beta\mathfrak{H}. \qquad (72,14)$$

Il punto di Curie del sistema in questione si trova a temperature $T_c \sim J$ in modo che a temperature $T \gg J$ il sistema è paramagnetico a priori. A queste temperature si può trascurare, in prima approssimazione, l'interazione fra gli atomi. In questa approssimazione la suscettività magnetica del sistema coinciderà con la suscettività di un gas perfetto di atomi con spin $S$ e verrà data dalla formula

$$\chi = \frac{N}{V} \frac{4\beta^2 S(S+1)}{3T} \qquad (72,15)$$

(si veda V, § 52); la suscettività è riferita all'unità di volume. Questa espressione è il primo termine dello sviluppo della funzione $\chi(T)$ in potenze di $1/T$. I termini di sviluppo successivi dipendono già dall'interazione fra gli atomi; determiniamone il primo.

La suscettività (nel campo nullo) è definita come la derivata $\chi = \partial M/\partial \mathfrak{H}$ per $\mathfrak{H} \to 0$, e la magnetizzazione $M$ si calcola come derivata dell'energia libera: $VM = -\partial F/\partial \mathfrak{H}$. Per risolvere il problema posto si deve calcolare $F$ a meno dei termini $\sim 1/T^2$.

Partiamo dalla formula $F = -T \ln Z$, dove $Z$ è la somma statistica

$$Z = \sum_n e^{-E_n/T} \approx \sum_n \left(1 - \frac{E_n}{T} + \frac{E_n^2}{2T^2} - \frac{E_n^3}{6T^3}\right);$$

la sommatoria è estesa a tutti i livelli energetici del sistema [1]). Il numero totale dei livelli nello spettro del sistema considerato è finito e uguale al numero di tutte le combinazioni possibili di orientazioni degli spin atomici rispetto al reticolo. Ogni spin ha $2S + 1$ orientazioni distinte; pertanto il detto numero è $(2S + 1)^N$. Indicando con il trattino sopra la lettera la media aritmetica semplice, riscriviamo la somma $Z$ nella forma

$$Z = (2S+1)^N \left[1 - \frac{1}{T}\overline{E} + \frac{1}{2T^2}\overline{E^2} - \frac{1}{6T^3}\overline{E^3}\right].$$

La media $\overline{E^m} = \mathrm{Tr}\hat{H}^m/(2S+1)^N$. In base alla nota proprietà della traccia dell'operatore, questi può essere calcolato partendo da qualsiasi sistema completo di funzioni d'onda; supponiamo che siano tali le funzioni corrispondenti a tutte le scelte possibili di orientazioni degli spin atomici. Allora la media si riduce alla media indipendente di ciascuno degli spin rispetto alle sue direzioni; in questo caso $\overline{E} = 0$. Calcolando ora il logaritmo di $Z$ e sviluppando di nuovo in potenze di $1/T$, con la stessa precisione otteniamo

$$F = TN \ln (2S+1) - \frac{1}{2T}\overline{E^2} + \frac{1}{6T^2}\overline{E^3}. \qquad (72,16)$$

In questa espressione ci interessano i termini contenenti $\mathfrak{H}^2$, poiché soltanto essi daranno un contributo alla suscettività. Omettendo tutti gli altri termini e osservando che nell'operazione di media le potenze dispari delle componenti dello spin si annullano, otteniamo

$$F = -\frac{(2\beta\mathfrak{H})^2}{2T}\sum_{\mathbf{n}} \overline{S^2_{\mathbf{n}z}} - \frac{(2\beta\mathfrak{H})^2}{2T^2}\cdot\frac{1}{2}\times$$
$$\times \sum_{\mathbf{n}\neq\mathbf{m}} 2J_{\mathbf{mn}}\,(\overline{S_{\mathbf{n}}S_{\mathbf{n}z}})\,(\overline{S_{\mathbf{m}}S_{\mathbf{m}z}}).$$

[1]) Il calcolo ulteriore dell'energia libera corrisponde ai calcoli eseguiti al § 73 del volume V, prolungandoli al termine successivo dello sviluppo.

Le medie sono

$$\overline{S_{nz}S_{nx}} = \overline{S_{nz}S_{ny}} = 0, \quad \overline{S_{nz}^2} = S(S+1)/3.$$

In tal modo,

$$F = -\frac{2}{3T}\beta^2\mathfrak{H}^2 NS(S+1) - \frac{2}{9T^2}\beta^2\mathfrak{H}^2 NS^2 \times$$
$$\times (S+1)^2 \sum_{q\neq 0} J_q,$$

e di qui ricaviamo infine la suscettività

$$\chi = \frac{4\beta^2 S(S+1)N}{3TV}\left[1 + \frac{S(S+1)}{3T}\sum_{q\neq 0} J_q\right]. \qquad (72,17)$$

Sottolineiamo che il segno del termine correttivo fra parentesi quadre dipende dal segno dell'integrale di scambio.

## PROBLEMI

1. Trovare la parte magnetica del calore specifico del sistema descritto dall'operatore hamiltoniano (72,1) a temperature $T \gg J$.

*Soluzione.* Il primo termine dello sviluppo del calore specifico in potenze di $1/T$ proviene dal termine $-\overline{E^2}/2T$ nell'energia libera (72,16). Calcolando nello stesso modo la media dell'operatore hamiltoniano (72,1), otteniamo

$$\overline{E^2} = \frac{1}{4}2\sum_{m\neq n} J_{mn}^2 \overline{S_{mi}S_{mk}}\,\overline{S_{ni}S_{nk}} = 3\frac{S^2(S+1)^2}{9}\frac{N}{2}\sum_{q\neq 0} J_q^2$$

(poiché $\overline{S_iS_k} = S(S+1)\delta_{ik}/3$). Infine troviamo il calore specifico

$$C_{\text{mag}} = \frac{NS^2(S+1)^2}{6T^2}\sum_{q\neq 0} J_q^2$$

in accordo con la formula (73,4) del volume V.

2. Trascurando l'interazione fra gli spin, calcolare la magnetizzazione di un paramagnetico per un rapporto arbitrario fra $\beta\mathfrak{H}$ e $T$.

*Soluzione.* La somma statistica (per uno spin nel campo) è

$$Z = \sum_{S_z=-S}^{S} \exp\left(-\frac{2\beta\mathfrak{H}}{T}S_z\right) = \frac{\operatorname{sh}[2\beta\mathfrak{H}(S+1/2)/T]}{\operatorname{sh}(\beta\mathfrak{H}T)}.$$

Calcolando l'energia libera e derivandola rispetto a $\mathfrak{H}$, troviamo la magnetizzazione

$$M = \frac{N}{V}T\frac{\partial}{\partial\mathfrak{H}}\ln Z = \frac{2\beta N}{V}\left\{\left(S+\frac{1}{2}\right)\operatorname{cth}\frac{2\beta\mathfrak{H}(S+1/2)}{T} - \frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{\beta\mathfrak{H}}{T}\right\}$$

(*L. Brillouin*, 1927). Per $\beta\mathfrak{H} \ll T$ questa espressione si trasforma nella (72,15). Nel limite inverso, per $\beta\mathfrak{H} \gg T$, la magnetizzazione tende al suo valore nominale secondo la legge

$$M = \frac{2\beta NS}{V}\left\{1 - \exp\left(-\frac{2\beta\mathfrak{H}}{T}\right)\right\}.$$

## § 73. *Interazione dei magnoni*

È di notevole interesse metodologico la questione del contributo nella parte magnetica delle grandezze termodinamiche di un ferromagnete, originato dall'interazione dei magnoni; ricordiamo che i calcoli al § 71 erano basati sulla rappresentazione di un gas perfetto di magnoni non interagenti. Consideriamo questa questione per un sistema descritto dall'operatore hamiltoniano di spin di scambio (72,1).

Cercando un contributo solo di un ordine più piccolo rispetto al rapporto piccolo $T/T_c$, possiamo limitarci alla sola interazione a coppie dei magnoni. Ciò vuol dire che si devono considerare stati bimagnonici del sistema, nei quali la proiezione dello spin totale vale $NS - 2$.

A questa proiezione corrispondono le funzioni d'onda

$$\begin{aligned} \chi_{nn} &= [4S(2S-1)]^{-1/2}\,\hat{S}_{n-}\hat{S}_{n-}\chi_0, \\ \chi_{mn} &= (2S)^{-1}\,\hat{S}_{m-}\hat{S}_{n-}\chi_0, \quad m \neq n; \end{aligned} \tag{73,1}$$

poiché gli operatori dello spin di atomi distinti sono commutativi, allora $\chi_{mn} = \chi_{nm}$ [1]). Le funzioni (73,1) sono normalizzate dalla condizione $\chi^*_{mn}\chi_{mn} = 1$ che si verifica facilmente sviluppando il prodotto nello stesso modo con cui è stata provata la normalizzazione della funzione (72,9). Questo modo permette anche di provare che funzioni distinte $\chi_{mn}$ sono mutuamente ortogonali.

Le funzioni (73,1) non sono di per se stesse autofunzioni dell'operatore hamiltoniano. Per quanto riguarda le funzioni degli stati stazionari bimagnonici del sistema, esse devono essere certe combinazioni lineari delle funzioni $\chi_{nm}$ che scriviamo nella forma

$$\chi = \sum_{m \neq n} \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_{mn}\chi_{mn} + \sum_{n} \psi_{nn}\chi_{nn} \tag{73,2}$$

(poiché $\chi_{mn}$ e $\chi_{nm}$ è la stessa cosa, si deve anche porre $\psi_{mn} \equiv \psi_{nm}$). La totalità dei coefficienti $\psi_{mn}$ costituisce una funzione d'onda nella rappresentazione in cui i numeri degli atomi nel reticolo sono variabili indipendenti. Il fattore $1/\sqrt{2}$ nella prima somma dell'espressio-

---

[1]) Se lo spin $S = 1/2$, la doppia applicazione del medesimo operatore $\hat{S}_{n-}$ alla funzione $\chi_0$ dello stato fondamentale l'annulla. In questo caso, quindi, tutte le funzioni « diagonali » $\chi_{nn} \equiv 0$.

ne (73,2) è stato introdotto affinché il quadrato del modulo $|\chi|^2$ sia uguale alla somma $\sum|\psi_{mn}|^2$, nella quale ciascuna delle $\psi_{mn}$ distinte si incontrerebbe una sola volta.

Allo stesso modo in cui è stata dedotta l'equazione (72,11) per le funzioni d'onda degli stati stazionari monomagnonici troviamo che le funzioni (73,2) devono verificare un'equazione analoga

$$\mathscr{E}\chi = \sum_{m\neq n} \frac{\psi_{mn}}{2^{3/2}S}\{\hat{H}, \hat{S}_{m-}\hat{S}_{n-}\}\chi_0 + \\ + \sum_{n} \frac{\psi_{nn}}{2[S(2S-1)]^{1/2}}\{\hat{H}, \hat{S}_{n-}\hat{S}_{n-}\}\chi_0, \qquad (73,3)$$

dove ora $\mathscr{E} = E - E_0$ è l'energia di due magnoni interagenti (e la parentesi $\{\ldots\}$ significa un commutatore).

Sviluppiamo i commutatori a secondo membro dell'equazione (73,3). A tale scopo osserviamo che

$$\{\hat{H}, \hat{S}_{m-}\hat{S}_{n-}\} \equiv \{\hat{H}, \hat{S}_{m-}\}\hat{S}_{n-} + \hat{S}_{m-}\{\hat{H}, \hat{S}_{n-}\}$$

e serviamoci delle espressioni (72,12) per i commutatori $\{\hat{H}, \hat{S}_{n-}\}$. In seguito, tenendo conto delle regole di commutazione (72,4), trasportiamo gli operatori $\hat{S}_z$ nella posizione estrema destra, dove essi, agendo sulla funzione $\chi_0$, la moltiplicano per $S$. Come risultato otteniamo

$$\{\hat{H}, \hat{S}_{m-}\hat{S}_{n-}\}\chi_0 = S\sum_{l}[J_{ml}(\hat{S}_{m-} - \hat{S}_{l-})\hat{S}_{n-} + \\ + J_{nl}(\hat{S}_{n-} - \hat{S}_{l-})\hat{S}_{m-}]\chi_0 + \\ + \delta_{mn}\sum_{l} J_{nl}\hat{S}_{n-}\hat{S}_{l-}\chi_0 - J_{mn}\hat{S}_{m-}\hat{S}_{n-}\chi_0 + 4\beta\mathfrak{H}\hat{S}_{m-}\hat{S}_{n-}\chi_0; \qquad (73,4)$$

per rendere più facile la scrittura delle formule, omettiamo le restrizioni imposte agli indici di somma, e la sommatoria è estesa a tutti i valori $l$, ma inoltre è supposto che tutte le grandezze « diagonali » $J_{ll}$ siano nulle.

Il procedimento ulteriore consiste nel sostituire la (73,4) nell'equazione (73,3) e nel rendere uguali i coefficienti delle funzioni $\chi_{mn}$ identiche in ambedue i membri dell'uguaglianza. I calcoli sono elementari anche se abbastanza complessi. Come risultato essi conducono al seguente sistema di equazioni per le grandezze $\psi_{mn}$:

$$(2JS - \mathscr{E})\psi_{mn} = S\sum_{l}(J_{lm}\psi_{ln} + J_{ln}\psi_{lm}) + \\ + J_{mn}\psi_{mn} - A_S[J_{mn}(\psi_{mm} + \psi_{nn}) + 2\delta_{mn}\sum_{l} J_{lm}\psi_{lm}], \qquad (73,5)$$

dove

$$A_S = S\left[1 - \left(\frac{2S-1}{2S}\right)^{1/2}\right]$$

ed è stata introdotta la notazione $J$ per la somma $\sum_{\mathbf{l}} J_{\mathbf{nl}}$ che è, evidentemente, indipendente dall'indice $\mathbf{n}$ [1]).

Passiamo in questa equazione dalla rappresentazione delle coordinate (variabili indipendenti sono le coordinate degli atomi $\mathbf{r}_n$, $\mathbf{r}_m$) a quella degli impulsi, ponendo cioè

$$\psi_{mn} = \frac{1}{N} e^{i\mathbf{K}(\mathbf{r}_m+\mathbf{r}_n)/2} \sum_{\mathbf{k}} \psi(\mathbf{K}, \mathbf{k})\, e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_m-\mathbf{r}_n)}. \tag{73,6}$$

Il vettore $\mathbf{K}$ funge da quasi-impulso totale di due magnoni, e $\mathbf{k}$ da quasi-impulso del loro moto relativo; si somma su $N$ valori discreti di $\mathbf{k}$ ammissibili per un reticolo di volume $Nv$ (dove $N$ è il numero di atomi nel reticolo, $v$ il volume della sua cella elementare). Assieme a $\psi_{mn}$ si devono rappresentare sotto forma di serie di Fourier anche gli integrali di scambio:

$$J_{mn} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_m-\mathbf{r}_n)} J(\mathbf{k}), \qquad J(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{n}} J_{0\mathbf{n}} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_n)} \tag{73,7}$$

(siccome $J_{mn} = J_{nm}$, allora $J(\mathbf{k}) = J(-\mathbf{k})$).

Tralasciando i semplici calcoli intermedi, diamo subito il risultato finale della trasformazione dell'equazione (73,5):

$$\left[\varepsilon\left(\frac{\mathbf{K}}{2}+\mathbf{k}\right)+\varepsilon\left(\frac{\mathbf{K}}{2}-\mathbf{k}\right)-\mathscr{E}\right]\psi(\mathbf{K}, \mathbf{k})+$$
$$+\int U(\mathbf{K}, \mathbf{k}, \mathbf{k}')\,\psi(\mathbf{K}, \mathbf{k}')\,\frac{V\,d^3k'}{(2\pi)^3}=0, \tag{73,8}$$

dove

$$NU(\mathbf{K}, \mathbf{k}, \mathbf{k}') = A_S\left[J\left(\frac{\mathbf{K}}{2}+\mathbf{k}\right)+J\left(\frac{\mathbf{K}}{2}-\mathbf{k}\right)+J\left(\frac{\mathbf{K}}{2}+\mathbf{k}'\right)+\right.$$
$$\left.+J\left(\frac{\mathbf{K}}{2}-\mathbf{k}'\right)\right]-\frac{1}{2}\left[J(\mathbf{k}-\mathbf{k}')+J(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\right], \tag{73,9}$$

ed $\varepsilon(\mathbf{k})$ è l'energia di un magnone data dalla formula (72,13); la sommatoria su $\mathbf{k}'$ è sostituita con l'integrazione su una cella del reticolo inverso.

Quindi, il problema preciso (nei limiti dell'operatore hamiltoniano (72,1)) degli stati bimagnonici del sistema si riduce alla soluzione di un'equazione completamente analoga a quella di Schrödinger per un sistema di due particelle nella rappresentazione degli impulsi

---

[1]) Queste equazioni sono valide anche per il caso di spin $S = 1/2$ quando tutte le $\psi_{nn}$ sono arbitrarie. Sottolineiamo che per $S = 1/2$ tutte le grandezze « diagonali » $\psi_{nn}$ scompaiono, in generale, dalle equazioni con $m \neq n$. Le equazioni con $m = n$ si devono considerare in questo caso come semplicemente non esistenti.

(cfr. III (130,4)). In questo caso le $\varepsilon(\mathbf{k})$ hanno il ruolo di energie cinetiche delle particelle, mentre il nucleo dell'equazione integrale $U(\mathbf{K}, \mathbf{k}, \mathbf{k}')$ quello di elemento matriciale dell'energia di interazione $U$ fra le particelle per il passaggio (diffusione) dagli stati con gli impulsi $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ agli stati con gli imulsi $\mathbf{k}_1'$, $\mathbf{k}_2'$, dove

$$\mathbf{k}_1=\frac{\mathbf{K}}{2}+\mathbf{k}, \quad \mathbf{k}_2=\frac{\mathbf{K}}{2}-\mathbf{k}, \quad \mathbf{k}_1'=\frac{\mathbf{K}}{2}+\mathbf{k}', \quad \mathbf{k}_2'=\frac{\mathbf{K}}{2}-\mathbf{k}'.$$

In questo senso è opportuno scrivere $U(\mathbf{K}, \mathbf{k}, \mathbf{k}')$ nella forma

$$NU(\mathbf{k}_1', \mathbf{k}_2'; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)=A_S[J(\mathbf{k}_1)+J(\mathbf{k}_2)+J(\mathbf{k}_1')+J(\mathbf{k}_2')]-$$
$$-\frac{1}{2}[J(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_1')+J(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2')]. \qquad (73,10)$$

Nel caso generale l'equazione (73,8-9) è molto complicata. Ci limitiamo al calcolo della correzione alle grandezze termodinamiche supponendo che $S \gg 1$. La semplicità di questo caso è dovuta al fatto che l'energia dei magnoni $\varepsilon(\mathbf{k})$ è proporzionale a $S$ e la loro interazione $U$ non dipende da $S$ (per $S \gg 1$ il coefficiente nella (73,9) $A_S \approx 1/4$). Pertanto si può considerare $U$ come una piccola perturbazione. Allora la correzione $\Omega_{\text{int}}$ (dall'interazione dei magnoni) al potenziale termodinamico $\Omega$ verrà semplicemente determinata dalla media di $U$. Considerando l' « elemento di matrice diagonale »

$$U(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)=\frac{1}{2N}[J(\mathbf{k}_1)+J(\mathbf{k}_2)-J(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)-J(0)], \qquad (73,11)$$

noi calcoliamo così la media rispetto a uno stato con dati quasi-impulsi dei magnoni. In seguito, la media statistica rispetto alla distribuzione d'equilibrio dei magnoni si ottiene per integrazione

$$\Omega_{\text{int}}=\int n(\mathbf{k}_1)\, n(\mathbf{k}_2)\, U(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\frac{V^2 d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^6}, \qquad (73,12)$$

dove $n(\mathbf{k}) = [\exp(\varepsilon(\mathbf{k})/T) - 1]^{-1}$ è la funzione di distribuzione di Bose.

A temperature basse l'integrale è definito dal dominio dei $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ piccoli per cui tutte le $\varepsilon(\mathbf{k})$ e $J(\mathbf{k})$ si devono sviluppare in potenze di $\mathbf{k}$. Allora $\varepsilon(\mathbf{k})$ viene data dall'espressione quadratica (72,14). Essendo $J(\mathbf{k})$ funzione pari di $\mathbf{k}$, i primi termini del suo sviluppo

$$J(\mathbf{k}) \approx J(0) + a_{ik}k_i\, k_k$$

sono anch'essi quadratici. Allora

$$U(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)=\frac{1}{N}a_{ik}k_{1i}k_{2k}.$$

Ma sostituendo questa espressione dispari in $\mathbf{k}_1$ e $\mathbf{k}_2$ nella (73,12), l'integrale si annulla in seguito al calcolo della media nelle direzioni $\mathbf{k}_1$ e $\mathbf{k}_2$.

Questa è la ragione per cui nello sviluppo di $J(\mathbf{k})$ si deve tener conto dei termini del quarto ordine; come risultato la funzione $U(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ nell'integrale (73,12) diventa una forma di quarto grado, mentre un contributo non nullo nell'integrale proviene dai termini di questa forma, quadratici in $\mathbf{k}_1$ e $\mathbf{k}_2$. Data la rapida convergenza, l'integrazione può essere estesa a tutto lo spazio $\mathbf{k}$. Allora la sostituzione di variabili $\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}\sqrt{T}$ ci permette di vedere che la dipendenza di $\Omega_{\text{int}}$ da $T$ e $\mathfrak{H}$ ha la forma

$$\Omega_{\text{int}} = VT^5 f(\mathfrak{H}/T), \tag{73,13}$$

dove $f(0)$ e $f'(0)$ sono finiti. Ne consegue che il termine correttivo nella magnetizzazione vale

$$M_{\text{int}} = -\frac{1}{V}\frac{\partial\Omega_{\text{int}}}{\partial\mathfrak{H}}\bigg|_{\mathfrak{H}=0} = \text{costante}\cdot T^4. \tag{73,14}$$

Alla stessa legge ubbidisce il termine correttivo nel calore specifico [1]).

Vediamo che l'interazione fra i magnoni conduce a correzioni alle grandezze termodinamiche solo in un'approssimazione di ordine superiore rispetto a $T/T_c$. Ricordiamo che i termini fondamentali nella magnetizzazione e nella parte magnetica del calore specifico seguono la legge $T^{3/2}$. Fra questi termini e le correzioni di $\Omega_{\text{int}}$ esistono ancora dei termini proporzionali a $T^{5/2}$ e $T^{7/2}$ che provengono dai termini successivi dello sviluppo dell'energia di magnoni $\varepsilon(\mathbf{k})$ in potenze $\mathbf{k}^2$.

Le equazioni ottenute permettono di studiare anche la questione degli stati legati di due magnoni. Questi stati si rivelano come autovalori discreti (per K dato) dell'equazione (73,8). Questi autovalori $\mathscr{E}(\mathrm{K})$, quali funzioni della variabile K rappresentano nuovi rami delle eccitazioni elementari nel sistema. Lo studio dimostra, tuttavia, che questi stati esistono solo per K sufficientemente grandi; comunque essi non incidono sulle grandezze termodinamiche del ferromagnete a temperature basse [2]).

---

[1]) Questi risultati (nel caso generale di spin arbitrario) sono stati ottenuti originariamente da *F. Dyson* (1956). Nel dedurre l'equazione (73,5) abbiamo seguito soprattutto il metodo di *R. J. Boyd* e *J. Callaway* (1965).

[2]) Si veda *M. Wortis*, Phys. Rev. **132**, 85 (1963). Si tratta del reticolo tridimensionale. Nei casi bi- e unidimensionale gli stati legati magnonici esistono per tutti i valori di $\mathbf{k}$.

PROBLEMA

Partendo dall'ipotesi $S \gg 1$, trovare le correzioni per l'interazione fra i magnoni alla magnetizzazione e al calore specifico di un reticolo cubico, in cui gli integrali di scambio sono diversi da zero per le sole coppie di atomi vicini (lungo gli assi cubici).

*Soluzione.* Ogni atomo ha sei atomi vicini. In base alla definizione (73,7) troviamo

$$J(\mathbf{k}) = 2J_0 (\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a),$$

dove $J_0$ è l'integrale di scambio per una coppia di atomi vicini e $a$ la lunghezza dello spigolo del reticolo cubico. Per $\mathbf{k}$ piccoli abbiamo

$$J(\mathbf{k}) \approx J_0 \left[ 2 - a^2 k^2 + \frac{a^4}{12} (k_x^4 + k_y^4 + k_z^4) \right],$$

di qui

$$U(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = -\frac{a^7 J_0}{4V} (k_{1x}^2 k_{2x}^2 + k_{1y}^2 k_{2y}^2 + k_{1z}^2 k_{2z}^2)$$

(sono omessi i termini dispari in $\mathbf{k}_1$ e $\mathbf{k}_2$). L'energia del magnone, in accordo con la formula (72,14), è

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = SJ_0 a^2 k^2 + 2\beta\mathfrak{H}.$$

Il calcolo dell'integrale (73,12) dà i seguenti risultati:

$$\frac{M_{\text{int}}}{M} = -\frac{3\pi\zeta(3/2)\,\zeta(5/2)}{2S^2} \left( \frac{T}{4\pi S J_0} \right)^4, \quad C_{\text{int}} = \frac{15\pi\zeta^2(5/2)\,N}{S} \left( \frac{T}{4\pi S J_0} \right)^4$$

($\zeta$ è una $\zeta$-funzione).

## § 74. *Magnoni in un antiferromagnete*

La caratteristica dei materiali antiferromagnetici è che i momenti magnetici di tutti gli elettroni, nei limiti di ogni cella elementare del reticolo cristallino, sono reciprocamente compensati (nello stato d'equilibrio in assenza di campo magnetico). La densità del momento magnetico è distribuita, a rigore, in tutto il volume della cella. Ma nei cristalli dei dielettrici antiferromagnetici si può supporre con buona approssimazione che questa densità sia localizzata in atomi singoli in modo che a ciascuno di essi si può attribuire un momento magnetico determinato. Questi momenti, che si ripetono periodicamente in tutte le celle, creano *sottoreticoli magnetici* degli antiferromagneti.

I diversi antiferromagneti sono molto diversi per la loro struttura. Consideriamo la questione del loro spettro energetico magnetico con un esempio tipico di cristallo con due atomi magnetici disposti nei punti equivalenti di ogni cella elementare (cioè in punti che si trasformano l'uno nell'altro per certe trasformazioni della simmetria cristallografica). Indichiamo con $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ le densità medie dei

momenti magnetici formati da questi atomi dei sottoreticoli ed introduciamo i due vettori

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2, \quad \mathbf{L} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2. \tag{74,1}$$

Nello stato fondamentale dell'antiferromagnete $\mathbf{M} = 0$, $\mathbf{L} \neq 0$, mentre un ferromagnete avrebbe $\mathbf{M} \neq 0$, $\mathbf{L} = 0$. Sottolineiamo la differenza sostanziale fra gli stati fodamentali in ambedue i casi. Nell'approssimazione di scambio, nello stato fondamentale del ferromagnete le proiezioni degli spin di tutti gli atomi magnetici hanno dei valori (massimi possibili) $S_z = S$ cui corrisponde il valore nominale della magnetizzazione $\mathbf{M}$. Nello stato fondamentale dell'antiferromagnete, invece, le magnetizzazioni dei sottoreticoli non possono avere evidentemente i loro valori nominali poiché le proiezioni totali degli spin di ciascun sottoreticolo separato non sono (neanche nell'approssimazione di scambio) grandezze conservative e perciò non hanno valori determinati (nello stato stazionario). Le proiezioni degli spin dei singoli atomi non hanno, a maggior ragione, valori determinati.

La forma delle « equazioni del moto » macroscopiche dei vettori $\mathbf{L}$ e $\mathbf{M}$ si stabilisce analogamente a quanto è stato fatto al § 69 per un ferromagnete. La condizione di mancanza di dissipazione ne implica un'altra, secondo la quale, in virtù delle equazioni del moto, si verifica l'uguaglianza

$$-\frac{d\widetilde{F}}{dt} = \int \left\{ \mathbf{H}_L \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} + \mathbf{H}_M \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right\} dV = 0, \tag{74,2}$$

dove i «campi efficaci» $\mathbf{H}_L$ e $\mathbf{H}_M$ sono dati dall'espressione

$$\delta \widetilde{F} = -\int (\mathbf{H}_L \delta \mathbf{L} + \mathbf{H}_M \delta \mathbf{M})\, dV \tag{74,3}$$

della variazione dell'energia libera al variare di $\mathbf{L}$ e $\mathbf{M}$; in equilibrio si ha $\mathbf{H}_L = \mathbf{H}_M = 0$.

Nell'approssimazione di scambio le equazioni cercate devono essere invarianti per la rotazione contemporanea di tutti i momenti magnetici rispetto al reticolo cristallino. Di qui, oltre all'equivalenza cristallografica delle posizioni di due atomi magnetici nella cella, deriva anche la necessità dell'invarianza rispetto alla permutazione di $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$, cioè rispetto alla trasformazione $\mathbf{L} \to -\mathbf{L}$, $\mathbf{M} \to \mathbf{M}$. Poiché l'energia libera è invariante, per questa trasformazione risulta anche $\mathbf{H}_L \to -\mathbf{H}_L$ e $\mathbf{H}_M \to \mathbf{H}_M$.

Considerando le piccole oscillazioni dei momenti magnetici, poniamo $\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 + \mathbf{l}$, $\mathbf{M} \equiv \mathbf{m}$, dove $\mathbf{l}$ e $\mathbf{m}$ sono due grandezze piccole. Nell'approssimazione lineare, le equazioni del moto soddisfacenti alle suddette condizioni hanno la forma

$$\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} = \gamma\, [\mathbf{H}_M \mathbf{v}], \quad \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = \gamma\, [\mathbf{H}_L \mathbf{v}], \tag{74,4}$$

dove $\mathbf{v}$ è il vettore unità nella direzione d'equilibrio del vettore $\mathbf{L}_0$; la trasformazione $\mathbf{L} \to -\mathbf{L}$ significa che $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$. Qui si è tenuto conto che le grandezze $\mathbf{H}_L$ e $\mathbf{H}_M$ si annullano in equilibrio e sono lineari rispetto a $\mathbf{l}$ e $\mathbf{m}$, mentre $\mathbf{v}$ è l'unico vettore costante a nostra disposizione. Per analogia con il § 69 il coefficiente $\gamma$ si può scrivere come segue: $\gamma = (g \mid e \mid /2mc)\, L_0$; tuttavia, a differenza del ferromagnete, ora $g \neq 2$ anche trascurando gli effetti relativistici. Per oscillazioni monocromatiche $\partial \mathbf{l}/\partial t = -i\omega \mathbf{l}, \ldots$, e allora i vettori $\mathbf{l}$ e $\mathbf{m}$ definiti dalle equazioni (74,4) sono perpendicolari a $\mathbf{v}$. Nell'approssimazione in questione ciò vuol dire che il vettore $\mathbf{L}$ compie una precessione attorno alla direzione $\mathbf{v}$ rimanendo costante in modulo: $L \approx L_0$.

Per definire i campi efficaci $\mathbf{H}_L$ e $\mathbf{H}_M$ si deve stabilire la forma dell'energia libera del cristallo. In questo caso dobbiamo limitarci ai termini del secondo ordine rispetto alle grandezze piccole $\mathbf{l}$ e $\mathbf{m}$; quanto ai termini contenenti le derivate di queste grandezze rispetto alle coordinate, consideriamo quelli di ordine non superiore al secondo rispetto al vettore d'onda delle oscillazioni, la cui lunghezza d'onda è supposta grande (come al § 70) rispetto alla costante del reticolo. Nell'approssimazione di scambio l'energia libera deve essere invariante per rotazioni contemporanee di tutti i momenti magnetici e anche per cambiamento di segno di $\mathbf{L}$. L'espressione che soddisfa tutte le condizioni imposte ha la forma

$$F_{\text{scamb}} = \int \left\{ \frac{a\mathbf{m}^2}{2} + \frac{b}{2}\left(\mathbf{m}\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial z} - \mathbf{l}\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}\alpha_{ik}\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x_i}\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x_k} \right\} dV, \tag{74,5}$$

dove l'asse $z$ si può considerare diretto lungo $\mathbf{v}$ (in modo che il cambiamento di segno di $\mathbf{v}$ significa anche quello di $z$); il coefficiente $a > 0$, poiché in equilibrio deve essere $\mathbf{m} = 0$. Qui manca il termine in $\mathbf{l}^2$ in quanto la sua esistenza significherebbe la dipendenza dell'energia dalla direzione del vettore $\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 + \mathbf{l}$ nel cristallo, che manca nell'approssimazione di scambio. Il termine contenente la somma $\mathbf{m}\,\partial \mathbf{l}/\partial z + \mathbf{l}\,\partial \mathbf{m}/\partial z$ si riduce a una derivata totale e scomparirebbe per integrazione sul volume. Infine, i termini quadratici nelle derivate $\partial \mathbf{m}/\partial x_i$ si possono trascurare in quanto piccoli a priori rispetto al termine in $\mathbf{m}^2$. Facendo variare l'integrale (74,5) (ed integrandolo per parti), otteniamo

$$\mathbf{H}_L = b\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial z} + \alpha_{ik}\frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial x_i\, \partial x_k}, \qquad \mathbf{H}_M = -a\mathbf{m} - b\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial z}. \tag{74,6}$$

Per un'onda di spin monocromatica piana le equazioni del moto (74,4) danno ora

$$\begin{aligned} -i\omega \mathbf{l} &= -\gamma a\,[\mathbf{m}\mathbf{v}] - ik_z\gamma b\,[\mathbf{l}\mathbf{v}], \\ -i\omega \mathbf{m} &= ik_z\gamma b\,[\mathbf{m}\mathbf{v}] - \gamma\alpha\,(\mathbf{n})\,k^2\,[\mathbf{l}\mathbf{v}], \end{aligned} \tag{74,7}$$

dove nuovamente (così come al § 70) $\alpha$ (n) $= \alpha_{ik} n_i n_k$ e **n** è il vettore unità diretto nella direzione **k**. Moltiplicando la prima di queste equazioni vettorialmente per **v**, otteniamo

$$\gamma a \mathbf{m} = -i\omega\,[\mathbf{l}\mathbf{v}] - ik_z \gamma b \mathbf{l}, \tag{74,8}$$

mentre la sostituzione di questa espressione nella seconda equazione ci conduce immediatamente alla seguente legge di dispersione delle onde di spin:

$$\omega = \gamma k\,[a\alpha(\mathbf{n}) - b^2\,(\mathbf{v}\mathbf{n})^2]^{1/2}. \tag{74,9}$$

In tal modo, la frequenza delle onde di spin e, quindi, l'energia dei magnoni $\varepsilon = \hbar\omega$ in un materiale antiferromagnetico, nell'approssimazione di scambio, sono proporzionali a $k$ e non a $k^2$ come nel ferromagnete [1]).

Le equazioni (74,7) stabiliscono un legame univoco fra **l** e **m**, ma le due componenti di **l** (nel piano perpendicolare a **v**) restano arbitrarie. Ciò significa che le onde di spin nell'antiferromagnete considerato hanno due direzioni di polarizzazione indipendenti.

Per tener conto dell'anisotropia magnetica occorre avanzare delle ipotesi più concrete circa il carattere di simmetria del cristallo. Supponiamo che il cristallo abbia simmetria monoassiale e che la direzione d'equilibrio **L** coincida con l'asse di simmetria [2]).

Dalla relazione (74,8) si vede che il vettore **m** nell'onda di spin è piccolo rispetto a **l**, in quanto ha una potenza in più del piccolo vettore d'onda **k**. In questo senso il campo efficace $\mathbf{H}_M \gg \mathbf{H}_L$. Per questa ragione è sufficiente tener conto dell'anisotropia legata al vettore **l**. Con le suddette ipotesi la densità di questa energia $U_{\text{an}} = K\mathbf{l}^2/2$, dove $K > 0$. Il suo calcolo implica la comparsa del termine addizionale $-K\mathbf{l}$ nel campo efficace $\mathbf{H}_L$, il quale per un'onda piana diventa uguale a

$$\mathbf{H}_L = ik_z b\mathbf{m} - [\alpha\,(\mathbf{n})\,k^2 + K]\,\mathbf{l}. \tag{74,10}$$

Si vede di qui che, tenendo conto dell'anisotropia, la legge di dispersione delle onde di spin si deduce dalla (74,9) sostituendovi $\alpha k^2$

---

[1]) Questa legge di dispersione per gli antiferromagneti è stata dedotta originariamente da *L. Hulthén* (1936). La deduzione basata sulla considerazione macroscopica della magnetizzazione dei sottoreticoli appartiene a *M. I. Kaganov* e *V. M. Tsukernik* (1958).

[2]) Di questo tipo è l'antiferromagnete $FeCO_3$ avente reticolo romboedrico (classe cristallina $D_{3d}$) con due ioni Fe nella cella elementare. I momenti magnetici di questi ioni hanno direzioni opposte lungo l'asse di simmetria del terzo ordine (asse $z$).

con $\alpha k^2 + K$. Come risultato, per $k \to 0$, l'energia dei magnoni tenderà non a zero, bensì alla grandezza finita [1])

$$\varepsilon(0) = \hbar\gamma\sqrt{aK} \tag{74,11}$$

(*Ch. Kittel*, 1951). Sottolineiamo che la fessura nello spettro risulta essere proporzionale alla radice della costante di anisotropia (anziché alla sua potenza prima come nella (70,12)). Poiché la piccolezza degli effetti relativistici è espressa dalla piccolezza relativa della costante di anisotropia, in un antiferromagnete questi effetti, in generale, rivestono maggiore importanza che in un ferromagnete.

Il contributo magnonico all'energia interna degli antiferromagneti si calcola mediante la formula (71,3). Nel dominio delle temperature $\varepsilon(0) \ll T \ll T_N$ ($T_N$ è la temperatura di scomparsa dell'antiferromagnetismo, il punto di Néel) si può usare lo spettro (74,9). In un cristallo monoassiale si ha

$$\omega = \gamma a^{1/2}\,[\alpha_1\,(k_x^2 + k_y^2) + \alpha_2' k_z^2]^{1/2}, \qquad \alpha_2' = \alpha_2 - b^2/a.$$

Il calcolo dell'integrale (71,3) conduce al seguente risultato, esprimente il contributo magnonico al calore specifico:

$$C_{\text{mag}} = V\frac{4\pi^2 T^3}{15\gamma^3 a^{3/2}\,(\alpha_2'\alpha_1^2)^{1/2}\,\hbar^3}. \tag{74,12}$$

Alle temperature $T \ll \varepsilon(0)$, il contributo magnonico alle grandezze termodinamiche è esponenzialmente piccolo.

---

[1]) Spesso la frequenza $\omega(0) = \varepsilon(0)/\hbar$ si chiama *risonanza antiferromagnetica*.

Capitolo VIII

# FLUTTUAZIONI ELETTROMAGNETICHE

## § 75. *Funzione di Green del fotone in un mezzo*

Iniziando lo studio delle proprietà statistiche del campo elettromagnetico nei mezzi materiali, ricordiamo anzitutto cosa significa l'operazione di media cui vanno sottoposte le grandezze elettromagnetiche in elettrodinamica macroscopica.

Se, per maggiore evidenza, si parte dal punto di vista classico, si può fare una distinzione fra la media rispetto a un volume fisicamente infintesimale per una data disposizione di tutte le particelle in esso e, in seguito, la media della grandezza ottenuta rispetto al moto delle particelle. Nelle equazioni di Maxwell dell'elettrodinamica macroscopica figurano grandezze la cui media è completamente calcolata. Considerando invece le fluttuazioni del campo, si tratta di oscillazioni nel tempo di grandezze, la cui media è calcolata solo rispetto a volumi fisicamente infinitesimali.

È ovvio che dal punto di vista quantomeccanico si può parlare della media rispetto al volume non della grandezza fisica stessa, bensì del suo operatore; il secondo passo del procedimento consiste nel determinare la media di questo operatore mediante le probabilità quantomeccaniche. Gli operatori di campo che figurano nel presente capitolo saranno intesi unicamente come medie nel primo senso.

Le proprietà statistiche della radiazione elettromagnetica in un mezzo materiale sono descritte dalla funzione di Green del fotone in un mezzo. Per i fotoni sono gli operatori dei potenziali del campo elettromagnetico a fungere da operatori $\psi$. Le funzioni fotoniche di Green sono definite mediante questi operatori allo stesso modo come sono definite per le particelle mediante gli operatori $\psi$.

I potenziali del campo sono dei quadrivettori $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$, dove $A^0 \equiv \varphi$ è un potenziale scalare e $\mathbf{A}$ quello vettoriale. La determinazione di questi operatori in elettrodinamica classica non è univoca: essi ammettono la cosiddetta trasformazione di gauge che non incide affatto su nessuna grandezza osservabile (si veda II, § 18). Rispettivamente la stessa determinazione non univoca ha luogo in elettrodinamica quantistica per gli operatori del campo e, quindi,

per le funzioni fotoniche di Green. Useremo la trasformazione di gauge per la quale il potenziale scalare sia nullo:

$$A^0 \equiv \varphi = 0 \tag{75,1}$$

in modo che il campo sia definito dal solo potenziale vettoriale. Questa trasformazione di gauge risulta essere comoda per problemi, che riguardano l'interazione fra il campo elettromagnetico e le particelle non relativistiche, come avviene per il campo nei mezzi materiali comuni.

La funzione di Green in questa trasformazione di gauge è un tensore tridimensionale di secondo rango,

$$D_{ik}(X_1, X_2) = -i \langle \mathrm{T}\hat{A}_i(X_1)\, \hat{A}_k(X_2)\rangle \tag{75,2}$$

($i, k = x, y, z$ sono indici vettoriali tridimensionali), dove la parentesi angolare significa (come nell'espressione (36,1)) la media secondo la distribuzione di Gibbs per il sistema composto del mezzo insieme con la radiazione in equilibrio in esso; poiché i fotoni sono dei bosoni, la permutazione degli operatori $\hat{A}_i$ e $\hat{A}_k$ per cronologizzazione non implica il cambiamento di segno nel prodotto. Ricordiamo anche che gli operatori $\hat{A}_i$ sono autoconiugati (il che esprime la neutralità propria del fotone); questa è la ragione per cui nell'espressione (75,2) non si fa distinzione fra $\hat{A}_i$ e $\hat{A}_i^\dagger$ [1]).

Come nozione primaria per la costruzione di tutte le forme delle funzioni fotoniche di Green si deve ricorrere, però, non al tensore (75,2), bensì alla funzione ritardata di Green definita come segue:

$$iD^R_{ik}(X_1, X_2) = \begin{cases} \langle \hat{A}_i(X_1)\, \hat{A}_k(X_2) - \hat{A}_k(X_2)\, \hat{A}_i(X_1)\rangle, & t_1 > t_2, \\ 0, \quad t_1 < t_2 \end{cases} \tag{75,3}$$

(il segno negativo fra i due termini tra parentesi angolare corrisponde alla definizione (36,19) per la statistica di Bose).

Per un sistema chiuso la funzione di Green dipende dagli istanti $t_1$, $t_2$ soltanto attraverso la differenza $t = t_1 - t_2$. Per quanto riguarda le coordinate $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, nel caso generale di un mezzo non omogeneo esse figurano nella funzione indipendentemente l'una dall'altra: $D^R_{ik}(t;\ \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Corrispondentemente questa funzione sarà soggetta

---

[1]) Nel caso generale di una trasformazione di gauge arbitraria dei potenziali la funzione fotonica di Green è un quadritensore $D_{\mu\nu}$ (mentre nella trasformazione di gauge (75,1) $D_{00} = 0$, $D_{0i} = 0$). Le proprietà generali tensoriali e di gauge della funzione fotonica di Green in statistica sono le stesse che in elettrodinamica quantistica del campo nel vuoto. È da notare che la definizione (75,2) differisce per segno da quella accettata nel volume IV. Essa corrisponde qui univocamente alla definizione delle funzioni di Green degli altri bosoni (compresi i fononi).

allo sviluppo di Fourier soltanto rispetto al tempo; la componente di questo sviluppo è

$$D^R_{ik}(\omega; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int_0^\infty e^{i\omega t} D^R_{ik}(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\, dt. \tag{75,4}$$

Considerando le grandezze, le cui medie sono calcolate su volumi fisicamente infinitesimali, noi ci limitiamo, quindi, all'esame della parte di radiazione ad onde lunghe in cui i vettori d'onda dei fotoni soddisfano la condizione

$$ka \ll 1 \tag{75,5}$$

($a$ sono le distanze interatomiche nel mezzo). In questo dominio di frequenze la funzione fotonica di Green può essere espressa mediante altre caratteristiche macroscopiche del mezzo, ossia mediante le permeabilità dielettrica e magnetica $\varepsilon(\omega)$ e $\mu(\omega)$.

A tale scopo scriviamo l'operatore di interazione del campo elettromagnetico con il mezzo,

$$\hat{V} = -\frac{1}{c}\int \hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{A}}\, d^3x, \tag{75,6}$$

dove $\hat{\mathbf{j}}$ è l'operatore di densità del campo elettrico creato dalle particelle del mezzo [1]). Se al mezzo si applica una corrente classica « collaterale » $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$, essa sarà legata all'operatore di interazione

$$\hat{V} = -\frac{1}{c}\int \mathbf{j}(t, \mathbf{r})\, \hat{\mathbf{A}}\, d^3x. \tag{75,7}$$

Questa espressione consente di stabilire un legame con la teoria generale della reazione di un sistema macroscopico a un'azione esterna.

Ricordiamo che in questa teoria (si veda V, § 125) figurava una serie discreta di grandezze $x_a$ ($a = 1, 2, \ldots$) che caratterizzano il comportamento del sistema sotto l'influsso di determinate forze esterne. Questi influssi vengono descritti da « forze perturbatrici » $f_a(t)$ tali che l'operatore dell'energia di interazione ha la forma

$$\hat{V} = -\sum_a f_a \hat{x}_a,$$

---

[1]) Si veda IV, § 53 (dove la corrente è indicata con $e\mathbf{j}$, vale a dire che la carica elementare $e$ veniva esclusa dalla definizione di $\mathbf{j}$). L'operatore (75,6) suppone che per l'operatore di corrente sia utilizzata l'espressione relativistica. Nei problemi non relativistici si possono trascurare negli operatori $\psi$ (in base ai quali è costruito l'operatore di corrente $\hat{\mathbf{j}}$) i termini legati alle frequenze negative, cioè alle antiparticelle. Ciò significa, in particolare, la possibilità di trascurare le correzioni di radiazione che modificano la funzione fotonica di Green nel vuoto a causa della generazione virtuale di coppie elettrone-positrone. Queste correzioni sono trascurabilmente piccole per lunghezze d'onda $\lambda \gg \hbar/mc$, condizione soddisfatta a priori nel dominio (75,5).

dove $\hat{x}_a$ sono gli operatori delle grandezze $x_a$. I valori medi $\bar{x}_a(t)$, che si stabiliscono sotto l'influsso della perturbazione, rappresentano funzionali lineari delle forze $f_a(t)$. Questo legame per le componenti di Fourier di tutte le grandezze si scrive nella forma

$$\bar{x}_{a\omega} = \sum_b \alpha_{ab}(\omega) f_{b\omega}$$

(si è supposto che in assenza di perturbazione si abbia $\bar{x}_a = 0$). I coefficienti $\alpha_{ab}$ in queste relazioni si chiamano *suscettività generalizzate* del sistema. Se le due grandezze $x_a$ e $x_b$ si comportano allo stesso modo nei confronti dell'inversione del tempo e se il corpo *non è magneticamente attivo* (cioè non gode di struttura magnetica e non si trova in un campo magnetico), allora le grandezze $\alpha_{ab}$ sono simmetriche rispetto ai loro indici.

Qui avremo a che fare con grandezze $f_a$ e $x_a$ aventi un carattere distribuito, funzioni delle coordinate $\mathbf{r}$ di un punto del corpo. In questo caso l'espressione di $\hat{V}$ si deve scrivere nella forma

$$\hat{V} = -\sum_a \int f_a(t, \mathbf{r})\, \hat{x}_a(t, \mathbf{r})\, d^3x, \tag{75,8}$$

e la relazione fra le medie $\bar{x}_a$ e le forze $f_a$ come segue:

$$\bar{x}_{a\omega}(\mathbf{r}) = \sum_b \int \alpha_{ab}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}')\, f_{b\omega}(\mathbf{r}')\, d^3x'. \tag{75,9}$$

Le suscettività generalizzate diventano ora funzioni delle coordinate di due punti nel corpo e la loro simmetria viene espressa dall'uguaglianza

$$\alpha_{ab}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \alpha_{ba}(\omega; \mathbf{r}', \mathbf{r}). \tag{75,10}$$

In accordo con la formula di Cubo (si veda V (126,9)), le suscettività si esprimono mediante le medie dei commutatori degli operatori di Heisenberg $\hat{x}_a(t, \mathbf{r})$:

$$\alpha_{ab}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') =$$

$$= \frac{i}{\hbar} \int_0^\infty e^{i\omega t} \langle \hat{x}_a(t, \mathbf{r})\, \hat{x}_b(0, \mathbf{r}') - \hat{x}_b(0, \mathbf{r}')\, \hat{x}_a(t, \mathbf{r}) \rangle\, dt. \tag{75,11}$$

Consideriamo ora in qualità di « forze» $f_a$ le componenti del vettore di corrente $\mathbf{j}$. Si vede allora dal confronto fra le espressioni (75,7) e (75,8) che le grandezze corrispondenti a $x_a$ saranno le componenti del potenziale vettoriale del campo $\mathbf{A}/c$. Dal confronto, invece, fra la

formula (75,11) e la definizione (75,3-4) si vede che le suscettività generalizzate $\alpha_{ab}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ coincidono con le componenti del tensore

$$-D^R_{ik}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}')/\hbar c^2.$$

In virtù della (75,10) di qui segue immediatamente (per mezzi magneticamente inattivi) che

$$D^R_{ik}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = D^R_{ki}(\omega; \mathbf{r}', \mathbf{r}). \tag{75,12}$$

Quanto alle relazioni (75,9), esse diventano

$$\bar{A}_{i\omega}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\hbar c}\int D^R_{ik}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}')\, j_{k\omega}(\mathbf{r}')\, d^3x'. \tag{75,13}$$

La media $\bar{\mathbf{A}}$ non rappresenta altro che il potenziale vettoriale del campo elettromagnetico macroscopico (la cui media è completamente calcolata; si veda l'inizio del paragrafo) del mezzo; più avanti ometteremo il trattino sopra $\mathbf{A}$ (così come sopra le altre grandezze macroscopiche). Ricordiamo ora che il campo macroscopico creato dalla corrente classica $\mathbf{j}$ verifica l'equazione di Maxwell

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_\omega = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_\omega - \frac{i\omega}{c}\mathbf{D}_\omega,$$

dove $\mathbf{D}$ indica l'induzione elettrica; nel caso generale di un mezzo anisotropo, $\mathbf{D}_\omega$ è legata all'intensità $\mathbf{E}_\omega$ dalla relazione $D_{i\omega} = \varepsilon_{ik}(\omega) E_{k\omega}$; se il mezzo non è omogeneo, il tensore della permeabilità dielettrica è anche funzione delle coordinate: $\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{r})$.

Nella trasformazione di gauge dei potenziali (75,1) abbiamo

$$\mathbf{B}_\omega = \operatorname{rot} \mathbf{A}_\omega, \quad \mathbf{E}_\omega = i\frac{\omega}{c}\mathbf{A}_\omega, \tag{75,14}$$

dove $\mathbf{B}$ è l'induzione magnetica legata all'intensità $\mathbf{H}$ dalle relazioni $B_{i\omega} = \mu_{ik}H_{k\omega}$ [1]). Pertanto otteniamo la seguente equazione esprimente il potenziale [2]):

$$\left[\operatorname{rot}_{im}(\mu^{-1}_{mn}\operatorname{rot}_{nk}) - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ik}\right]A_{k\omega} = \frac{4\pi}{c}j_{i\omega}.$$

Sostituendovi $\mathbf{A}_\omega$ nella forma (75,13) troviamo che la funzione $D^R_{ik}$ deve soddisfare l'equazione

$$\left[\operatorname{rot}_{im}(\mu^{-1}_{mn}\operatorname{rot}_{nl}) - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{il}\right]D^R_{lk}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \\ = -4\pi\hbar\delta_{ik}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{75,15}$$

---

[1]) Ricordiamo che in elettrodinamica macroscopica si suole indicare con $\mathbf{E}$ la media dell'intensità elettrica microscopica e con $\mathbf{B}$ la media dell'intensità magnetica, detta induzione magnetica.

[2]) Qui e più avanti usiamo la notazione $\operatorname{rot}_{il} = e_{ikl}\,\partial/\partial x_k$, dove $e_{ikl}$ è uno pseudotensore antisimmetrico unitario. Inoltre $(\operatorname{rot} \mathbf{A})_i = \operatorname{rot}_{il}A_l$.

Questa equazione si semplifica molto per mezzi isotropi (in ogni suo elemento di volume) quando i tensori $\varepsilon_{ik}$ e $\mu_{ik}$ si riducono a scalari. La permeabilità magnetica è di solito vicina a 1, e più avanti in questo paragrafo la supporremo uguale a 1. Ponendo $\varepsilon_{ik} = \varepsilon\delta_{ik}$ e $\mu_{ik} = \delta_{ik}$, otteniamo l'equazione

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_l} - \delta_{il}\Delta - \delta_{il}\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega;\,\mathbf{r})\right] D^R_{lk}(\omega;\,\mathbf{r},\,\mathbf{r}') = \\ = -4\pi\hbar\delta_{ik}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \qquad (75,16)$$

In tal modo, il calcolo della funzione ritardata di Green per un mezzo non omogeneo si riduce alla risoluzione di un'equazione differenziale (*I. E. Dzjaloši nskij*, *L. P. Pitaevskij*, 1959) [1].

Sulle frontiere fra mezzi diversi le componenti del tensore $D^R_{lk}$ devono soddisfare certe condizioni. Nell'equazione (75,16) la seconda variabile $\mathbf{r}'$ e il secondo indice $k$ non prendono parte alle operazioni differenziali o algebriche, alle quali va sottoposto il tensore $D^R_{lk}$, vale a dire che fungono unicamente da parametri. Pertanto le condizioni al contorno devono riguardare soltanto le coordinate $\mathbf{r}$ della funzione $D^R_{lk}(\omega;\,\mathbf{r},\,\mathbf{r}')$ considerata come vettore rispetto all'indice $l$. Queste condizioni corrispondono a quelle note dall'elettrodinamica macroscopica che richiedono la continuità delle componenti tangenziali di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ [2]. Poiché $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}/c$, in questo caso da vettore $\mathbf{E}$ funge la derivata

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}D^R_{lk}(t;\,\mathbf{r},\,\mathbf{r}')$$

o, in componenti di Fourier,

$$i\frac{\omega}{c}D^R_{lk}(\omega;\,\mathbf{r},\,\mathbf{r}'). \qquad (75,17)$$

Analogamente da vettore $\mathbf{H}$ (coincidente con $\mathbf{B}$ per $\mu = 1$) funge

$$\mathrm{rot}_{li}D_{ik}(\omega;\,\mathbf{r},\,\mathbf{r}'). \qquad (75,18)$$

Nel caso di un mezzo spaziale omogeneo illimitato la funzione $D^R_{ik}$ dipende dalla sola differenza $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$. Per le componenti dello

---

[1]) Notiamo che $D^R_{ik}$ risulta funzione di Green delle equazioni di Maxwell nel senso noto dalla fisica matematica, ossia soluzione delle equazioni del campo con sorgente puntuale, soddisfacente la condizione di ritardo (la funzione di anticipo $D^A_{ik}$ verificherebbe la stessa equazione con $\varepsilon^*$ in luogo di $\varepsilon$).

[2]) Le condizioni al contorno per le componenti normali di $\mathbf{B}$ e $\mathbf{D}$ nel dato caso non forniscono niente di nuovo, poiché nel campo variabile con il tempo come $e^{-i\omega t}$, le equazioni div $\mathbf{D} = 0$, div $\mathbf{B} = 0$ sono conseguenza delle equazioni rot $\mathbf{E} = i\omega\mathbf{B}/c$, rot $\mathbf{H} = -i\omega\mathbf{D}/c$.

sviluppo di Fourier in questa differenza l'equazione differenziale (75,16) si riduce a un sistema di equazioni algebriche

$$\frac{1}{4\pi\hbar}\left[k_i k_l - \delta_{il} k^2 + \delta_{il}\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\right] D^R_{lk}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ik}. \qquad (75,19)$$

La soluzione di queste equazioni è

$$D^R_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi\hbar}{\omega^2\varepsilon(\omega)/c^2 - k^2}\left[\delta_{ik} - \frac{c^2 k_i k_k}{\omega^2\varepsilon(\omega)}\right]. \qquad (75,20)$$

In accordo con la formula (36,21), la funzione di Green $D_{ik}$ per un mezzo omogeneo si esprime mediante la funzione ritardata di Green con la formula

$$D_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = \operatorname{Re} D^R_{ik}(\omega, \mathbf{k}) + i \operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}\cdot \operatorname{Im} D^R_{ik}(\omega, \mathbf{k}). \qquad (75,21)$$

Per $T \to 0$ questa formula dà

$$D_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = \operatorname{Re} D^R_{ik}(\omega, \mathbf{k}) + i \operatorname{sign}\omega \cdot \operatorname{Im} D^R_{ik}(\omega, \mathbf{k}). \qquad (75,22)$$

La funzione $D^R_{ik}$ è data dall'espressione (75,20); tenendo conto che $\operatorname{Re}\varepsilon(\omega)$ è funzione pari di $\omega$ ed $\operatorname{Im}\varepsilon(\omega)$ funzione dispari, troviamo che per $T = 0$

$$D_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = D^R_{ik}(|\omega|, \mathbf{k}). \qquad (75,23)$$

Nel vuoto $\varepsilon(\omega) = 1$. Ma siccome in ogni mezzo materiale $\operatorname{Im}\varepsilon(\omega) > 0$ per $\omega > 0$, allora al vuoto corrisponde il passaggio al limite $\varepsilon \to 1 + i0$. In questo caso si ottiene l'espressione

$$D^{(0)}_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi\hbar}{\omega^2/c^2 - k^2 + i0}\left(\delta_{ik} - \frac{c^2 k_i k_k}{\omega^2}\right)$$

coincidente con un noto risultato dell'elettrodinamica quantistica (si veda IV, § 77).

## § 76. *Fluttuazioni del campo elettromagnetico*

Come è stato sottolineato all'inizio del paragrafo precedente, nell'esaminare le fluttuazioni del campo elettromagnetico si parla delle oscillazioni nel tempo di grandezze, le cui medie sono calcolate soltanto secondo elementi di volume fisicamente infinitesimali (e non secondo il moto delle particelle in esso). Nello stesso senso vanno intesi anche gli operatori quantomeccanici di queste grandezze.

Le formule fondamentali della teoria delle fluttuazioni elettromagnetiche si possono scrivere immediatamente partendo dalle formule generali del teorema della fluttuazione dissipativa (V, § 125). Ricordiamo che per un insieme discreto di grandezze fluttuanti $x_\alpha$

la distribuzione spettrale delle fluttuazioni si esprime in funzione delle suscettività generalizzate $\alpha_{ab}(\omega)$ con la formula

$$(x_a x_b)_\omega = \frac{i\hbar}{2}(\alpha^*_{ba} - \alpha_{ab}) \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T},$$

dove la grandezza stessa $(x_a x_b)_\omega$ rappresenta la componente di Fourier rispetto al tempo della funzione di correlazione

$$\varphi_{ab}(t) = \frac{1}{2}\langle \hat{x}_a(t)\hat{x}_b(0) + \hat{x}_b(0)\hat{x}_a(t)\rangle,$$

e $\hat{x}_a(t)$ sono gli operatori di Heisenberg delle grandezze $x_a$. Nel caso di grandezze $x_a(\mathbf{r})$ distribuite (funzione delle coordinate di punto nel corpo) questa formula si scrive come segue:

$$(x_a^{(1)} x_b^{(2)})_\omega = \frac{i\hbar}{2} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T} [\alpha^*_{ba}(\omega;\ \mathbf{r}_2,\ \mathbf{r}_1) - \alpha_{ab}(\omega;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)], \qquad (76,1)$$

dove gli indici (1) o (2) significano che il valore della grandezza è calcolato nel punto $\mathbf{r}_1$ o $\mathbf{r}_2$.

Abbiamo mostrato al paragrafo precedente che, se come grandezze $x_a$ fungono le componenti del potenziale vettoriale $\mathbf{A}(\mathbf{r})/c$, le suscettività generalizzate corrispondenti saranno rappresentate dalle componenti tensoriali $-D^R_{ik}(\omega;\ \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)/\hbar c^2$. Perciò otteniamo immediatamente

$$(A_i^{(1)} A_k^{(2)})_\omega = \frac{i}{2} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T} \{D^R_{ik}(\omega;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2) - [D^R_{ki}(\omega;\ \mathbf{r}_2,\ \mathbf{r}_1)]^*\}. \qquad (76,2)$$

Le funzioni spettrali esprimenti le fluttuazioni delle intensità del campo si ricavano dalla (76,2) con un semplice metodo. Supponiamo che $\varphi^A_{ik}(t_1,\ \mathbf{r}_1;\ t_2,\ \mathbf{r}_2)$ sia la funzione di correlazione che esprime le fluttuazioni del potenziale vettoriale; l'espressione (76,2) è la componente dello sviluppo di Fourier di questa funzione nella differenza $t = t_1 - t_2$. Poiché l'intensità elettrica è

$$\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}/c,$$

la stessa funzione per le componenti di $\mathbf{E}$ è

$$\varphi^E_{ik} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t_1\, \partial t_2}\varphi^A_{ik} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi^A_{ik}$$

o nelle componenti di Fourier,

$$(E_i^{(1)} E_k^{(2)})_\omega = \frac{\omega^2}{c^2}(A_i^{(1)} A_k^{(2)})_\omega. \qquad (76,3)$$

Analogamente, tenendo conto del legame $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, otteniamo

$$(B_i^{(1)} B_k^{(2)})_\omega = \operatorname{rot}_{il}^{(1)} \operatorname{rot}_{km}^{(2)} (A_l^{(1)} A_m^{(2)})_\omega, \tag{76,4}$$

$$(E_i^{(1)} B_k^{(2)})_\omega = \frac{i\omega}{c} \operatorname{rot}_{km}^{(2)} (A_i^{(1)} A_m^{(2)})_\omega. \tag{76,5}$$

Esprimendo le funzioni di correlazione delle fluttuazioni elettromagnetiche mediante, la funzione ritardata di Green, le formule (76,2-5) riducono il problema del loro calcolo alla risoluzione dell'equazione differenziale (75,15) o (75,16) con condizioni al contorno appropriate sulle frontiere date dei corpi [1]).

Supporremo più avanti che il mezzo sia magneticamente inattivo. Allora la funzione $D_{ik}^R$ gode della proprietà di simmetria (75,12) e l'espressione (76,2) diventa

$$(A_i^{(1)} A_k^{(2)})_\omega = -\operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T} \operatorname{Im} D_{ik}^R (\omega;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2). \tag{76,6}$$

Sottolineiamo che l'espressione (76,6) è reale, e con essa sono reali anche le (76,3-4), mentre la (76,5) è immaginaria. Ciò vuol dire che le funzioni di correlazione temporale delle componenti di **E** e di quelle di **B** sono mutuamente pari rispetto al tempo $t = t_1 - t_2$ (come deve essere per la correlazione fra grandezze che sono tutte e due pari o dispari rispetto all'inversione del tempo). Quanto alla funzione di correlazione temporale delle componenti di **E** con quelle di **B**, essa è dispari (come deve essere per due grandezze di cui una è pari e l'altra dispari rispetto all'inversione del tempo). Ne consegue che i valori di **E** e **B** allo stesso istante non sono in correlazione tra loro (la funzione dispari di $t$ si annulla per $t = 0$). Assieme alla funzione di correlazione si annullano anche i valori medi di qualsiasi espressione bilineare in **E** e **B** (calcolata allo stesso istante), ad esempio, del vettore di Poynting. Quest'ultima circostanza è evidente a priori: in un corpo in equilibrio termico ed invariante rispetto all'inversione del tempo non possono esistere flussi macroscopici interni di energia.

## § 77. *Fluttuazioni elettromagnetiche in un mezzo illimitato*

In un mezzo omogeneo illimitato le funzioni $D_{ik}$ $(\omega;\ \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ dipendono unicamente dalla differenza $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ e sono, fra l'altro, pari in questa variabile (l'equazione (75,15) contiene soltanto le derivate seconde rispetto alle coordinate per cui $D_{ik}$ $(\omega;\ \mathbf{r})$ e $D_{ik}$ $(\omega;\ -\mathbf{r})$

[1]) La teoria delle fluttuazioni elettromagnetiche è stata sviluppata in un'altra forma da *S. M. Rytov* (1953), e nella forma equivalente alle (76,2-5) da *M. L. Levin* e *S. M. Rytov* (1967).

verificano la medesima equazione). Considerando le componenti di Fourier in **r** in ambedue i membri dell'uguaglianza (76,2) otteniamo

$$(A_i^{(1)} A_k^{(2)})_{\omega \mathbf{k}} = \frac{i}{2} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T} \{D_{ik}^R(\omega, \mathbf{k}) - [D_{ki}^R(\omega, \mathbf{k})]^*\}. \qquad (77,1)$$

Per mezzi magneticamente inattivi questa formula, tenendo conto della (75,12), si scrive come segue:

$$(A_i^{(1)} A_k^{(2)})_{\omega \mathbf{k}} = -\operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T} \operatorname{Im} D_{ik}^R(\omega, \mathbf{k}). \qquad (77,2)$$

In un mezzo isotropo non magnetico ($\mu = 1$) la funzione $D_{ik}^R(\omega, \mathbf{k})$ è data dalla formula (75,20). Quanto al problema della definizione della funzione di correlazione spaziale delle fluttuazioni, esso si riduce al calcolo dell'integrale

$$D_{ik}^R(\omega; \mathbf{r}) = \int D_{ik}^R(\omega, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \qquad (77,3)$$

L'integrazione si realizza in base alle formule

$$\begin{aligned} &\int \frac{e^{i\mathbf{kr}}}{k^2+\varkappa^2} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \frac{e^{-\varkappa r}}{4\pi r}, \\ &\int \frac{k_l k_k e^{i\mathbf{kr}}}{k^2+\varkappa^2} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = -\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} \frac{e^{-\varkappa r}}{4\pi r}, \end{aligned} \qquad (77,4)$$

bj cui la prima si ottiene ricavando le componenti di Fourier dalla nota uguaglianza

$$(\Delta - \varkappa^2) \frac{e^{-\varkappa r}}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}) \qquad (77,5)$$

e l'altra derivando la prima. In seguito troviamo

$$D_{ik}^R(\omega; \mathbf{r}) = -\hbar \left[\delta_{ik} + \frac{c^2}{\omega^2\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k}\right] \frac{1}{r} \exp\left(-\frac{\omega}{c}\sqrt{-\varepsilon}\, r\right), \qquad (77,6)$$

dove $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ e la radice $\sqrt{-\varepsilon}$ deve avere un segno tale che si abbia $\operatorname{Re}\sqrt{-\varepsilon} > 0$; per il caso del vuoto bisogna porre $\varepsilon = 1$, $\sqrt{-\varepsilon} = -i$ (si veda più avanti).

Di qui, in accordo con le formule (76,6) e (76,3) ricaviamo immediatamente

$$\begin{aligned} (E_i^{(1)} E_k^{(2)})_\omega = \hbar \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T} \operatorname{Im} \Big\{ &\frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} \delta_{ik} + \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k}\right] \times \\ &\times \frac{1}{r} \exp\left(-\frac{\omega}{c}\sqrt{-\varepsilon}\, r\right)\Big\} \end{aligned} \qquad (77,7)$$

(*S. M. Rytov*, 1953). Applicando a questa espressione l'operazione di contrazione rispetto agli indici $i$, $k$ (e ricorrendo alla formula (77,5)), otteniamo

$$(\mathbf{E}^{(1)}\mathbf{E}^{(2)})_\omega = 2\hbar \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T} \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2 r} \exp \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \left( -\frac{\omega}{c} \sqrt{-\varepsilon} r \right) + 2\pi\delta(\mathbf{r}) \right] \right\}. \qquad (77,8)$$

Analogamente, il calcolo mediante la formula (76,4) conduce ad espressioni delle funzioni di correlazione del campo magnetico che differiscono da quelle (77,7-8) per la mancanza del fattore $1/\varepsilon$ davanti alla parentesi quadra; in questo caso, il termine contenente la funzione $\delta$ sotto il segno Im nella (77,8) diventa reale e scompare dalla risposta. Il legame delle espressioni (77,7-8) con la parte immaginaria di $\varepsilon$ sottolinea esplicitamente una relazione esistente fra le fluttuazioni elettromagnetiche e l'assorbimento del mezzo. Ma se nelle formule (77,7-8) si effettua il passaggio al limite $\operatorname{Im} \varepsilon \to 0$, si ottengono delle espressioni finite non nulle. Questa circostanza è legata all'ordine del passaggio ai due limiti, ossia alle dimensioni infinite del mezzo e ad $\operatorname{Im} \varepsilon$ nulla. Poiché in un mezzo illimitato $\operatorname{Im} \varepsilon$, piccolo a piacere, conduce in fin dei conti all'assorbimento, il risultato ottenuto con l'ordine di passaggio ai limiti da noi usato si riferisce a un mezzo fisicamente trasparente nel quale, tuttavia, come in ogni mezzo reale, un assorbimento un po' diverso da zero esiste sempre.

Effettuiamo, ad esempio, il passaggio suindicato nella formula (77,8). A tale scopo osserviamo che per $\operatorname{Im} \varepsilon$ piccolo positivo (per $\omega > 0$) si ha

$$\sqrt{-\varepsilon} \approx -i \sqrt{\operatorname{Re} \varepsilon} \left( 1 + i \frac{\operatorname{Im} \varepsilon}{2 \operatorname{Re} \varepsilon} \right)$$

(tenendo conto della condizione che $\operatorname{Re} \sqrt{-\varepsilon} > 0$). Perciò nel limite $\operatorname{Im} \varepsilon \to 0$ otteniamo

$$(\mathbf{E}^{(1)}\mathbf{E}^{(2)})_\omega = \frac{1}{n^2} (\mathbf{H}^{(1)}\mathbf{H}^{(2)})_\omega = \frac{2\omega^2\hbar}{c^2 r} \operatorname{sen} \frac{\omega n r}{c} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T}, \qquad (77,9)$$

dove $n = \sqrt{\varepsilon}$ è l'indice reale di rifrazione. Per la mancanza del termine contenente la funzione $\delta$ questa espressione resta finita anche per due punti $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ coincidenti:

$$(\mathbf{E}^2)_\omega = \frac{1}{n^2} (\mathbf{H}^2)_\omega = \frac{2\omega^3\hbar n}{c^3} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T}. \qquad (77,10)$$

Il passaggio limite al caso di un mezzo trasparente si potrebbe effettuare anche allo stadio iniziale dei calcoli, cioè nella funzione di Green. Tenendo conto che il segno di $\operatorname{Im} \varepsilon(\omega)$ coincide con il

segno di $\omega$, troviamo che in questo limite la funzione (75,20) assume la forma

$$D^{R}_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi\hbar}{\omega^2 n^2/c^2 - k^2 + i0\cdot\operatorname{sign}\omega}\left[\delta_{ik} - \frac{c^2 k_i k_k}{\omega^2 n^2}\right]. \qquad (77,11)$$

La parte immaginaria di questa funzione è legata unicamente alla regola di aggiramento dei poli $\omega = \pm ck/n$; separandola mediante la formula (8,11) e sostituendo nell'espressione (77,2), otteniamo

$$(E_i^{(1)} E_k^{(2)})_{\omega\mathbf{k}} = \frac{2\pi^2\hbar}{k}\left(\frac{\omega^2}{c^2}\delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{n^2}\right) \times$$
$$\times \left\{\delta\left(\frac{n\omega}{c} - k\right) - \delta\left(\frac{n\omega}{c} + k\right)\right\} \operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}. \qquad (77,12)$$

Gli argomenti delle funzioni $\delta$ in questa espressione hanno un significato fisico semplice: mostrano che le fluttuazioni del campo con $\mathbf{k}$ dato si propagano nello spazio alla velocità $c/n$ coincidente con la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche nel mezzo considerato. È ovvio che applicando la trasformata di Fourier all'espressione (77,12) si può ottenere nuovamente la formula (77,7).

L'energia del campo elettromagnetico fluttuante in un mezzo trasparente (con $\mu = 1$) è data (in unità di volume spaziale), nell'intervallo spettrale $d\omega$, dall'espressione

$$\frac{1}{8\pi}\left[2(\mathbf{E}^2)_\omega \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} + 2(\mathbf{H}^2)_\omega\right]\frac{d\omega}{2\pi}$$

(si veda VIII, § 61)[1]. Sostituendovi l'espressione (77, 10), otteniamo dopo una semplice trasformazione

$$\left[\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/T} - 1}\right]\frac{\omega^2 n^2}{\pi^2 c^3}\frac{d(n\omega)}{d\omega}\, d\omega. \qquad (77,13)$$

Il primo termine fra parentesi è legato alle oscillazioni nulle del campo, mentre il secondo esprime l'energia della radiazione elettromagnetica di equilibrio termodinamico in un mezzo trasparente, cioè l'energia della *radiazione del corpo nero*. Questa parte della formula si potrebbe ottenere anche senza esaminare le fluttuazioni, ma mediante una generalizzazione appropriata della formula di Planck esprimente la radiazione del corpo nero nel vuoto. In accordo con quest'ultima, l'energia della radiazione del corpo nero (per unità

[1]) L'energia totale si ottiene integrando su $d\omega$ da 0 a $\infty$; i fattori 2 fra parentesi quadre sono legati al fatto che, in accordo con la definizione di funzioni spettrali delle fluttuazioni, la media $\langle x^2\rangle$ si ottiene integrando $(x^2)_\omega$ su $d\omega/2\pi$ da $-\infty$ a $+\infty$ (si veda V (122,6)).

di volume) nell'intervallo dei vettori d'onda $d^3k$ è data dall'espressione

$$\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/T}-1}\frac{2d^3k}{(2\pi)^3}$$

(il fattore 2 corrisponde a due direzioni di polarizzazione). Corrispondentemente per ottenere la densità spettrale dell'energia occorre sostituire $d^3k$ con $4\pi k^2\,dk$ e porre $k=\omega/c$. Per quanto riguarda il passaggio dal vuoto a un mezzo trasparente, è sufficiente porre $k=n\omega/c$, cioè scrivere

$$k^2\,dk=k^2\frac{dk}{d\omega}d\omega=\frac{\omega^2n^2}{c^3}\frac{d(n\omega)}{d\omega}d\omega,$$

il che fornisce il risultato richiesto.

## PROBLEMI

1. Determinare le fluttuazioni del campo magnetico lontano da un corpo immerso in un mezzo trasparente rarefatto, in cui esso si trova in equilibrio termico; la lunghezza d'onda della radiazione e la distanza fra il corpo e il punto di osservazione sono grandi rispetto alle dimensioni del corpo, che gode di polarizzabilità elettrica anisotropa $\alpha_{ik}(\omega)$.

*Soluzione.* Consideriamo come vuoto il mezzo trasparente rarefatto. Le fluttuazioni cercate sono determinate da una variazione piccola (a grandi distanze) della funzione di Green del vuoto, causata dalla presenza del corpo. Per calcolare questa variazione partiamo dall'analogia, secondo la quale la funzione del vuoto di Green $D^R_{ik}(\omega;\,\mathbf{r},\,\mathbf{r}')$ (per un dato indice $k$) si può considerare formalmente come il campo elettrico $E_i(\mathbf{r},\,\mathbf{r}')$ creato nel punto $\mathbf{r}$ da una sorgente nel punto $\mathbf{r}'$. Questa analogia è basata sul fatto che il campo $E_i(\mathbf{r},\,\mathbf{r}')$ (così come il suo potenziale $A_i(\mathbf{r},\,\mathbf{r}')$) verifica, per $\mathbf{r}\neq\mathbf{r}'$, la medesima equazione della funzione $D^R_{ik}(\omega;\,\mathbf{r},\,\mathbf{r}')$, ossia l'equazione (75,16) con $\varepsilon=1$. Supponiamo che il corpo si trovi nel punto $\mathbf{r}=0$. Allora il campo

$$E_l(0,\,\mathbf{r}')=D^R_{lk}(\omega;\,0,\,\mathbf{r}')\equiv D^R_{lk}(\omega;\,\mathbf{r}')$$

(dove $D^R_{lk}(\omega;\,\mathbf{r})$ è la funzione di Green nel vuoto in assenza del corpo, data dall'espressione (77,6) con $\varepsilon=1$) polarizza il corpo creando quindi nel punto $\mathbf{r}=0$ il momento di dipolo $d_i=\alpha_{il}D^R_{lk}(\omega;\,0,\,\mathbf{r}')$. È il campo creato, a sua volta, da questo momento di dipolo nel punto $\mathbf{r}$ a fornire la variazione cercata $\delta D^R_{ik}(\omega;\,\mathbf{r},\,\mathbf{r}')$. Secondo una formula nota dall'elettrodinamica (si veda II, § 72), il campo creato nel punto $\mathbf{r}$ dal momento di dipolo $\mathbf{d}$ (dipendente dal tempo come $e^{-i\omega t}$), che si trova nel punto $\mathbf{r}=0$, è

$$E_i=d_l\left[\frac{\omega^2}{c^2}\delta_{il}+\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_l}\right]\frac{e^{i\omega r/c}}{r},$$

dove la distanza $r$ deve essere grande unicamente rispetto alla dimensione del corpo, ma non rispetto alla lunghezza d'onda; questa espressione può essere rappresentata nella forma

$$E_i=-\frac{\omega^2}{\hbar c^2}D^R_{il}(\omega;\,\mathbf{r})\,d_l$$

(ricordiamo che la funzione $D^R_{il}(\omega;\ \mathbf{r})$ è pari rispetto alla variabile $\mathbf{r}$). Tenendo conto del momento di dipolo suindicato, troviamo

$$\delta D^R_{ik}(\omega;\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}') = -\frac{\omega^2}{\hbar c^2} D^R_{il}(\omega;\ \mathbf{r})\, \alpha_{lm} D^R_{mk}(\omega;\ \mathbf{r}').$$

Ora, le funzioni di correlazione delle fluttuazioni sono date dalle formule (76,3-6) con $\delta D^R_{ik}$ in luogo di $D^R_{ik}$. Infine otteniamo

$$\delta\,(A_i^{(1)} A_k^{(2)})_\omega = \frac{2\omega^2}{\hbar c^2}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\hbar\omega/T} - 1}\right\} \operatorname{Im}\,[D^R_{il}(\omega;\ \mathbf{r}_1)\, \alpha_{lm} D^R_{mk}(\omega;\ \mathbf{r}_2)]. \qquad (1)$$

Ricordiamo che il corpo si trova nel punto $\mathbf{r} = 0$ e che $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ sono due punti lontani dal corpo. È da notare che il contributo alle fluttuazioni proviene sia dalla parte immaginaria sia da quella reale della polarizzabilità e può essere considerato come il risultato della diffusione sul corpo della radiazione del corpo nero che riempie il mezzo trasparente.

2. Le stesse ipotesi del problema 1 per la polarizzabilità magnetica $\alpha_{ik}(\omega)$ [1].

*Soluzione.* In questo caso consideriamo $\operatorname{rot}_{il} D^R_{lk}(\omega;\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}')$ come il campo magnetico $H_i(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')$ creato nel punto $\mathbf{r}$ da una sorgente nel punto $\mathbf{r}'$ (un'equazione della stessa forma di quella per la funzione $D^R_{ik}$, la verifica non il campo stesso $H_i$, bensì il suo potenziale $A_i$). Questo campo magnetizza il corpo creando nel punto $\mathbf{r} = 0$ il momento magnetico

$$m_i = -\alpha_{il} \operatorname{rot}'_{lm} D^R_{mk}(\omega;\ 0,\ \mathbf{r}')$$

(qui la derivazione rispetto a $\mathbf{r}$ è sostituita con quella rispetto a $\mathbf{r}'$ per il fatto che $D^R_{mk}$ dipende unicamente dalla differenza $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$). La variazione cercata della funzione di Green coincide con il potenziale vettoriale del campo magnetico creato da questo momento magnetico nel punto $\mathbf{r}$:

$$A_i = \operatorname{rot}_{il}\left[\frac{1}{r}\, m_l e^{i\omega r/c}\right]$$

(si veda II, il problema 1 al § 72). In tal modo,

$$\delta D^R_{ik}(\omega;\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}') = -\left(\operatorname{rot}_{il} \frac{e^{i\omega r/c}}{r}\right) \alpha_{lm} \operatorname{rot}'_{mn} D^R_{nk}(\omega;\ 0,\ \mathbf{r}').$$

Infine, sostituendovi $D^R_{nk}$ dalla (77,6), troviamo

$$\delta D^R_{ik}(\omega;\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}') = \hbar\left(\operatorname{rot}_{il} \frac{e^{i\omega r/c}}{r}\right) \alpha_{lm} \operatorname{rot}'_{mk} \frac{e^{i\omega r'/c}}{r'} \qquad (2)$$

(è stato utilizzato qui che $\operatorname{rot}_{mn}\nabla_n = e_{m\,kn}\nabla_k \nabla_n \equiv 0$).

3. Determinare le fluttuazioni del campo magnetico nelle ipotesi del problema 1 supponendo, però, che la temperatura del mezzo sia di gran lunga inferiore a quella del corpo.

*Soluzione.* Il campo calcolato nel problema 1 si divide naturalmente, in accordo con l'esistenza di due termini nella parentesi graffa dell'espressione (1), in fluttuazioni nulle e radiazione del corpo nero. Quest'ultima, a sua volta, è composta di due parti: radiazione del corpo stesso e campo creato per la dif-

[1]) L'esistenza della polarizzabilità magnetica non significa necessariamente che il corpo sia composto da una sostanza magnetica. Così, si può trattare dell'esclusione del campo magnetico dal corpo grazie all'effetto skin.

fusione della radiazione del corpo nero del mezzo sul corpo. Se la temperatura del mezzo è bassa, la seconda parte non esiste. Per risolvere il problema, lo calcoliamo separatamente e in seguito sottraiamo dall'espressione (2). Poniamo $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}^{(0)} + \mathbf{A}^{(s)}$, dove $\mathbf{A}^{(0)}$ è il campo fluttuante in assenza di corpo, $\mathbf{A}^{(s)}$ il campo diffuso dal corpo. A grandi distanze a cui $\mathbf{A}^{(s)}$ è piccolo, si possono, calcolando $\delta(A_{i1}A_{k2})_\omega$, trascurare i termini quadratici in $\mathbf{A}^{(s)}$. Pertanto il contributo della diffusione è

$$\delta^{(s)}(A_{i1}A_{k2})_\omega \approx (A_{i1}^{(s)}A_{k2}^{(0)})_\omega + (A_{i1}^{(0)}A_{k2}^{(s)})_\omega = (A_{i1}^{(s)}A_{k2}^{(0)})_\omega + (A_{k2}^{(s)}A_{i1}^{(0)})_{\omega^*}.$$

Il campo diffuso è dato nuovamente dalla suddetta formula del volume II, § 72, ma ora come momento di dipolo va inteso semplicemente il momento creato dalla radiazione del corpo nero: $d_i = \alpha_{ik}A_k^{(0)}(0)$. Introducendo nuovamente la funzione di Green per il vuoto in assenza di corpo, abbiamo

$$A_i^{(s)}(\mathbf{r}_1) = -\frac{\omega^2}{\hbar c^2} D_{il}^R(\omega;\ \mathbf{r}_1)\,\alpha_{lm}(\omega)\,A_m^{(0)}(0),$$

cosicché

$$(A_{i1}^{(s)}A_{k2}^{(0)})_\omega = -\frac{\omega^2}{\hbar c^2} D_{il}^R(\omega;\ \mathbf{r}_1)\,\alpha_{lm}\,(A_m^{(0)}(0)\,A_k^{(0)}(\mathbf{r}_2))_\omega.$$

Prendiamo di nuovo la funzione di correlazione $(A_{m1}^{(0)}A_{k2}^{(0)})_\omega$ dalla formula (76,2). Ma poiché ci interessa il solo irraggiamento, dobbiamo omettere in questa formula le oscillazioni nulle, cioè sostituirvi

$$\frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/T}-1} + \frac{1}{2} \to \frac{1}{e^{\hbar\omega/T}-1}.$$

Come risultato troviamo il contributo della radiazione di corpo nero diffusa alla funzione di correlazione

$$\delta^{(s)}(A_{i1}A_{k2})_\omega = \frac{2\omega^2}{\hbar c^2\,(e^{\hbar\omega/T}-1)}\,[D_{il}^R(\omega;\ \mathbf{r}_1)\,\alpha_{lm}\operatorname{Im} D_{mk}^R(\omega;\ \mathbf{r}_2) + \\ + D_{kl}^{R*}(\omega;\ \mathbf{r}_2)\,\alpha_{lm}^*\operatorname{Im} D_{mi}^R(\omega;\ \mathbf{r}_1)]. \tag{3}$$

Infine, per trovare il campo fluttuante nel mezzo freddo, occorre sottrarre l'espressione (3) dalla (1). Dopo semplici trasformazioni in base alla simmetria dei tensori $D_{ik}$ ed $\alpha_{ik}$ otteniamo

$$\delta^{(T)}(A_{i1}A_{k2})_\omega = \frac{2\omega^2}{\hbar c^2\,(e^{\hbar\omega/T}-1)}\,D_{il}^R(\omega;\ \mathbf{r}_1)\,[\operatorname{Im}\alpha_{lm}(\omega)]\,D_{mk}^{R*}(\omega;\ \mathbf{r}_2) \tag{4}$$

($T$ è la temperatura del corpo). Qui è scritto il solo termine termico; il termine nelle oscillazioni nulle resta immutato nella (1). Sottolineiamo che l'espressione (4), che definisce l'irraggiamento di calore del corpo, dipende unicamente dalla parte immaginaria della polarizzabilità. Il flusso di energia calcolato mediante l'espressione (4) non è più nullo e dà l'intensità dell'irraggiamento del corpo riscaldato nel mezzo freddo circostante.

## § 78 *Fluttuazioni di corrente nei circuiti lineari*

Un'altra applicazione interessante del teorema della fluttuazione dissipativa è rappresentata dal problema delle fluttuazioni di corrente nei circuiti lineari, studiata originariamente da *H. Nyquist* (1928).

Le fluttuazioni di corrente sono delle oscillazioni elettriche libere (cioè compiute in assenza di una forza elettromotrice applicata dall'esterno) nel conduttore. In un circuito lineare chiuso maggiore interesse presentano, naturalmente, le oscillazioni per le quali compare la corrente totale $J$ lungo il filo conduttore. Più avanti noi supponiamo soddisfatte le condizioni di stazionarietà, cioè che le dimensioni del circuito siano piccole rispetto alla lunghezza d'onda $\lambda \sim c/\omega$. Allora la corrente totale $J$ è la stessa su tutti i tratti del circuito ed è funzione del solo tempo.

Consideriamo questa corrente $J$ come la grandezza $x(t)$ che figura nella formulazione generale del teorema della fluttuazione dissipativa al § 124 del volume V. Per precisare il significato della suscettività generalizzata corrispondente $\alpha$ supponiamo che sul circuito agisca una forza elettromotrice esterna $\mathscr{E}$. Allora la dissipazione di energia nel circuito è $Q = J\mathscr{E}$. Confrontandola con l'espressione $Q = -\bar{x}\dot{f}$ quale definizione della « forza » $f$ (si veda V (123,10)), vediamo che $\dot{f} = -\mathscr{E}$ o, per le componenti di Fourier, $\mathscr{E}_\omega = i\omega f_\omega$. D'altra parte, la corrente e la forza elettromotrice nel circuito lineare sono legate dalla relazione $\mathscr{E}_\omega = Z(\omega) J_\omega$, dove $Z(\omega)$ è la resistenza complessa (impedenza) del circuito. Pertanto abbiamo

$$J_\omega = \mathscr{E}_\omega / Z = i\omega f_\omega / Z$$

e, confrontando con la definizione di suscettività generalizzata nella relazione $(\bar{x})_\omega = \alpha(\omega) f$, troviamo $\alpha(\omega) = i\omega/Z(\omega)$. La sua parte immaginaria è

$$\operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Im} \frac{i\omega}{Z} = \frac{\omega}{|Z|^2} R(\omega)$$

dove $R = \operatorname{Re} Z$.

Secondo il teorema della fluttuazione dissipativa,

$$(x^2)_\omega = \hbar \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T} \cdot \operatorname{Im} \alpha(\omega),$$

troviamo ora la funzione spettrale esprimente le fluttuazioni della corrente

$$(J^2)_\omega = \frac{\hbar\omega}{|Z(\omega)|^2} R(\omega) \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T}. \tag{78,1}$$

Si può rappresentare questa funzione in un'altra forma, descrivendo le fluttuazioni della corrente come risultato dell'azione di una forza elettromotrice « casuale » $\mathscr{E}_\omega = ZJ_\omega$. Allora abbiamo

$$(\mathscr{E}^2)_\omega = \hbar\omega R(\omega) \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T} \tag{78,2}$$

Nel caso classico ($\hbar\omega \ll T$)

$$(\mathscr{E}^2)_\omega = 2TR(\omega). \tag{78,3}$$

Sottolineiamo ancora una volta che queste formule sono assolutamente indipendenti dalla natura dei fenomeni responsabili della dissipazione della resistenza del circuito.

## § 79. *Funzione termica di Green per il fotone in un mezzo*

La funzione termica di Green per il fotone in un mezzo viene costruita mediante gli operatori di Matsubara dei potenziali del campo elettromagnetico, così come la funzione temporale di Green (75,2) si costruisce a partire dagli operatori di Heisenberg:

$$\mathscr{D}_{ik} = -\langle \mathrm{T}_\tau \hat{A}_i^M(\tau_1, \mathbf{r}_1)\, \hat{A}_k^M(\tau_2, \mathbf{r}_2)\rangle. \tag{79,1}$$

Qui si è tenuto conto che, in virtù del carattere hermitiano degli operatori di Schrödinger del campo, gli operatori di Matsubara $\hat{\mathbf{A}}^M$ e $\hat{\hat{\mathbf{A}}}^M$ (definiti secondo la (37,1)) coincidono l'uno con l'altro. Tuttavia, questi operatori, a differenza di quelli di Heisenberg, non sono più hermitiani; essendo reale il parametro $\tau$, abbiamo

$$[\hat{\hat{\mathbf{A}}}^M(\tau, \mathbf{r})]^+ = [e^{\tau\hat{H}'/\hbar}\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})\, e^{-\tau\hat{H}'/\hbar}]^+ = e^{-\tau\hat{H}'/\hbar}\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})\, e^{\tau\hat{H}'/\hbar}$$

ossia

$$[\hat{\mathbf{A}}^M(\tau, \mathbf{r})]^+ = \hat{\mathbf{A}}^M(-\tau, \mathbf{r}).$$

Poiché la funzione (79,1) dipende unicamente dalla differenza $\tau = \tau_1 - \tau_2$ (cfr. § 37), si può scrivere (ponendo $\tau > 0$, ad esempio)

$$\mathscr{D}_{ik}(\tau;\, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\langle \hat{A}_i^M(\tau, \mathbf{r}_1)\, \hat{A}_k^M(0, \mathbf{r}_2)\rangle,$$

$$\mathscr{D}_{ik}(-\tau;\, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\langle \hat{A}_k^M(\tau, \mathbf{r}_2)\, \hat{A}_i^M(0, \mathbf{r}_1)\rangle.$$

Dal confronto di queste due espressioni si vede che

$$\mathscr{D}_{ik}(-\tau;\, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathscr{D}_{ki}(\tau;\, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \tag{79,2}$$

La funzione $\mathscr{D}_{ik}$ può essere sviluppata in serie di Fourier nella variabile $\tau$,

$$\mathscr{D}_{ik}(\tau;\, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = T \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathscr{D}_{ik}(\zeta_s;\, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\, e^{-i\zeta_s\tau}, \tag{79,3}$$

dove le « frequenze » $\zeta_s$ assumono (in accordo con la statistica di Bose cui ubbidiscono i fotoni) i valori $\hbar\zeta_s = 2\pi sT$ (si veda la (37,8)).

Dalla formula (79,2) deriva una relazione analoga per le componenti di questo sviluppo:

$$\mathscr{D}_{ik}(\zeta_s;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2) = \mathscr{D}_{ki}(-\zeta_s;\ \mathbf{r}_2,\ \mathbf{r}_1). \tag{79,4}$$

Secondo la relazione generale (37,12), queste componenti sono legate alla funzione ritardata di Green dall'uguaglianza

$$\mathscr{D}_{ik}(\zeta_s;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2) = D^R_{ik}(i\zeta_s;\ \mathbf{r}_2,\ \mathbf{r}_1)$$

per le $\zeta_s$ positive. Abbiamo mostrato al § 75 che le funzioni $D^R_{ik}(\omega;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)$ si possono considerare in un certo senso come suscettività generalizzate, che figurano nella teoria generale della reazione di un sistema macroscopico ad un'azione esterna. Di qui proveniva la proprietà di simmetria di queste funzioni, espressa (nel caso di mezzi magneticamente inattivi) dall'uguaglianza (75,12); in quanto esiste un legame fra le funzioni $D^R_{ik}$ e $\mathscr{D}_{ik}$, queste ultime godono della stessa proprietà:

$$\mathscr{D}_{ik}(\zeta_s;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2) = \mathscr{D}_{ki}(\zeta_s;\ \mathbf{r}_2,\ \mathbf{r}_1). \tag{79,5}$$

Da questa uguaglianza, così come da quella (79,4), deriva ora che le funzioni $\mathscr{D}_{ik}(\zeta_s;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)$ sono pari rispetto alla variabile discreta $\zeta_s$ in modo che per tutti i suoi valori (positivi e negativi) abbiamo

$$\mathscr{D}_{ik}(\zeta_s;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2) = D^R_{ik}(i\,|\,\zeta_s\,|;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2). \tag{79,6}$$

In seguito, la funzione $D^R_{ik}(\omega;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)$, come ogni suscettività generalizzata, è reale sul semiasse immaginario superiore $\omega$ (si veda V, § 123); perciò dalla (79,6) risulta che la funzione $\mathscr{D}_{ik}(\zeta_s;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)$ è reale per tutti i valori di $\zeta_s$. Infine, queste proprietà mostrano che la funzione iniziale $\mathscr{D}_{ik}(\tau;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)$ è anch'essa reale e pari rispetto alla variabile $\tau$:

$$\mathscr{D}_{ik}(\tau;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2) = \mathscr{D}_{ik}(-\tau;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2). \tag{79,7}$$

Il legame (79,6) fra le funzioni di Green termica e ritardata permette di scrivere immediatamente un'equazione differenziale cui deve soddisfare la funzione $\mathscr{D}_{ik}$ in un mezzo non omogeneo; a tal fine è sufficiente eseguire la sostituzione $\omega \to i\,|\,\zeta_s\,|$ nell'equazione (75,15) o (75,16). Così, per un mezzo non magnetico isotropo con $\mu = 1$ troviamo la seguente equazione:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_l} - \delta_{il}\Delta + \frac{\zeta_s^2}{c^2}\,\varepsilon(i\,|\,\zeta_s\,|,\ \mathbf{r})\,\delta_{il}\right] \times$$
$$\times\, \mathscr{D}_{lk}(\zeta_s;\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}') = -4\pi\hbar\delta_{ik}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{79,8}$$

Nel caso di un mezzo omogeneo illimitato la funzione $\mathscr{D}_{ik}(\zeta_s;\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}')$ si sviluppa in integrale di Fourier nella differenza

$\mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Le componenti di questo sviluppo verificano il sistema di equazioni algebriche

$$\frac{1}{4\pi\hbar}\left[k_i k_l - \delta_{il} k^2 - \delta_{il}\frac{\zeta_s^2}{c^2}\,\varepsilon\,(i\,|\zeta_s|)\right]\mathscr{D}_{lk}(\zeta_s, \mathbf{k}) = \delta_{ik} \qquad (79,9)$$

e sono determinate dalla formula [1])

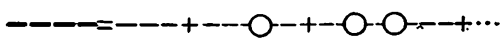
$$\mathscr{D}_{ik}(\zeta_s, \mathbf{k}) = -\frac{4\pi\hbar}{\zeta_s^2\varepsilon\,(i\,|\,\zeta_s\,|)/c^2 + k^2}\left[\delta_{ik} + \frac{c^2 k_i k_k}{\zeta_s^2\varepsilon\,(i\,|\,\zeta_s|)}\right]. \qquad (79,10)$$

Poiché la funzione $D_{ik}$ ($\zeta_s$, $\mathbf{k}$) si esprime (nel dominio delle onde lunghe $ka \ll 1$) mediante $\varepsilon$ ($\omega$), la tecnica dei diagrammi per il suo calcolo serve anche a calcolare la costante dielettrica del mezzo. Inoltre, quest'ultima acquista un determinato significato che verrà precisato più avanti.

Rappresenteremo la funzione $\mathscr{D}$ esatta in grassetto e la funzione $\mathscr{D}^{(0)}$ nel vuoto con una linea tratteggiata sottile secondo la regola [2])

(79,11)

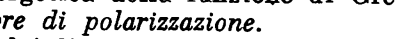
Tutta la totalità di diagrammi esprimenti la funzione può essere rappresentata dalla seguente serie (completamente analoga alla serie (14,3) per la funzione $G$):



(79,12)

dove il cerchietto indica la totalità dei blocchi di diagrammi che non si decompongono in due parti legate dalla sola linea tratteggiata; indichiamo questa totalità con $-\mathscr{P}_{ik}/4\pi$. La funzione $\mathscr{P}_{ik}$ (analoga alla parte autoenergetica della funzione di Green delle particelle) si chiama *operatore di polarizzazione*.

L'uguaglianza dei diagrammi (79,12) è equivalente all'equazione



(79,13)

---

[1]) Nelle applicazioni reali (cfr. § 80) la funzione $\mathscr{D}_{ik}$ figura sempre nel prodotto per $\zeta_s^2$; pertanto la divergenza per $\zeta_s = 0$ di fatto si elimina.

[2]) La denotazione delle funzioni $\mathscr{D}$ con la linea tratteggiata non può causare qui nessun equivoco, poiché in questo e nei paragrafi successivi l'energia di interazione a coppie delle particelle del mezzo (per la quale abbiamo utilizzato prima questa notazione) non figurerà in forma esplicita.

(si veda il passaggio dalla (14,3) alla (14,4)). In forma analitica essa dà

$$\mathscr{D}_{ik} = \mathscr{D}^{(0)}_{ik} + \mathscr{D}^{(0)}_{il} \frac{\mathscr{P}_{lm}}{4\pi} \mathscr{D}_{mk} \tag{79,14}$$

(tutti i fattori sono funzioni degli argomenti identici $\zeta_s$, $\mathbf{k}$). Moltiplicando il secondo membro di questa uguaglianza per il tensore inverso $\mathscr{D}^{-1}$ e il secondo per $\mathscr{D}^{(0)-1}$, riscriviamola nella forma

$$\mathscr{D}^{-1}_{ik} = \mathscr{D}^{(0)-1}_{ik} - \mathscr{P}_{ik}/4\pi. \tag{79,15}$$

Infine, considerando $\mathscr{D}^{-1}_{ik}$ a primo membro dell'equazione (79,9) e la stessa espressione con $\varepsilon = 1$ per $\mathscr{D}^{(0)-1}_{ik}$, troviamo

$$\mathscr{P}_{ik}(\zeta_s, \mathbf{k}) = \frac{\zeta_s^2}{\hbar c^2} [\varepsilon(i \mid \zeta_s \mid) - 1] \delta_{ik}, \tag{79,16}$$

ciò che definisce il significato dal punto di vista dei diagrammi della funzione $\varepsilon(\omega) - 1$ nell'insieme discreto di punti sul semiasse immaginario superiore $\omega$: Il prolungamento analitico della funzione $\varepsilon(i \mid \zeta_s \mid)$ a tutto il semipiano superiore deve essere effettuato, in principio, tenendo conto del fatto che $\varepsilon(\omega)$ non deve avere nessuna singolarità in questo semipiano e che $\varepsilon(\omega) \to 1$ per $\mid \omega \mid \to \infty$ [1]).

In un mezzo non omogeneo l'operatore di polarizzazione (come anche $\mathscr{D}_{ik}$) è funzione delle coordinate di due punti. Ripetendo tutta la deduzione nella rappresentazione delle coordinate, otteniamo in luogo della (79,14) l'equazione

$$\mathscr{D}_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathscr{D}^{(0)}_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \frac{1}{4\pi} \int \mathscr{D}^{(0)}_{il}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) \times$$
$$\times \mathscr{P}_{lm}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \mathscr{D}_{mk}(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_2) d^3x_3 d^3x_4$$

(per brevità, omettiamo gli argomenti $\zeta_s$). Applicando al primo membro di questa uguaglianza l'operatore

$$\frac{\partial^2}{\partial x_{1n} \partial x_{1l}} - \delta_{nl}\Delta_1 + \frac{\zeta_s^2}{c^2} \delta_{nl}$$

e tenendo conto che $D^{(0)}$ verifica l'equazione (79,8) con $\varepsilon = 1$, otteniamo

$$\int \mathscr{P}_{il}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \mathscr{D}_{lk}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2) d^3x' = [\varepsilon(\mathbf{r}_1) - 1] \frac{\zeta_s^2}{\hbar c^2} \mathscr{D}_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2),$$

---

[1]) In un mezzo anisotropo si deve scrivere

$$\mathscr{P}_{ik}(\zeta_s, \mathbf{k}) = (\zeta_s^2/\hbar c^2) [\varepsilon_{ik}(i \mid \zeta_s \mid) - \delta_{ik}].$$

È da notare che la forma di questa espressione resta valida anche in presenza di dispersione spaziale quando $\varepsilon_{ik}$ dipende non soltanto dalla frequenza, ma anche dal vettore d'onda.

da cui

$$\mathcal{P}_{ik}(\zeta_s;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2) = \frac{\zeta_s^2}{\hbar c^2}\,\delta_{ik}\,\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\,[\varepsilon(i\,|\,\zeta_s\,|,\ \mathbf{r}_1) - 1]. \quad (79,17)$$

La struttura di un mezzo condensato e, quindi, le sue proprietà dielettriche sono determinate dalle forze agenti fra le sue particelle a distanze dell'ordine delle dimensioni atomiche $a$. A queste distanze si può trascurare (per velocità non relativistiche delle particelle) il ritardo dell'interazione che diventa notevole soltanto per le componenti del campo ad onde lunghe (nel senso $ka \ll 1$); in altre parole, calcolando l'operatore di polarizzazione si può trascurare la parte ad onde lunghe del campo. Quanto ai diagrammi per la funzione di Green stessa $\mathcal{D}_{ik}$, il campo ad onde lunghe figura in essi soltanto mediante le linee tratteggiate sottili a secondo membro della (79,12).

È ovvio che il tensore tridimensionale $\mathcal{P}_{ik}$ qui considerato non rappresenta altro che la parte spaziale del quadritensore di polarizzazione $\mathcal{P}_{\mu\nu}$. Sottolineiamo, a scanso di equivoci, che la sua componente temporale $\mathcal{P}_{00}$ e le componenti miste $\mathcal{P}_{0i}$ non sono affatto nulle. Per di più, come anche in elettrodinamica quantistica, questo quadritensore non dipende, in generale, dalla trasformazione di gauge dei potenziali. Questa invarianza di gauge è già evidente, nella teoria non relativistica, dalla suddetta possibilità di calcolare l'operatore di polarizzazione tenendo conto delle sole forze non ritardate, indipendenti dalla trasformazione di gauge del campo ad onde lunghe [1]).

Le componenti $\mathcal{P}_{00}$ e $\mathcal{P}_{0i}$ si possono ricavare dalla condizione di trasversalità del quadritensore, $\mathcal{P}_{\mu\nu}k^\mu = 0$, dove $k^\mu = (i\zeta_s,\ \mathbf{k})$ è il quadrivettore d'onda. Dunque, questa condizione dà

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{00} &= -\frac{\mathbf{k}^2}{\hbar c^2}\,[\varepsilon(i\,|\,\zeta_s\,|) - 1], \\ \mathcal{P}_{0i} &= \frac{i\zeta_s k_i}{\hbar c^2}\,[\varepsilon(i\,|\,\zeta_s\,|) - 1]. \end{aligned} \quad (79,18)$$

---

[1]) Si veda IV, § 100. Cogliamo l'occasione per correggere un errore commesso nei ragionamenti là esposti. Il quadritensore, inverso del propagatore fotonico esatto $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ (nelle notazioni del volume!) ha la forma

$$\mathcal{D}^{-1}_{\mu\nu} = \frac{1}{\mathcal{D}}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + \frac{1}{\mathcal{D}^{(l)}}\,\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$$

e analogamente per il propagatore dei fotoni liberi $D_{\mu\nu}$ (nella formula (100,18) del volume IV è stato omesso il secondo termine in queste espressioni). I detti quadritensori dipendono dalla trasformazione di gauge e non sono trasversali. Tuttavia, la conclusione relativa alla trasversalità dell'operatore di polarizzazione e alla sua invarianza di gauge resta valida. Il fatto è che la parte longitudinale del propagatore è legata alla parte longitudinale del quadripotenziale priva di significato fisico e non partecipa all'interazione. Perciò l'interazione non la modifica, cosicché $\mathcal{D}^{(l)} = D^l$. In virtù dell'uguaglianza $\mathcal{D}^{-1}_{\mu\nu} = D^{-1}_{\mu\nu} - \mathcal{P}_{\mu\nu}/4\pi$ (IV (100,14)) ne segue anche la trasversalità di $\mathcal{P}_{\mu\nu}$ e la sua indipendenza da $\mathcal{D}^{(l)}$.

## § 80. *Tensore degli sforzi per le forze di Van der Waals*

Sebbene la struttura dei corpi condensati sia determinata soprattutto (come è stato detto alla fine del paragrafo precedente) dalle forze agenti fra le sue particelle alle distanze atomiche, un contributo alle grandezze termodinamiche (alla sua energia libera, ad esempio) lo portano le cosiddette *forze di Van der Waals*, ossia forze agenti fra gli atomi a distanze grandi rispetto alle dimensioni atomiche $a$. Ricordiamo, che per gli atomi liberi l'energia di questa interazione decresce con la distanza come $r^{-6}$ (si veda III, § 89) dopo di che rivestono importanza gli effetti di ritardo come $r^{-7}$ (si veda IV, § 83). È ovvio che nel mezzo condensato le forze di Van der Waals non si riducono all'interazione di singole coppie di atomi. Al tempo stesso, il fatto che il loro raggio d'azione è grande rispetto alle distanze interatomiche permette di affrontare la questione della loro influenza sulle proprietà termodinamiche dei corpi dal punto di vista macroscopico.

Nella teoria macroscopica l'interazione di Van der Waals in un mezzo materiale è supposta realizzata mediante un campo elettromagnetico ad onde lunghe (*E. M. Lifšits*, 1954); ricordiamo che questa nozione include in sé non soltanto le fluttuazioni termiche, ma anche le oscillazioni nulle del campo. Caratteristica importante del contributo di questa interazione all'energia libera consiste nella sua non additività: esso non è semplicemente proporzionale al volume dei corpi, ma dipende ugualmente dai parametri che ne caratterizzano la forma e la disposizione reciproca. Questa non additività, dovuta al grande raggio d'azione delle forze di Van der Waals, distingue il loro contributo all'energia libera dalla parte additiva di gran lunga superiore. Nel quadro macroscopico l'origine di questa proprietà è legata al fatto che ogni modifica delle proprietà elettriche del mezzo in una certa zona implica, in virtù delle equazioni di Maxwell, una modifica del campo fluttuante anche all'esterno di questa zona. Di fatto, questi effetti di non additività diventano sensibili, ovviamente, soltanto per dimensioni caratteristiche piccole (anche se grandi rispetto alle dimensioni atomiche); per pellicole sottili, per corpi separati da una stretta fessura ecc.

Calcolando il contributo delle fluttuazioni elettromagnetiche all'energia libera, ogni volta assumono importanza le lunghezze d'onda dell'ordine di grandezza delle dimensioni caratteristiche di qualche impurità del mezzo (spessore della pellicola, larghezza della fessura ecc.). Questa circostanza è nella teoria macroscopica la causa della legge di diminuzione potenziale delle forze di Van der Waals; se fossero essenziali le fluttuazioni con una lunghezza d'onda fissata $\lambda_0$ ciò implicherebbe una legge di decremento esponenziale delle forze, con esponente $\sim r/\lambda_0$. Inoltre, poiché le dimensioni caratte-

ristiche e, quindi, le lunghezze d'onda caratteristiche delle fluttuazioni sono molto superiori alle dimensioni atomiche, tutte le proprietà di queste fluttuazioni e il loro contributo all'energia libera sono completamente espressi mediante la costante dielettrica complessa dei corpi.

Il nostro scopo è di calcolare le forze macroscopiche agenti in un mezzo non omogeneo [1]). Come passo preliminare, iniziamo dalla definizione della variazione dell'energia libera per una piccola variazione della sua costante dielettrica (trascureremo le proprietà magnetiche, supponendo cioè che la permeabilità magnetica $\mu = 1$). Supponiamo quindi che la variazione di $\varepsilon$ sia dovuta alla variazione dell'operatore hamiltoniano del sistema di un piccolo valore $\delta H$. Allora la variazione dell'energia libera è

$$\delta F = \langle \delta \hat{H} \rangle, \tag{80,1}$$

dove la media è calcolata (per temperatura e volume del sistema dati) secondo la distribuzione di Gibbs con l'operatore hamiltoniano imperturbato $\hat{H}$. Rappresentiamo quest'ultimo nella forma [2])

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}_{\text{lung}}, \quad \hat{V}_{\text{lung}} = -\int \hat{\mathbf{j}} \hat{\mathbf{A}} \, d^3x, \tag{80,2}$$

dove $\hat{V}_{\text{lung}}$ descrive l'interazione delle particelle con il campo elettromagnetico ad onde lunghe e $\hat{H}_0$ include in sé tutte le altre interazioni assieme ai termini corrispondenti alle particelle libere e ai fotoni (parlando a rigore, nell'integrale (80,2) si dovrebbe intendere un taglio in corrispondenza di un certo vettore d'onda $k_0 \ll 1/a$; tuttavia, il parametro di taglio non figura nel risultato finale). $\hat{\mathbf{A}}$ è l'operatore del potenziale vettoriale del campo ad onde lunghe; è essenziale che l'operatore $\delta\hat{H}$, responsabile della variazione della costante dielettrica, non contenga in sé $\hat{\mathbf{A}}$, in quanto la costante dielettrica è definita unicamente dall'interazione delle particelle a distanze atomiche.

Nell'espressione (80,1) passiamo ora agli operatori di Matsubara in una rappresentazione che si potrebbe chiamare « rappresentazione ad onde lunghe dell'interazione », nella quale la dipendenza degli operatori da $\tau$ è definita da tutti i termini dell'operatore hamiltoniano, ad eccezione di $\hat{V}_{\text{lung}}$. Ricorrendo allo stesso metodo mediante il quale abbiamo dedotto la (38,7), otteniamo

$$\delta F = \frac{1}{\langle \hat{\sigma} \rangle_0} \langle \mathrm{T}_\tau \delta \hat{H}^M \hat{\sigma} \rangle_0, \quad \hat{\sigma} = \mathrm{T}_\tau \exp \int_0^{1/T} \int \hat{\mathbf{j}}^M \hat{\mathbf{A}}^M \, d^3x \, d\tau, \tag{80,3}$$

[1]) La teoria esposta più avanti appartiene a *I. E. Dzjaloštinskij* e *L. P. Pitaevskij* (1959).

[2]) In questo paragrafo poniamo $\hbar = 1$, $c = 1$.

dove $\langle \ldots \rangle_0$ significa la media secondo la distribuzione di Gibbs con l'operatore hamiltoniano $\hat{H}_0$. In accordo con il significato della rappresentazione prescelta, gli operatori di Matsubara sono definiti come segue:

$$\hat{\mathbf{A}}^M(\tau, \mathbf{r}) = \exp(\tau \hat{H}_0)\, \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) \exp(-\tau \hat{H}_0) \tag{80,4}$$

e analogamente per $\delta \hat{H}^M$ e gli operatori $\psi$ di cui è composto l'operatore di corrente di particelle $\mathbf{j}^M$ [1]). Poiché $\hat{H}_0$ non contiene l'interazione dei fotoni ad onde lunghe con alcunché, allora $\hat{\mathbf{A}}^M$ coincide con l'operatore (di Matsubara) del campo fotonico libero; per gli operatori $\psi$ delle particelle, ovviamente, non è così, in quanto $\hat{H}_0$ include in sé l'interazione fra le particelle.

Seguendo i principi generali di costruzione della tecnica dei diagrammi, sviluppiamo l'esponente nella (80,3) in potenze di $\hat{V}_{\text{lung}}$ [2]). Inoltre in ogni termine dello sviluppo si calcola la media del prodotto degli operatori $\hat{\mathbf{A}}^M$ del campo libero sotto forma di convoluzioni a coppie in base al teorema di Wick. Il termine nullo dello sviluppo, non contenente $\hat{\mathbf{A}}^M$, dà $\delta F_0$, ossia la variazione dell'energia libera a prescindere dalle fluttuazioni ad onde lunghe. Il termine successivo lineare in $\hat{\mathbf{A}}^M$ si annulla in seguito all'operazione di media. Nel termine quadratico rispetto al campo la convoluzione di due operatori $\langle \hat{A}_i^M \hat{A}_k^M \rangle$ dà $\mathscr{D}_{ik}^{(0)}$, ossia la funzione di Green dei fotoni liberi; questo termine può essere rappresentato dal seguente diagramma:

$\delta F^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot$ (80,5)

(dove è evidenziato il fattore numerico 1/2! comparso per lo sviluppo dell'esponente). Il tratteggio chiaro indica la funzione $\mathscr{D}^{(0)}$ e il cerchietto tratteggiato la media di tutti gli altri fattori. La forma esplicita di quest'ultima grandezza non la scriviamo; è importante solo che essa non rappresenti altro che $\delta \mathscr{P}_{ik}/4\pi$, dove $\delta \mathscr{P}_{ik}$ è la variazione dell'operatore di polarizzazione al variare di $\delta \hat{H}$ dell'operatore hamiltoniano del sistema.

---

[1]) A scanso di complicazioni nelle notazioni, omettiamo l'indice 0 che si dovrebbe aggiungere agli operatori in questa rappresentazione.

[2]) È sufficiente seguire lo sviluppo del numeratore nell'espressione di $\delta F$. Di solito, il ruolo del fattore $\langle \hat{\sigma} \rangle_0$ a denominatore si riduce all'eliminazione dei diagrammi che si decompongono in due o più parti sconnesse.

È facile convincersene considerando allo stesso modo la variazione della funzione che nella suddetta rappresentazione degli operatori è data dall'espressione

$$\mathscr{D}_{ik}(\tau_1, \mathbf{r}_1; \tau_2, \mathbf{r}_2) = -\frac{1}{\langle\hat{\sigma}\rangle_0}\langle T_\tau \hat{A}_i^M(\tau_1, \mathbf{r}_1)\hat{A}_k^M(\tau_2, \mathbf{r}_2)\hat{\sigma}\rangle_0,$$

dove ora

$$\hat{\sigma} = T_\tau \exp\int_0^{1/T}(-\hat{V}_{\text{lung}}^M - \delta\hat{H}^M)\,d\tau,$$

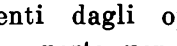
vale a dire che all'« interazione » partecipa non solo $\hat{V}_{\text{lung}}$, ma anche $\delta\hat{H}$. La variazione cercata $\delta\mathscr{D}_{ik}$ è data dal termine lineare dello sviluppo di questa espressione in potenze di $\delta\hat{H}^M$:

$$\delta\mathscr{D}_{ik} = \frac{1}{\langle\hat{\sigma}\rangle_0}\left\langle T_\tau \int \delta\hat{H}\,d\tau\cdot\hat{A}_i^M(\tau_1, \mathbf{r}_1)\hat{A}_k^M \times \right.$$
$$\left. \times(\tau_2, \mathbf{r}_2)\exp\int \hat{\mathbf{j}}^M\hat{\mathbf{A}}^M\,d^3x\,d\tau\right\rangle_0. \qquad (80,6)$$

Sviluppando l'esponente rimanente in potenze di $\hat{V}_{\text{lung}}$, il termine nullo deve essere omesso poiché gli corrisponde un diagramma non connesso (la convoluzione $\langle\hat{A}_i^M\hat{A}_k^M\rangle$ si separa dagli altri fattori non contenenti le variabili $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$). Il termine del primo ordine contiene un numero dispari di operatori $A$ e si annulla in seguito all'operazione di media. Infine, il termine del secondo ordine dà in $\delta\mathscr{D}_{ik}$ un'espressione che viene rappresentata dal diagramma

$\delta\mathscr{D}_{ik}^{[2]} =$  (80,7)

con lo stesso cerchietto del diagramma (80,5) (il fattore 1/2 si elimina in questo caso a causa delle due possibilità di convoluzione degli operatori « interni » $A$, provenienti dagli operatori $\hat{V}_{\text{lung}}$, con quelli « esterni » $\hat{A}_i^M$ ed $\hat{A}_k^M$). D'altra parte, per definizione di operatore di polarizzazione, la funzione di Green, nell'approssimazione considerata, è rappresentata dalla somma

$\mathscr{D}_{ik} =$ 

dove il cerchietto chiaro è l'operatore di polarizzazione $\mathscr{P}_{ik}/4\pi$. Quindi, la variazione di questa funzione dà il diagramma (80,7) con $\delta\mathscr{P}_{ik}/4\pi$ in qualità di cerchietto tratteggiato.

Tutti i termini successivi dello sviluppo nella (80,3) rappresentano correzioni dei diversi ordini alla linea tratteggiata e al cerchietto del diagramma (80,5). Queste correzioni trasformano la linea tratteggiata nella funzione precisa $\mathscr{D}_{ik}$. Come è stato già detto, le correzioni ad onde lunghe a $\delta\mathscr{P}_{ik}$ sono piccole, in modo che con $\delta\mathscr{P}_{ik}$ si può intendere immediatamente la variazione dell'operatore di polarizzazione esatto.

Questo risultato si scrive in forma analitica (dopo il passaggio allo sviluppo di Fourier nella variabile $\tau$) come [1])

$$\delta F = \delta F_0 - \frac{1}{2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} T \int \mathscr{D}_{ik}(\zeta_s;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2) \times$$
$$\times \frac{1}{4\pi} \delta\mathscr{P}_{kl}(\zeta_s;\ \mathbf{r}_2,\ \mathbf{r}_1)\, d^3x_1\, d^3x_2. \qquad (80,8)$$

In accordo con la (79,17), la variazione dell'operatore di polarizzazione si esprime (per un mezzo isotropo) mediante la variazione della costante dielettrica:

$$\delta\mathscr{P}_{kl}(\zeta_s;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2) = \zeta_s^2 \delta_{kl} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\, \delta\varepsilon(i\,|\,\zeta_s\,|,\ \mathbf{r}_1);$$

l'esistenza di una funzione $\delta$ permette qui di eliminare una delle integrazioni nell'(80,8). Tenendo anche conto della parità della funzione $\mathscr{D}_{ik}$ in $\zeta_s$, riscriviamo l'(80,8) nella forma

$$\delta F = \delta F_0 - \frac{T}{4\pi} \sum_{s=0}^{\infty}{}' \int \zeta_s^2 \mathscr{D}_{ll}(\zeta_s;\ \mathbf{r},\ \mathbf{r})\, \delta\varepsilon(i\,|\,\zeta_s\,|,\ \mathbf{r})\, d^3x, \qquad (80,9)$$

dove la sommatoria è estesa unicamente ai valori positivi di $s$; l'apice del segno di sommatoria significa che il termine nullo deve essere considerato con il fattore 1/2 (questo termine ha un valore finito: il fattore $\zeta_s^2$ elimina la divergenza in $\mathscr{D}_{ll}$ per $\zeta_s = 0$).

Per la deduzione delle formule ulteriori è comodo introdurre, oltre alla funzione $\mathscr{D}_{ik}$, ancora due funzioni,

$$\begin{aligned} \mathscr{D}^E_{ik}(\zeta_s;\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}') &= -\zeta_s^2 \mathscr{D}_{ik}(\zeta_s;\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}'), \\ \mathscr{D}^H_{ik}(\zeta_s;\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}') &= \mathrm{rot}_{il}\, \mathrm{rot}'_{km} \mathscr{D}_{lm}(\zeta_s;\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}'), \end{aligned} \qquad (80,10)$$

---

[1]) Non diamo la regola generale di determinazione del segno nei diagrammi del tipo (80,5) (diagrammi senza estremi liberi). Nel caso dato è facile stabilire questa regola scrivendo in forma esplicita i termini corrispondenti degli sviluppi nelle espressioni (80,3) e (80,6). Fra l'altro, è sufficiente osservare che questo termine nell'(80,3) contiene una sola convoluzione di una coppia di operatori $A$, e nell'(80,6) di due coppie; poiché la convoluzione di una coppia dà $-\mathscr{D}_{ik}$, i diagrammi (80,5) e (80,7) sono di segno opposto il che implica il segno negativo nell'espressione (80,8).

costruite analogamente alle espressioni (76,3-4). Allora $\delta F$ si scrive nella forma definitiva seguente:

$$\delta F = \delta F_0 + \frac{T}{4\pi} \sum_{s=0}^{\infty}{}' \int \mathscr{D}_{ll}^{E}(\zeta_s;\ \mathbf{r},\ \mathbf{r})\, \delta\varepsilon(i \mid \zeta_s \mid,\ \mathbf{r})\, d^3x. \qquad (80,11)$$

Usiamo ora la formula (80,11) per definire le forze agenti in un mezzo non omogeneo. Abbiamo già fatto l'ipotesi sull'isotropia del mezzo; ora lo supporremo anche liquido in modo che la variazione dello stato in ogni suo punto (per una data temperatura) possa essere legata unicamente alla variazione della densità $\rho$.

Supponiamo che il mezzo sia soggetto a una deformazione isotermica piccola con vettore spostamento $\mathbf{u}(\mathbf{r})$. La variazione corrispondente della sua energia libera è

$$\delta F = -\int \mathbf{f}\mathbf{u}\, d^3x \qquad (80,12)$$

dove $\mathbf{f}$ è la densità volumetrica delle forze agenti sul mezzo. D'altra parte, la stessa variazione può essere trovata mediante la formula (80,11), esprimendo le variazioni $\delta F_0$ e $\delta\varepsilon$ in funzione del suddetto vettore spostamento. $P_0(\rho,\ T)$ sia la pressione, senza tener conto delle correzioni di Van der Waals, per $\rho$ e $T$ date; la densità corrispondente delle forze volumetriche è $\mathbf{f}_0 = -\nabla P_0$ in modo che

$$\delta F_0 = \int \mathbf{u}\nabla P_0\, d^3x.$$

In seguito, la variazione della densità è legata al vettore spostamento dall'equazione di continuità $\delta\rho = -\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{u})$. Perciò la variazione della costante dielettrica è

$$\delta\varepsilon = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\,\delta\rho = -\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\,\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{u}).$$

Sostituendo questa espressione nell'(80,11), integrando per parti su tutto il volume del corpo e confrontando il risultato così ottenuto per $\delta F$ con l'(80,12), troviamo

$$\mathbf{f} = -\nabla P_0 - \frac{T}{4\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \rho\, \mathrm{grad}\left[\mathscr{D}_{ll}^{E}(\zeta_s;\ \mathbf{r},\ \mathbf{r})\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right]. \qquad (80,13)$$

Questa formula consente, in particolare, di definire immediatamente la correzione al potenziale chimico del corpo. A tal fine scriviamo la condizione di equilibrio meccanico: $\mathbf{f} = 0$. In questo caso terremo conto che a temperatura costante

$$dP_0(\rho,\ T) = \frac{\rho}{m}\, d\mu_0(\rho,\ T)$$

dove $\mu_0(\rho, T)$ è il potenziale chimico imperturbato del corpo ($m$ la massa della particella). Otteniamo quindi questa condizione nella forma $\rho\nabla\mu = 0$, dove

$$\mu = \mu_0(\rho, T) + \frac{mT}{4\pi} \sum_{s=0}^{\infty}{}' \mathscr{D}_{ll}^{E}(\zeta_s;\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}) \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}. \tag{80,14}$$

D'altra parte, la costanza del potenziale chimico lungo un qualsiasi corpo non omogeneo è la condizione di equilibrio meccanico; perciò è chiaro che l'espressione (80,14) definisce questo potenziale.

Come è noto, la descrizione più completa delle forze agenti in un mezzo è data dal cosiddetto tensore degli sforzi $\sigma_{ik}$ legato alle componenti del vettore $\mathbf{f}$ dalla relazione

$$f_i = \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}. \tag{80,15}$$

Per ridurre l'espressione (80,13) a questa forma, riscriviamola dapprima nel seguente modo:

$$f_i = -\frac{\partial P_0}{\partial x_i} + \frac{T}{4\pi} \sum{}' \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left( \varepsilon(\mathbf{r}) - \rho \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} \right) \mathscr{D}_{ll}^{E}(\mathbf{r},\ \mathbf{r}) \right\} - \\ - \frac{T}{4\pi} \sum{}' \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial x_i} \mathscr{D}_{ll}^{E}(\mathbf{r},\ \mathbf{r})$$

(per brevità, omettiamo gli argomenti $\zeta_s$ nelle formule intermedie). I primi due termini hanno già la forma richiesta. Il terzo termine, invece, rappresentiamolo così

$$-\frac{T}{4\pi} \sum{}' \left\{ \varepsilon(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial x_i} + \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial x_i'} \right\} \mathscr{D}_{ll}^{E}(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')$$

evidenziando le derivazioni rispetto al primo e al secondo argomento della funzione $\mathscr{D}_{ll}(\mathbf{r},\ \mathbf{r})$; alla fine dei calcoli identificheremo $\mathbf{r}$ con $\mathbf{r}'$. Il calcolo va eseguito mediante le equazioni (cfr. la (79,8))

$$\hat{\Lambda}_{il}\mathscr{D}_{lk}(\mathbf{r},\ \mathbf{r}') = -4\pi\delta_{ik}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$
$$\hat{\Lambda}_{il}'\mathscr{D}_{kl}(\mathbf{r},\ \mathbf{r}') = -4\pi\delta_{ik}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

dove

$$\hat{\Lambda}_{il} = \zeta_s^2\varepsilon(\mathbf{r})\,\delta_{il} + \mathrm{rot}_{im}\,\mathrm{rot}_{ml} = \zeta_s^2\varepsilon(\mathbf{r})\,\delta_{il} + \frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_l} - \delta_{il}\Delta.$$

Come risultato otteniamo l'uguaglianza (per $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$)

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} \mathscr{D}_{ll}^{E} = 2\frac{\partial}{\partial x_k} [\varepsilon\mathscr{D}_{ik}^{E} + \mathscr{D}_{ik}^{H}] - \frac{\partial}{\partial x_i} \mathscr{D}_{ll}^{H}$$

e, infine, la seguente espressione del tensore degli sforzi:

$$\sigma_{ik} = -P_0\delta_{ik} - \frac{T}{2\pi}\sum_{s=0}^{\infty}{}' \left\{ -\frac{1}{2}\delta_{ik}\left[\varepsilon(i\zeta_s, \mathbf{r}) - \rho\frac{\partial\varepsilon(i\zeta_s, \mathbf{r})}{\partial\rho}\right]\times \right.$$
$$\times \mathscr{D}^E_{ll}(\zeta_s; \mathbf{r}, \mathbf{r}) + \varepsilon(i\zeta_s, \mathbf{r})\mathscr{D}^E_{ik}(\zeta_s; \mathbf{r}, \mathbf{r}) -$$
$$\left. -\frac{1}{2}\delta_{ik}\mathscr{D}^H_{ll}(\zeta_s; \mathbf{r}, \mathbf{r}) + \mathscr{D}^H_{ik}(\zeta_s; \mathbf{r}, \mathbf{r})\right\}. \qquad (80,16)$$

Le formule ottenute non posseggono ancora un significato fisico diretto. Infatti, la funzione $\mathscr{D}_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ tende all'infinito, per $\mathbf{r}' \to \mathbf{r}$, come $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$; è facile convincersi di ciò con l'ausilio dell'equazione (79,8). Questa divergenza proviene dal contributo da parte dei vettori d'onda grandi ($k \sim 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$) ed è dovuta esclusivamente all'inapplicabilità dell'equazione (79,8) per $k \gtrsim a$. Questa complicazione può essere eliminata non introducendo in forma esplicita il taglio sui $k$ grandi. A tale scopo osserviamo che le fluttuazioni ad onde corte non hanno niente a che vedere con gli effetti che ci interessano, legati alla non omogeneità del mezzo. Il loro contributo alle grandezze termodinamiche in ogni dato punto del corpo è uguale per un mezzo omogeneo e per uno non omogeneo, ma con un medesimo valore di $\varepsilon(\mathbf{r})$ nel punto considerato. Per conferire alle formule un significato univoco, non dipendente, in realtà, dal carattere del taglio, si devono perciò effettuare nelle formule dei calcoli appropriati. Come funzione di Green $\mathscr{D}_{ik}(\zeta_s; \mathbf{r}, \mathbf{r})$ occorre intendere il limite della differenza

$$\lim_{\mathbf{r}'\to\mathbf{r}}\{\mathscr{D}_{ik}(\zeta_s; \mathbf{r}, \mathbf{r}') - \overline{\mathscr{D}}_{ik}(\zeta_s; \mathbf{r}, \mathbf{r}')\}, \qquad (80,17)$$

dove $\overline{\mathscr{D}}_{ik}$ è la funzione di Green di un mezzo omogeneo ausiliario la cui costante dielettrica coincide con quella del mezzo vero in un dato punto $\mathbf{r}$; questo limite è già convergente. Per non rendere troppo complicata la scrittura delle formule, le lasciamo nella forma precedente intendendovi con $\mathscr{D}_{ik}$ la differenza (80,17). In questo caso, $P_0(\rho, T)$ è la pressione in un mezzo omogeneo illimitato per $\rho$ e $T$ date.

Così come nella formula (80,16), anche nell'equazione (79,8) esprimente la funzione di Green $\mathscr{D}_{ik}$, le proprietà del mezzo figurano esclusivamente attraverso $\varepsilon(i\zeta)$, ossia mediante la costante dielettrica quale funzione della frequenza immaginaria. Ricordiamo a questo proposito che questa funzione è legata alla parte immaginaria della costante dielettrica, per frequenze reali dalla semplice relazione seguente:

$$\varepsilon(i\zeta) = 1 + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega\,\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega)}{\omega^2+\zeta^2}\,d\omega \qquad (80,18)$$

(si veda VIII, § 62). Si può dire perciò che l'unica caratteristica macroscopica esprimente le forze di Van der Waals nel mezzo materiale è, in ultima analisi, la parte immaginaria della sua costante dielettrica.

La forma dell'espressione (80,16) corrisponde esattamente a un'espressione, nota dall'elettrodinamica macroscopica, per il tensore degli sforzi di Maxwell in un campo elettromagnetico costante, dove le combinazioni quadratiche delle componenti **E** e **H** sono sostituite alle funzioni corrispondenti $-\mathscr{D}_{ik}^{E}$ e $-\mathscr{D}_{ik}^{H}$. Non si deve, tuttavia, attribuire a questa analogia un'importanza eccessiva poiché essa non significa affatto l'esistenza per il campo elettromagnetico variabile come tale di un'espressione generale per il tensore degli sforzi in un mezzo assorbente (contenente come caratteristica del mezzo la sua sola costante dielettrica). Nel caso dato abbiamo a che fare non con un campo elettromagnetico arbitrario, bensì con quello fluttuante proprio in equilibrio termodinamico nel mezzo.

## § 81. *Forze di interazione molecolari fra solidi. Formula generale*

Applichiamo le formule dedotte nel paragrafo precedente al calcolo delle forze agenti fra solidi le cui superfici sono separate da distanze molto piccole, che soddisfano la sola condizione di essere grandi rispetto alle distanze interatomiche nei corpi. Questa è la condizione che consente di affrontare la questione dal punto di vista macroscopico e di considerare i corpi come mezzi continui e la loro interazione come realizzata mediante un campo elettromagnetico fluttuante. In questo caso sono importanti le fluttuazioni le cui lunghezze d'onda sono dell'ordine di grandezza delle dimensioni caratteristiche del problema, cioè della larghezza della fessura fra i corpi [1]).

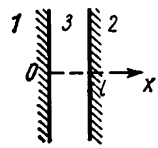


Fig. 17

Indicheremo con gli indici *1* e *2* le grandezze riferite a due solidi e con l'indice *3* le grandezze riferite allo spazio della fessura fra questi solidi (fig. 17). Supponiamo la fessura piano-parallela e indirizziamo l'asse $x$ perpendicolarmente al suo piano (in modo che le superfici dei corpi *1* e *2* siano i piani $x = 0$ e $x = l$, essendo $l$ la larghezza della fessura). La forza $F$ agente sull'unità d'area della superficie, per esempio del corpo *2*, si calcola come flusso dell'impulso penetrante nel corpo attraverso questa superficie. Questo flusso è dato dalla componente $\sigma_{xx}$ del tensore degli sforzi elettromagnetico

---

[1]) I risultati dei §§ 81, 82 appartengono a *E. M. Lifšits* (1954).

nello spazio della fessura, considerato per $x = l$. Nel vuoto si ha $\varepsilon = 1$ e l'espressione di $\sigma_{xx}$ dall'(80,16) si riduce a [1])

$$F = \sigma_{xx}(l) = \frac{T}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty}{}' \{\mathscr{D}^E_{yy}(\zeta_n;\ l,\ l) + \mathscr{D}^E_{zz}(\zeta_n;\ l,\ l) - \\ - \mathscr{D}^E_{xx}(\zeta_n;\ l,\ l) + \mathscr{D}^H_{yy}(\zeta_n;\ l,\ l) + \\ + \mathscr{D}^H_{zz}(\zeta_n;\ l,\ l) - \mathscr{D}^H_{xx}(\zeta_n;\ l,\ l)\} \tag{81,1}$$

(l'indice di sommatoria in questo paragrafo lo denotiamo con la lettera $n$).

Poiché il problema è omogeneo nelle direzioni $y$ e $z$, le funzioni $\mathscr{D}_{ik}(\zeta_n;\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}')$ dipendono unicamente dalle differenze $y - y'$ e $z - z'$ (gli argomenti $y - y'$ e $z - z'$ nell'(81,1) sono omessi); le componenti di Fourier in queste variabili sono $\mathscr{D}_{ik}(\zeta_n,\ \mathbf{q};\ x,\ x')$. Allora abbiamo

$$\mathscr{D}_{ik}(\zeta_n;\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}) = \int \mathscr{D}_{ik}(\zeta_n,\ \mathbf{q};\ x,\ x)\frac{d^2q}{(2\pi)^2}. \tag{81,2}$$

Per le funzioni $\mathscr{D}_{ik}(\zeta_n,\ \mathbf{q};\ x,\ x')$ le equazioni (79,8) diventano (l'asse $y$ è diretto lungo il vettore $\mathbf{q}$)

$$\left(w^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right)\mathscr{D}_{zz}(x,\ x') = -4\pi\delta(x - x'),$$

$$\left(w^2 - q^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right)\mathscr{D}_{yy}(x,\ x') + iq\frac{d}{dx}\mathscr{D}_{xy}(x,\ x') = -4\pi\delta(x - x'),$$

$$w^2\mathscr{D}_{xy}(x,\ x') + iq\frac{d}{dx}\mathscr{D}_{yy}(x,\ x') = 0,$$

$$w^2\mathscr{D}_{xx}(x,\ x') + iq\frac{d}{dx}\mathscr{D}_{yx}(x,\ x') = -4\pi\delta(x - x'),$$

dove $w = (\varepsilon\zeta_n^2 + q^2)^{1/2}$, $\varepsilon = \varepsilon(i\zeta_n)$ e $x'$ funge da parametro (le componenti $\mathscr{D}_{xz} = \mathscr{D}_{yz}$ sono, invece, nulle poiché le equazioni sono omogenee per esse). La soluzione di questo sistema si riduce alla soluzione di due sole equazioni

$$\left(w^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right)\mathscr{D}_{zz}(x,\ x') = -4\pi\delta(x - x'), \tag{81,3}$$

$$\left(w^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right)\mathscr{D}_{yy}(x,\ x') = -\frac{4\pi w^2}{\varepsilon\zeta_n^2}\delta(x - x'), \tag{81,4}$$

dopo di che $\mathscr{D}_{xy}$ e $\mathscr{D}_{xx}$ sono definite come

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_{xy}(x,\ x') &= -\frac{iq}{w^2}\frac{d}{dx}\mathscr{D}_{yy}(x,\ x'), \\ \mathscr{D}_{xx}(x,\ x') &= -\frac{iq}{w^2}\frac{d}{dx}\mathscr{D}_{yx}(x,\ x') - \frac{4\pi}{w^2}\delta(x - x'). \end{aligned} \tag{81,5}$$

[1]) Nei calcoli intermedi poniamo $\hbar = 1$, $c = 1$.

In questo caso si deve tener conto che, in virtù della (79,5), $\mathscr{D}_{yx}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathscr{D}_{xy}(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ e perciò $\mathscr{D}_{yx}(\mathbf{q}; x, x') = \mathscr{D}_{xy}(-\mathbf{q}; x', x)$.

Le condizioni al contorno corrispondenti alla continuità delle componenti tangenziali dell'intensità dei campi elettrico e magnetico richiedono che siano continue le grandezze $\mathscr{D}^E_{yk}$, $\mathscr{D}^E_{zk}$, $\mathscr{D}^H_{yk}$, $\mathscr{D}^H_{zk}$ o, che è lo stesso, che siano continue le grandezze

$$\mathscr{D}_{yk}, \ \mathscr{D}_{zk}, \ \mathrm{rot}_{yl}\,\mathscr{D}_{lk}, \ \mathrm{rot}_{zl}\,\mathscr{D}_{lk}.$$

Usando la prima delle uguaglianze (81,5) troviamo che sulla frontiera di separazione devono essere continue

$$\mathscr{D}_{zz}, \ \frac{d}{dx}\mathscr{D}_{zz}, \ \mathscr{D}_{yy}, \ \frac{\varepsilon}{w^2}\frac{d}{dx}\mathscr{D}_{yy}. \tag{81,6}$$

Poiché ci proponiamo di calcolare il tensore degli sforzi soltanto nel dominio della fessura, si può supporre immediatamente che $0 < x' < l$. Nel dominio $0 < x < l$ le funzioni $\mathscr{D}_{yy}$ e $\mathscr{D}_{zz}$ sono definite dalle equazioni (81,3-4) con $\varepsilon = 1$, $w = w_3 = (\zeta_n^2 + q^2)^{1/2}$. Nei domini *1* ($x < 0$) e *2* ($x > l$) esse verificano le stesse equazioni senza secondi membri (poiché qui $x \neq x'$) rispettivamente con $\varepsilon_1$, $w_1$ ed $\varepsilon_2$, $w_2$ in qualità di $\varepsilon$, $w$.

La sottrazione da fare secondo l'(80,17) si riduce alla necessità di sottrarre da tutte le funzioni $\mathscr{D}_{ik}$ nel dominio della fessura i loro valori per $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. In particolare, come conseguenza di questo fatto si può omettere immediatamente il secondo termine a destra nella seconda uguaglianza (81,5) in modo che nel dominio della fessura abbiamo

$$\mathscr{D}_{xy} = -\frac{iq}{w_3^2}\frac{d}{dx}\mathscr{D}_{yy}, \quad \mathscr{D}_{xx} = -\frac{iq}{w_3^2}\frac{d}{dx}\mathscr{D}_{yx}. \tag{81,7}$$

Prima di iniziare la risoluzione delle equazioni, facciamo ancora un'osservazione. La soluzione generale delle equazioni (81,3-4) ha la forma $f^-(x - x') + f^+(x + x')$. Partendo dalle equazioni (81,3-4), (81,7) e dalla definizione delle funzioni $\mathscr{D}^E_{ik}$ e $\mathscr{D}^H_{ik}$, si può mostrare che le parti delle funzioni di Green dipendenti dalla somma $x + x'$ non danno nessun contributo nell'espressione (81,1) per la forza. Non ci soffermiamo su ciò, poiché questo risultato è evidente a priori dalle considerazioni fisiche seguenti: ponendo $x = x'$ nella soluzione della forma $f^+(x + x')$ otterremmo un flusso di impulso nella fessura, che dipenderebbe dalla coordinata, in contraddizione con la legge di conservazione dell'impulso. Perciò in seguito, nel risultato scriveremo solo le espressioni per quelle parti delle funzioni di Green $\mathscr{D}_{ik}$ che non dipendono da $x + x'$.

Passiamo ora alla ricerca della funzione $\mathscr{D}_{zz}$. Essa verifica le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
&\left(w_1^2-\frac{d^2}{dx^2}\right)\mathscr{D}_{zz}(x,\ x')=0, \qquad x<0,\\
&\left(w_2^2-\frac{d^2}{dx^2}\right)\mathscr{D}_{zz}(x,\ x')=0, \qquad x>l,\\
&\left(w_3^2-\frac{d^2}{dx^2}\right)\mathscr{D}_{zz}(x,\ x')=-4\pi\delta(x-x'), \qquad 0<x<l.
\end{aligned} \tag{81,8}$$

Di qui ricaviamo

$$\mathscr{D}_{zz}=Ae^{w_1x},\ x<0, \quad \mathscr{D}_{zz}=Be^{-w_2x}, \quad x>l,$$

$$\mathscr{D}_{zz}=C_1e^{w_3x}+C_2e^{-w_3x}-\frac{2\pi}{w_3}e^{-w_3|x-x'|}, \quad 0<x<l\cdot$$

Nell'ultima espressione si è tenuto conto che, in virtù della terza equazione (81,8), la derivata $d\mathscr{D}_{zz}/dx$ ha un salto uguale a $4\pi$ in $x=x'$. Definendo $A$, $B$, $C_1$, $C_2$ (funzioni di $x'$) mediante le condizioni al contorno di continuità di $\mathscr{D}_{zz}$ e $d\mathscr{D}_{zz}/dx$, otteniamo

$$\mathscr{D}_{zz}^{-}=\frac{4\pi}{w_3\Delta}\operatorname{ch} w_3(x-x')-\frac{2\pi}{\omega_3}e^{-w_3|x-x'|}, \quad 0<x<l,$$

dove

$$\Delta=1-e^{2w_3l}\frac{(w_1+w_3)(w_2+w_3)}{(w_1-w_3)(w_2-w_3)}.$$

Sottraendo il valore $\mathscr{D}_{zz}^{-}$ per $w_1=w_2=w_3$ (in questo caso $1/\Delta=0$) otteniamo il risultato definitivo

$$\mathscr{D}_{zz}^{-}=\frac{4\pi}{w_3\Delta}\operatorname{ch} w_3(x-x').$$

Analogamente, risolvendo l'equazione per $\mathscr{D}_{yy}$, otteniamo (dopo la sottrazione)

$$\mathscr{D}_{yy}^{-}=\frac{4\pi w_3}{\zeta_n^2\Delta_1}\operatorname{ch} w_3(x-x'),$$

$$\Delta_1=1-e^{2w_3l}\frac{(\varepsilon_1w_3+w_1)(\varepsilon_2w_3+w_2)}{(\varepsilon_1w_3-w_1)(\varepsilon_2w_3-w_2)}$$

e, utilizzando l'(81,7),

$$\mathscr{D}_{xy}^{-}=\mathscr{D}_{yx}^{-}=-\frac{4\pi iq}{\zeta_n^2\Delta_1}\operatorname{sh} w_3(x-x'),$$

$$\mathscr{D}_{xx}^{-}=-\frac{4\pi q^2}{\zeta_n^2w_3\Delta_1}\operatorname{ch} w_3(x-x').$$

Calcolando ora le funzioni $\mathscr{D}_{ik}^{E}$ e $\mathscr{D}_{ik}^{H}$, trasformandole in seguito secondo l'(81,2) e sostituendo nell'(81,1), otteniamo

$$F(l) = -\frac{T}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty}{}' \int_0^\infty w_3 \left( \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta_1} \right) q\, dq.$$

Infine, passando alla nuova variabile di integrazione $p$, in accordo con $q = \zeta_n \sqrt{p^2 - 1}$, e tornando alle unità comuni, arriviamo all'espressione definitiva per la forza $F$ agente sull'unità d'area di ciascuno dei due corpi divisi da una fessura di larghezza $l$:

$$F(l) = \frac{T}{\pi c^3} \sum_{n=0}^{\infty}{}' \zeta_n^3 \int_1^\infty p^2 \left\{ \left[ \frac{(s_1+p)(s_2+p)}{(s_1-p)(s_2-p)} \exp\left( \frac{2p\zeta_n}{c} l \right) - 1 \right]^{-1} + \right.$$
$$\left. + \left[ \frac{(s_1+p\varepsilon_1)(s_2+p\varepsilon_2)}{(s_1-p\varepsilon_1)(s_2-p\varepsilon_2)} \exp\left( \frac{2p\zeta_n}{c} l \right) - 1 \right]^{-1} \right\} dp, \qquad (81,9)$$

dove

$$s_1 = \sqrt{\varepsilon_1 - 1 + p^2}, \quad s_2 = \sqrt{\varepsilon_2 - 1 + p^2}, \quad \zeta_n = 2\pi n T/\hbar,$$

$\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ sono funzioni della frequenza immaginaria $\omega = i\zeta_n$; ricordiamo a questo proposito che $\varepsilon(i\zeta)$ è una grandezza reale positiva decrescente monotonamente dal suo valore elettrostatico $\varepsilon_0$ per $\zeta = 0$ fino a 1 per $\zeta = \infty$ [1]). I valori positivi di $F$ corrispondono all'attrazione dei corpi. L'espressione integranda in ciascuno degli addendi della somma nell'(81,9) è positiva e per ogni $p$ e $\zeta_n$ dati decresce monotonamente all'aumentare di $l$ [2]). Ne segue che $F > 0$ e $dF/dl < 0$, vale a dire che i corpi (separati da una fessura vuota) si attraggono con una forza decrescente monotonamente all'aumentare della distanza.

La formula generale (81,9) è molto complicata. Tuttavia, la si può semplificare notevolmente in quanto l'influenza della temperatura sulla forza di interazione è di solito assolutamente inessenziale [3]). Infatti, grazie all'esistenza degli esponenti nelle espressioni integrande dell'(81,9) il ruolo principale nella somma spetta soltanto ai termini per i quali $\zeta_n \sim c/l$ o $n \sim c\hbar/lT$. Nel caso $lT/c\hbar \ll 1$

---

[1]) La formula (81,9) è dedotta partendo dall'ipotesi che i due corpi siano isotropi. Perciò la sua applicabilità ai cristalli è legata alla possibilità di trascurare l'anisotropia della loro costante dielettrica. Sebbene nella maggioranza dei casi ciò sia completamente ammissibile, bisogna tener presente che l'anisotropia dei corpi implica, in generale, un effetto ancora più specifico, ossia la comparsa di un momento di forze che fa ruotare i corpi l'uno relativamente all'altro.

[2]) È facile convincersene osservando che per $s = (\varepsilon - 1 + p^2)^{1/2}$ (dove $p \geqslant 1$) si verificano le disuguaglianze $\varepsilon p > s > p$ per $\varepsilon > 1$.

[3]) Parlando dell'influenza della temperatura, astraiamo da quanto è legato alla dipendenza dalla temperatura della costante dielettrica stessa.

rivestono, quindi, importanza gli $n$ grandi per cui nell'(81,9) si può passare dalla sommatoria all'integrazione in $dn = \hbar d\zeta/2\pi T$. In questo caso la temperatura scompare dalla formula e si ottiene il seguente risultato:

$$F(l) = \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \int_0^\infty \int_1^\infty p^2\zeta^3 \left\{ \left[ \frac{(s_1+p)(s_2+p)}{(s_1-p)(s_2-p)} \exp\left(\frac{2p\zeta}{c} l\right) - 1 \right]^{-1} + \right.$$
$$\left. + \left[ \frac{(s_1+p\varepsilon_1)(s_2+p\varepsilon_2)}{(s_1-p\varepsilon_1)(s_2-p\varepsilon_2)} \exp\left(\frac{2p\zeta}{c} l\right) - 1 \right]^{-1} \right\} dp\, d\zeta. \qquad (81,10)$$

In accordo con quanto detto, questa formula è applicabile a distanze $l \ll c\hbar/T$; già a temperatura ambiente ciò fornisce distanze pressappoco fino a $10^{-4}$ cm. La formula (81,10) consente una notevole semplificazione ulteriore nei due casi limite.

## § 82. *Forze di interazione molecolari fra solidi. Casi limite*

Soffermiamoci dapprima sul caso limite di distanze « piccole », con cui si intendono distanze piccole rispetto alle lunghezze d'onda $\lambda_0$ che caratterizzano gli spettri di assorbimento dei corpi in questione. Le temperature di cui si potrebbe trattare per i corpi condensati sono in ogni caso piccole rispetto alle $\hbar\omega_0$ importanti qui (nella parte visibile dello spettro, ad esempio); questa è la ragione per cui la disuguaglianza $Tl/\hbar c \ll 1$ è verificabile a priori.

Grazie all'esistenza del fattore esponenziale ai denominatori dell'espressione integranda, per l'integrazione in $dp$ è importante il dominio in cui $p\zeta l/c \sim 1$. In questo caso $p \gg 1$; perciò nel definire il termine principale nell'integrale si può porre $s_1 \approx s_2 \approx p$. In questa approssimazione il primo termine fra parentesi graffa nell'(81,10) si annulla. Il secondo termine, invece, dopo l'introduzione della variabile di integrazione $x = 2p\zeta l/c$ darà

$$F(l) = \frac{\hbar}{16\pi^2 l^3} \int_0^\infty \int_0^\infty x^2 \left[ \frac{(\varepsilon_1+1)(\varepsilon_2+1)}{(\varepsilon_1-1)(\varepsilon_2-1)} e^x - 1 \right]^{-1} dx\, d\zeta \qquad (82,1)$$

(il limite inferiore d'integrazione su $dx$ deve essere sostituito da zero in questa approssimazione) [1].

---

[1] L'integrale della forma

$$\frac{a}{2} \int_0^\infty \frac{x^2\, dx}{ae^x - 1}$$

In questo caso la forza risulta essere proporzionale al cubo della distanza, il che, fra l'altro, c'era da aspettarselo in accordo con la legge ordinaria delle forze di Van der Waals fra due atomi (si veda più avanti la nota alla pag. 416). Le funzioni $\varepsilon(i\zeta) - 1$ decrescono monotonamente all'aumentare di $\zeta$ e tendono a zero. Pertanto i valori di $\zeta$, a partire da un certo $\zeta \sim \zeta_0$, cessano di dare un contributo essenziale all'integrale; la condizione di $l$ piccolo significa che deve essere $l \ll c/\zeta_0$.

Mostriamo in che modo si può passare dalla formula macroscopica (82,1) all'interazione fra alcuni atomi nel vuoto. A tal fine supponiamo che formalmente i due corpi siano sufficientemente rarefatti. Dal punto di vista macroscopico ciò significa che le loro costanti dielettriche sono vicine a 1, cioè che le differenze $\varepsilon_1 - 1$ ed $\varepsilon_2 - 1$ sono piccole. Allora dall'(82,1) ricaviamo con la precisione richiesta

$$F = \frac{\hbar}{64\pi^2 l^3} \int_0^\infty \int_0^\infty x^2 e^{-x} (\varepsilon_1 - 1)(\varepsilon_2 - 1)\, dx\, d\zeta =$$

$$= \frac{\hbar}{32\pi^2 l^3} \int_0^\infty [\varepsilon_1(i\zeta) - 1][\varepsilon_2(i\zeta) - 1]\, d\zeta.$$

Esprimendo $\varepsilon(i\zeta)$ mediante $\operatorname{Im}\varepsilon(\omega)$, sull'asse reale $\omega$ secondo l' (80,18) otteniamo

$$F = \frac{\hbar}{8\pi^4 l^3} \int\int_0^\infty \int \frac{\omega_1\omega_2 \operatorname{Im}\varepsilon_1(\omega_1) \operatorname{Im}\varepsilon_2(\omega_2)}{(\omega_1^2 + \zeta^2)(\omega_2^2 + \zeta^2)} \times$$

$$\times\, d\zeta\, d\omega_1\, d\omega_2 = \frac{\hbar}{16\pi^3 l^3} \int\int_0^\infty \frac{\operatorname{Im}\varepsilon_1(\omega_1) \operatorname{Im}\varepsilon_2(\omega_2)}{\omega_1 + \omega_2}\, d\omega_1\, d\omega_2. \qquad (82,2)$$

Questa forza corrisponde all'interazione di atomi con energia

$$U(r) = -\frac{3\hbar}{8\pi^4 n_1 n_2 r^6} \int\int \frac{\operatorname{Im}\varepsilon_1(\omega_1) \operatorname{Im}\varepsilon_2(\omega_2)}{\omega_1 + \omega_2}\, d\omega_1\, d\omega_2, \qquad (82,3)$$

---

al variare di $a$ da $\infty$ a 1 cambia poco: da 1 a 1,2. Pertanto è possibile rappresentare con precisione praticamente sufficiente la formula (82,1) come segue:

$$F = \frac{\hbar\bar{\omega}}{8\pi^2 l^3}, \qquad \bar{\omega} = \int_0^\infty \frac{[\varepsilon_1(i\zeta) - 1][\varepsilon_2(i\zeta) - 1]}{[\varepsilon_1(i\zeta) + 1][\varepsilon_2(i\zeta) + 1]}\, d\zeta.$$

La grandezza $\bar{\omega}$ funge da frequenza caratteristica per gli spettri di assorbimento di ambedue i corpi.

dove $r$ è la distanza fra gli atomi; $n_1$, $n_2$ le densità di numeri di atomi in ambedue i corpi [1]). Questa formula coincide con la nota formula quantomeccanica dei London, deducibile mediante la comune teoria delle perturbazioni, applicata all'interazione di dipolo fra due atomi (si veda il problema al § 89 del volume III). Nel confronto si deve tener conto che la parte immaginaria di $\varepsilon(\omega)$ è legata alla densità spettrale delle « forze oscillatorie » $f(\omega)$ dalla relazione

$$\omega \operatorname{Im} \varepsilon(\omega) = \frac{2\pi^2 e^2}{m} n f(\omega)$$

($e$ ed $m$ sono, rispettivamente, la carica e la massa dell'elettrone; si veda VIII, § 62); quanto alle forze oscillatorie, esse si esprimono, come è noto, mediante i quadrati degli elementi matriciali del momento di dipolo degli atomi (si veda III (149,10)).

Passiamo al caso inverso di « grandi » distanze $l \gg \lambda_0$. Ma supporremo, tuttavia, che le distanze non siano tanto grandi da poter violare la disuguaglianza $lT/\hbar c \ll 1$.

Nella formula (81,10) introduciamo di nuovo la nuova variabile di integrazione $x = 2pl\zeta/c$, ma come seconda variabile lasciamo ora $\zeta$, anziché $p$. Allora $\varepsilon_1$ ed $\varepsilon_2$ risultano essere funzioni dell'argomento $i\zeta = ixc/2pl$. Ma, grazie all'apparizione di $e^x$ ai denominatori dell'espressione integranda, sono importanti nell'integrale in $dx$ i valori $x \sim 1$, e poiché $p \gg 1$, l'argomento della funzione $\varepsilon$ per grandi $l$ è vicino a zero in tutto il dominio fondamentale delle variabili. Ne consegue che $\varepsilon_1$ ed $\varepsilon_2$ si possono sostituire semplicemente con i loro valori per $\zeta = 0$, cioè con le costanti dielettriche elettrostatiche $\varepsilon_{10}$, $\varepsilon_{20}$. In tal modo, abbiamo infine

$$\begin{gathered} F = \frac{\hbar c}{32\pi^2 l^4} \int_0^\infty \int_1^\infty \frac{x^3}{p^2} \left\{ \left[ \frac{(s_{10}+p)(s_{20}+p)}{(s_{10}-p)(s_{20}-p)} e^x - 1 \right]^{-1} + \right. \\ \left. + \left[ \frac{(s_{10}+p\varepsilon_{10})(s_{20}+p\varepsilon_{20})}{(s_{10}-p\varepsilon_{10})(s_{20}-p\varepsilon_{20})} e^x - 1 \right]^{-1} \right\} dp\, dx, \\ s_{10} = \sqrt{\varepsilon_{10} - 1 + p^2}, \quad s_{20} = \sqrt{\varepsilon_{20} - 1 + p^2}. \end{gathered} \tag{82,4}$$

La legge di decrescenza della forza con la distanza (come $l^{-4}$) corrisponde nel dato caso alla legge di decrescenza delle forze di Van der Waals fra due atomi tenuto conto del ritardo (si veda più avanti).

---

[1]) Se l'energia potenziale dell'interazione degli atomi 1 e 2 è $U(r) = -ar^{-6}$, l'energia totale delle interazioni a coppia di tutti gli atomi nei due semispazi separati da una fessura di larghezza $l$ vale $U_{\text{tot}} = -a\pi n_1 n_2/12l^2$, mentre la forza $F = dU_{\text{tot}}/dl = a\pi n_1 n_2/6l^3$. In ciò risiede la corrispondenza fra le formule (82,2) e (82,3).

La formula (82,4) si riduce a un'espressione molto semplice nel caso in cui i due corpi sono metalli. Nei metalli la funzione $\varepsilon(i\zeta) \to \infty$ per $\zeta \to 0$; pertanto si deve supporre per essi $\varepsilon_0 = \infty$. Ponendo $\varepsilon_{10} = \varepsilon_{20} = \infty$, otteniamo

$$F = \frac{\hbar c}{16\pi^2 l^4} \int_0^\infty \int_1^\infty \frac{x^3 dp\, dx}{p^2 (e^x - 1)} = \frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{l^4} \tag{82,5}$$

(*H. B. G. Casimir*, 1948). Questa forza in generale è indipendente dalla specie di metallo (proprietà che non si verifica a piccole distanze quando la forza di interazione dipende dal comportamento della funzione $\varepsilon(i\zeta)$ per tutti i valori di $\zeta$ e non soltanto per $\zeta = 0$).

La fig. 18 rappresenta il grafico della funzione $\varphi_{dd}(\varepsilon_0)$ che definisce la forza d'attrazione fra due dielettrici identici ($\varepsilon_{10} = \varepsilon_{20} \equiv \varepsilon_0$); la formula (82,4) è rappresentata nel seguente modo:

$$F = \frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{l^4} \left( \frac{\varepsilon_0 - 1}{\varepsilon_0 + 1} \right)^2 \varphi_{dd}(\varepsilon_0). \tag{82,6}$$

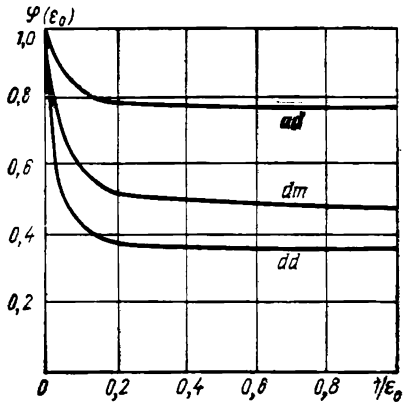



Fig. 18

La stessa figura dà il grafico della funzione $\varphi_{dm}(\varepsilon_0)$ che definisce la forza d'attrazione fra un dielettrico e un metallo ($\varepsilon_{10} = \varepsilon_0$, $\varepsilon_{20} = \infty$) secondo la formula [1])

$$F = \frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{l^4} \frac{\varepsilon_0 - 1}{\varepsilon_0 + 1} \varphi_{dm}(\varepsilon_0). \tag{82,7}$$

Nell'(82,4) effettuiamo il passaggio all'interazione fra singoli atomi, così come abbiamo fatto sopra nella formula (82,1). Per $\varepsilon_0 - 1$ piccole abbiamo

$$s_0 - p \approx \frac{\varepsilon_0 - 1}{2p}, \quad s_0 - p\varepsilon_0 \approx (\varepsilon_0 - 1)\left( -p + \frac{1}{2p} \right)$$

---

[1]) Per $\varepsilon_0 \to 1$ le funzioni $\varphi_{dd}$ e $\varphi_{dm}$ tendono rispettivamente ai valori 0,35 e 0,46 corrispondenti alle leggi limite (82,8) e (1) del problema nel presente paragrafo. Per $\varepsilon_0 \to \infty$ ambedue le funzioni tendono al valore 1 corrispondente alla formula (82,5).

e l'integrale (82,4) diventa

$$F=\frac{\hbar c}{32\pi^2 l^4}(\varepsilon_{10}-1)(\varepsilon_{20}-1)\int_0^\infty x^3 e^{-x}\,dx\int_1^\infty \frac{1-2p^2+2p^4}{8p^6}\,dp,$$

da cui

$$F=\frac{\hbar c}{l^4}\frac{23}{640\pi^2}(\varepsilon_{10}-1)(\varepsilon_{20}-1). \tag{82,8}$$

Questa forza corrisponde all'interazione di due atomi con energia

$$U(r)=-\frac{23\hbar c}{4\pi r^7}\alpha_1\alpha_2 \tag{82,9}$$

dove $\alpha_1$, $\alpha_2$ sono le polarizzabilità statistiche degli atomi ($\varepsilon_0 = 1 + 4\pi n\alpha$). La formula (82,9) coincide con il risultato del calcolo, secondo l'elettrodinamica quantistica, dell'attrazione fra due atomi, a distanze sufficientemente grandi quando diventano notevoli gli effetti di ritardo (si veda IV, § 85).

Infine, consideriamo distanze così grandi che sia verificata la disuguaglianza $lT/\hbar c \gg 1$, inversa di quella che occorreva per poter trascurare l'influenza della temperatura. In questo caso, fra tutti i termini della somma nell'(81,9) si deve conservare soltanto il primo. Tuttavia non si può porre in esso $n = 0$ poiché compare un'indeterminazione (il fattore $\zeta_n^3$ si annulla, ma l'integrale in $dp$ diverge). Si può superare questa difficoltà introducendo dapprima la nuova variabile di integrazione $x = 2p\zeta_n l/c$ in luogo di $p$ (per cui il fattore $\zeta_n^3$ scompare). Ponendo in seguito $\zeta_n = 0$, otteniamo

$$F=\frac{T}{16\pi l^3}\int_0^\infty x^2\left[\frac{(\varepsilon_{10}+1)(\varepsilon_{20}+1)}{(\varepsilon_{10}-1)(\varepsilon_{20}-1)}(e^x-1)\right]^{-1}dx. \tag{82,10}$$

Quindi, a distanze sufficientemente grandi la decrescenza della forza d'attrazione si rallenta e segue di nuovo la legge $l^{-3}$, ma con un coefficiente dipendente dalla temperatura (tutti i termini successivi della somma nell'(81,9) decrescono esponenzialmente con $l$). La condizione $lT/\hbar c \gg 1$ è di fatto la condizione di classicità ($\hbar\omega \ll T$, dove $\omega \sim c/l$). Quindi, è naturale che l'espressione (82,10) non contenga $\hbar$ [1]).

---

[1]) Le formule ottenute nei §§ 81, 82 si possono generalizzare in modo tale che esse includano in sé il caso di una fessura fra solidi riempita di liquido e il caso di una pellicola liquida sottile su una superficie solida; si veda *I. E. Dzjalošinskij, E. M. Lifšits, L. P. Pitaevskij*, UFN (Successi delle scienze fisiche) **78**, 381, 1961; Advances in Physics **10**, 165, 1961.

PROBLEMA

Trovare la legge di interazione di un atomo con una parete metallica a « grandi » distanze.

*Soluzione.* Si può trovare l'interazione fra un singolo atomo e un corpo condensato considerando soltanto uno dei corpi (che sia il corpo *2*) come mezzo rarefatto. Ritenendo $\varepsilon_{20} - 1$ piccola e ponendo $\varepsilon_{10} = \infty$, otteniamo dall'(82,4)

$$F = \frac{\hbar c(\varepsilon_{20}-1)}{32\pi^2 l^4} \int_0^\infty x^3 e^{-x}\, dx \int_{l^{-1}}^\infty \frac{dp}{2p^2} = \frac{3\hbar c(\varepsilon_{20}-1)}{32\pi^2 l^4} \tag{1}$$

Se l'energia dell'interazione fra l'atomo e la parete è $U = -aL^{-4}$ (essendo $L$ la distanza fra l'atomo e la parete), allora l'energia dell'interazione degli atomi nel semispazio separato dalla parete dalla fessura $l$ è $U_{\text{tot}} = -an/3l^3$ e la forza $F = dU_{\text{tot}}/dl = an/l^4$. In accordo con il valore così ottenuto, $F$ corrisponde all'attrazione di un atomo singolo verso la parete con energia

$$U(L) = -3\alpha_2 \hbar c/8\pi L^4 \tag{2}$$

(*H. B. G. Casimir, D. Polder*, 1948).

Nel caso di interazione di un atomo con una parete dielettrica si ottiene con lo stesso metodo il seguente risultato:

$$U(L) = -\frac{3\hbar c\alpha_2}{8\pi L^4}\,\frac{\varepsilon_{10}-1}{\varepsilon_{10}+1}\,\varphi_{\text{ad}}(\varepsilon_{10}),$$

dove la funzione $\varphi_{\text{ad}}$ è rappresentata graficamente nella fig. 18. Per $\varepsilon_{10} \to 1$ essa tende al valore $23/30 = 0{,}77$ corrispondente alla formula (82,8).

## § 83. *Andamento asintotico della funzione di correlazione in un liquido*

Le fluttuazioni elettromagnetiche ad onde lunghe implicano anche alcune proprietà specifiche della funzione di correlazione delle fluttuazioni di densità in un liquido omogeneo.

Ricordiamo (si veda V, § 116) che la funzione di correlazione $\nu(r)$ è definita mediante la media del prodotto delle fluttuazioni di densità del numero di particelle $n$ in due punti dello spazio nel seguente modo:

$$\langle \delta n(\mathbf{r}_1)\, \delta n(\mathbf{r}_2)\rangle = \bar{n}\delta(\mathbf{r}) + \bar{n}\nu(r), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \tag{83,1}$$

La funzione di correlazione è legata all'interazione fra le particelle e il suo andamento asintotico alle grandi distanze è definito dalla parte di Van der Waals di questa interazione agente a grandi distanze. Pertanto $\nu(r)$, come le forze di Van der Waals, decresce con la distanza secondo una legge potenziale (*J. Enderby, T. Gaskell, N. H. March*, 1965).

Ciò incide, ovviamente, anche sulle proprietà delle componenti di Fourier della funzione di correlazione $\nu(\mathbf{k}) \equiv \nu(k)$. Se fra le particelle del liquido agissero le sole forze con raggio d'azione dell'ordine delle dimensioni atomiche $a$, la funzione $\nu(r)$ decrescerebbe

con la distanza secondo una legge esponenziale, con esponente $\sim r/a$ [1]. Nei termini delle componenti di Fourier ciò significa che $\nu(k)$ sarebbe una funzione regolare di $ka$, sviluppabile per $ka \ll 1$ in potenze pari di $ka$. Quanto alle forze agenti alle grandi distanze, esse implicano la comparsa in $\nu(k)$ di un termine (indichiamolo con $\nu_1(k)$) che varia notevolmente già nel dominio $k \sim 1/\lambda_0$ (e non $k \sim 1/a$), dove $\lambda_0$ sono le lunghezze d'onda caratteristiche nello spettro del liquido ($\lambda_0 \gg a$). Nel dominio $ka \ll 1$ il parametro $k\lambda_0$ può essere sia piccolo che grande; la funzione $\nu_1(k)$ ha in questo dominio carattere singolare.

Per calcolare la funzione di correlazione sfruttiamone il legame con la derivata variazionale seconda dell'energia libera del corpo rispetto alla densità. Per definizione, questa derivata è la funzione $\varphi(r)$ che figura nell'espressione

$$\delta F = \frac{1}{2} \int \varphi(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)\, \delta n(\mathbf{r}_1)\, \delta n(\mathbf{r}_2)\, d^3x_1\, d^3x_2, \tag{83,2}$$

che dà la variazione dell'energia libera dovuta alle fluttuazioni della densità (per una data temperatura). La componente di Fourier $\varphi(\mathbf{k}) \equiv \varphi(k)$ di questa funzione è legata alla funzione cercata $\nu(k)$ dalla relazione

$$\nu(k) = \frac{T}{\bar{n}\varphi(k)} - 1 \tag{83,3}$$

(si veda V (116,14)). Sottolineiamo che questa formula suppone la classicità delle fluttuazioni per cui deve essere $\hbar\omega \ll T$, dove $\omega$ è la frequenza delle oscillazioni con vettore d'onda $k$. Ponendo $\omega \sim ku$ (dove $u$ è la velocità del suono nel liquido), otteniamo la condizione

$$\hbar k u \ll T \tag{83,4}$$

corrispondente alle distanze $r \gg \hbar u/T$.

La parte « regolare » della funzione $\varphi(k)$, legata alle forze a corto raggio d'azione, è sviluppabile in potenze di $k$; limitandoci (per $ka \ll 1$) al primo termine dello sviluppo e indicandolo con $b$, scriviamo

$$\varphi(k) \approx b + \varphi_1(k), \tag{83,5}$$

dove $\varphi_1(k)$ è la parte « singolare » della funzione che ci interessa [2].

---

[1]) Si tratta di un liquido a temperature $T \sim \Theta$ (dove $\Theta \sim \hbar u/a$ è la « temperatura di Debye » del liquido) e lontano dal punto critico. Nell'intorno del punto critico il raggio di correlazione cresce indefinitamente (si veda V, §§ 152, 153). Esso cresce anche a temperature basse e per $T \ll \Theta$ risulta essere dell'ordine di grandezza di $\hbar u/T$ (si veda più avanti il § 87).

[2]) La costante $b$ si esprime mediante le grandezze termodinamiche del liquido secondo la formula $b = \frac{1}{\bar{n}} \left(\frac{\partial P}{\partial \bar{n}}\right)_T$ (si veda V, § 152).

Siccome le forze di Van der Waals sono relativamente deboli, $\varphi_1(k) \ll b$ e pertanto il risultato della sostituzione dell'(83,5) nell'(83,3) si può scrivere nella forma

$$\nu(k) = \frac{T}{\bar{n}b} - 1 - \frac{T}{\bar{n}b^2}\varphi_1(k). \tag{83,6}$$

Essendo lineare il legame fra $\nu(k)$ e $\varphi_1(k)$, la funzione $\nu(r)$ a distanze grandi è semplicemente

$$\nu(r) = -\frac{T}{\bar{n}b^2}\varphi_1(r). \tag{83,7}$$

Già al primo termine (indipendente da $k$) nell'(83,6) corrisponde una funzione delle coordinate di forma costante$\cdot\delta(\mathbf{r})$ legata alle forze ad azione ravvicinata (a prescindere dal loro raggio d'azione).

Per definire $\varphi_1(r)$ partiamo dalla formula (80,11) che esprime la variazione dell'energia libera. Scrivendo in essa

$$\delta\varepsilon(i\zeta_s, \mathbf{r}) = \frac{\partial\varepsilon(i\zeta_s)}{\partial\bar{n}}\delta n(\mathbf{r}) \tag{83,8}$$

vediamo che l'espressione

$$-\frac{T}{4\pi\hbar c^2}\sum_{s=0}^{\infty}{}' \zeta_s^2 \mathscr{D}_{ll}(\zeta_s; \mathbf{r}, \mathbf{r})\frac{\partial\varepsilon(i\zeta_s)}{\partial\bar{n}}$$

rappresenta la derivata variazionale prima dell'energia libera rispetto alla densità. Per la derivata seconda occorre, a sua volta, far variare questa espressione, cioè trovare [1])

$$-\frac{T}{4\pi\hbar c^2}\sum_{s=0}^{\infty}{}' \zeta_s^2 \delta\mathscr{D}_{ll}(\zeta_s; \mathbf{r}, \mathbf{r})\frac{\partial\varepsilon(i\zeta_s)}{\partial\bar{n}}. \tag{83,9}$$

La funzione $\mathscr{D}$ stessa verifica l'equazione (79,8),

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l} - \delta_{il}\Delta + \frac{\zeta_s^2}{c^2}(i\zeta_s, \mathbf{r})\delta_{il}\right]\mathscr{D}_{lk}(\zeta_s; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \\ = -4\pi\hbar\delta_{ik}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{83,10}$$

la cui variazione fornisce la seguente equazione:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l} - \delta_{il}\Delta + \frac{\zeta_s^2}{c^2}\varepsilon(i\zeta_s)\delta_{il}\right]\delta\mathscr{D}_{lk}(\zeta_s; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \\ = -\frac{\zeta_s^2}{c^2}\delta\varepsilon(i\zeta_s, \mathbf{r})\mathscr{D}_{ik}(\zeta_s; \mathbf{r}, \mathbf{r}'). \tag{83,11}$$

---

[1]) Varia soltanto la funzione $\mathscr{D}_{ll}$. La variazione della funzione $\varepsilon$ condurrebbe alla comparsa di un termine della forma costante$\cdot\delta(\mathbf{r})$ nella $\varphi(r)$, che non ha niente a che fare con le forze agenti alle grandi distanze.

Si può scrivere immediatamente la soluzione dell'equazione (83,11) osservando che, in virtù dell'(83,10), la funzione « imperturbata » $\mathscr{D}_{lk}$ è la funzione di Green di questa equazione; perciò

$$\delta\mathscr{D}_{lk}(\zeta_s; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\zeta_s^2}{4\pi\hbar c^2}\int \delta\varepsilon(i\zeta_s, \mathbf{r}'')\,\mathscr{D}_{lk}(\zeta_s; \mathbf{r}'', \mathbf{r}')\,\mathscr{D}_{li}(\zeta_s; \mathbf{r}'', \mathbf{r})\,d^3x''$$

(qui si è tenuto presente anche che $\mathscr{D}_{il}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') = \mathscr{D}_{li}(\mathbf{r}'', \mathbf{r})$). Infine, sostituendo in essa l'(83,8) e poi l'espressione così ottenuta nell'(83,9), otteniamo la derivata variazionale seconda

$$\varphi_1(r) = -\frac{T}{(4\pi\hbar c^2)^2}\sum_{s=0}^{\infty}{}' \zeta_s^4\left[\frac{\partial\varepsilon(i\zeta_s)}{\partial\bar{n}}\right]^2 \mathscr{D}_{lm}^2(\zeta_s; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \qquad (83,12)$$

($r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$). Questa formula assieme all'(83,7) dà l'espressione cercata della funzione di correlazione $\nu(r)$ per $r \gg \hbar u/T$ (*M. P. Kemoklidze, L. P. Pitaevskij*, 1970).

La condizione (83,4) fatta prima per i vettori d'onda è equivalente a quella $r \gg \hbar u/T$ per le distanze. Se contemporaneamente a questa condizione si limita il dominio dei valori di $r$ anche superiormente, e cioè

$$\hbar c/T \gg r \gg \hbar u/T, \qquad (83,13)$$

allora nella somma saranno essenziali i valori grandi $s$ e la sommatoria sulle « frequenze » discrete $\zeta_s = 2\pi Ts/\hbar$ si può sostituire con l'integrazione in $ds = \hbar d\zeta/2\pi T$:

$$\nu(r) = \frac{T}{\bar{n}b^2\hbar c^4}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varepsilon(i\zeta)}{\partial\bar{n}}\right]^2 \zeta^4\mathscr{D}_{lm}^2(\zeta; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\frac{d\zeta}{2\pi}. \qquad (83,14)$$

La funzione $\mathscr{D}_{lm}$ si ottiene dalla (77,6) per sostituzione $\omega \to i\zeta$. Effettuando la derivazione ed elevando al quadrato, otteniamo

$$\mathscr{D}_{lm}^2 = \frac{2\hbar^2}{r^2}e^{-2w}\left(1 + \frac{2}{w} + \frac{5}{w^2} + \frac{6}{w^3} + \frac{3}{w^4}\right),$$
$$w = r\zeta\sqrt{\varepsilon(i\zeta)}/c. \qquad (83,15)$$

La sostituzione dell'(83,15) nell'(83,14) conduce a un'espressione piuttosto complicata che, però, si rende più semplice in due casi limiti.

Nel caso di distanze « piccole » ($r \ll \lambda_0$, cfr. il § 81) nell'integrale ha importanza il dominio $\zeta \sim c/\lambda_0$; in questo caso $r\zeta/c \ll 1$ in modo che nell'(83,15) si può sostituire 1 al fattore esponenziale e conservare nelle parentesi il solo ultimo termine. Allora troviamo

$$\nu(r) = \frac{A}{r^6}, \quad A = \frac{3\hbar T}{16\pi^3\bar{n}b^2}\int_0^{\infty}\left[\frac{\partial\varepsilon(i\zeta)}{\partial\bar{n}}\right]^2\frac{d\zeta}{\varepsilon^2(i\zeta)}, \quad r \ll \lambda_0. \qquad (83,16)$$

L'immagine di Fourier di questa funzione è [1]

$$\nu(k) = \frac{\pi^2}{12} A k^3, \quad k\lambda_0 \gg 1. \tag{83,17}$$

Nel caso inverso di distanze « grandi » ($r \gg \lambda_0$) nell'integrale ha importanza il dominio $\zeta \sim c/r \ll c/\lambda_0 \sim \omega_0$. Pertanto è possibile sostituire $\varepsilon(i\zeta)$ con il suo valore elettrostatico $\varepsilon_0$ e portare $(\partial\varepsilon_0/\partial n)^2$ fuori dal segno di integrazione nell'(83,14). Dopo questa operazione l'integrazione procede in modo elementare (fra l'altro, tutti i termini dell'(83,15) danno un contributo dello stesso ordine di grandezza). Come risultato abbiamo

$$\nu(r) = \frac{B}{r^7}, \quad B = \frac{23\hbar c T}{64\pi^3 \varepsilon_0^{3/2} \bar{n} b^2} \left(\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial n}\right)^2, \quad r \gg \lambda_0. \tag{83,18}$$

L'immagine di Fourier di questa funzione è

$$\nu(k) = -\frac{\pi}{30} B k^4 \ln k\lambda_0, \quad k\lambda_0 \ll 1. \tag{83,19}$$

## § 84. *Espressione operatoriale per la costante dielettrica*

In questo paragrafo otterremo una rappresentazione utile della costante dielettrica di un mezzo mediante il commutatore dell'operatore di densità di cariche (*Ph. Noziéres, D. Pines*, 1958). Questa formula è analoga a quella di Cubo e tiene conto delle caratteristiche del campo elettromagnetico.

Consideriamo un mezzo omogeneo che abbia dispersione sia temporale che spaziale della costante dielettrica. Ciò vuol dire che l'induzione $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ dipende dai valori dell'intensità $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ non soltanto agli istanti precedenti, ma anche negli altri punti dello spazio. Questa dipendenza può essere rappresentata nella forma generale seguente:

$$D_i(t, \mathbf{r}) = E_i(t, \mathbf{r}) + \int_0^\infty \int f_{ik}(\tau, \mathbf{r}') E_k(t-\tau, \mathbf{r}-\mathbf{r}') \, d^3x' d\tau. \tag{84,1}$$

---

[1]) Un'integrazione immediata in coordinate sferiche nello spazio $\mathbf{k}$ consente di ottenere

$$I_\nu \equiv \lim_{\lambda=+0} \int e^{i\mathbf{kr}-\lambda k_z} \nu \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = -\frac{\Gamma(\nu+2)\,\mathrm{sen}\,(\pi\nu/2)}{2\pi^2 r^{\nu+3}}.$$

L'integrale necessario per verificare la formula (83,17) è $I_3$. Quello, invece, che aiuta a verificare la formula (83,19) si calcola come $dI_\nu/d\nu$ per $\nu = 4$.

Per un campo monocromatico in cui $\mathbf{E}$, $\mathbf{D} \sim \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]$, questo legame si riduce a

$$D_i = \varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k}) E_k, \tag{84,2}$$

dove

$$\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ik} + \int_0^\infty \int f_{ik}(\tau, \mathbf{r}') e^{i(\omega\tau - \mathbf{kr}')} d^3x' \, d\tau. \tag{84,3}$$

Ci limiteremo al caso in cui il mezzo è non soltanto omogeneo, ma anche isotropo e privo di attività ottica naturale. Allora la costante dielettrica resta un tensore, ma formato con il solo vettore $\mathbf{k}$. La forma generale di questo tensore è

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_l(\omega, \mathbf{k}) \frac{k_i k_k}{k^2} + \varepsilon_t(\omega, \mathbf{k}) \left( \delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{k^2} \right). \tag{84,4}$$

Le funzioni scalari $\varepsilon_l$ ed $\varepsilon_t$ si chiamano rispettivamente *permeabilità elettriche longitudinale* e *trasversale*. Se il campo $\mathbf{E}$ è potenziale, cioè $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, allora nel caso di onda piana $\mathbf{E}$ sarà parallelo al vettore d'onda ($\mathbf{E} = -i\mathbf{k}\varphi$) e si avrà $\mathbf{D} = \varepsilon_l \mathbf{E}$. Se, invece, il campo è solenoidale (div $\mathbf{E} = i\mathbf{kE} = 0$), allora $\mathbf{E}$ sarà perpendicolare al vettore e si avrà $\mathbf{D} = \varepsilon_t \mathbf{E}$.

Ricordiamo (si veda VIII, § 83) che per questa descrizione delle proprietà di un mezzo non ha senso la distinzione della media della densità microscopica di corrente $\overline{\rho\mathbf{v}}$ (essendo $\rho$ la densità delle cariche) in due parti, $\partial\mathbf{P}/\partial t$ e $c$ rot $\mathbf{M}$, dove $\mathbf{P}$ è la polarizzazione elettrica e $\mathbf{M}$ la magnetizzazione del mezzo. In altre parole, le equazioni di Maxwell si scrivono nella forma

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

senza introdurvi neanche il vettore $\mathbf{H}$ (accanto all'induzione magnetica $\mathbf{B}$ che è l'intensità microscopica media del campo magnetico). Tutti i termini che compaiono in seguito all'operazione di media delle correnti microscopiche sono supposti inclusi nella definizione $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$, $\overline{\rho\mathbf{v}} = \partial\mathbf{P}/\partial t$.

Nelle applicazioni presenta grande interesse la permeabilità longitudinale, per la quale dedurremo una espressione operatoriale. Questa si ottiene analizzando la reazione del sistema a un campo elettrico potenziale $\mathbf{E}_{\text{est}} = -\nabla\varphi_{\text{est}}$ collaterale (cioè creato da sorgenti esterne rispetto al sistema).

L'operatore di interazione del sistema con questo campo si scrive come segue:

$$\hat{V} = \int \hat{\rho}(t, \mathbf{r}) \varphi_{\text{est}}(t, \mathbf{r}) \, d^3x, \tag{84,5}$$

dove $\hat{\rho}(t, \mathbf{r})$ è l'operatore di densità di carica nel sistema. Confrontando questa espressione con la formula generale (75,8) e considerando $\varphi_{\text{est}}$ come « forza generalizzata » $f$, troviamo immediatamente in base alle formule (75,9-11) le componenti di Fourier rispetto al tempo della densità media di carica

$$\bar{\rho}_\omega(\mathbf{r}) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^\infty\int e^{i\omega t}\langle\hat{\rho}(t, \mathbf{r})\hat{\rho}(0, \mathbf{r}') - \hat{\rho}(0, \mathbf{r}')\hat{\rho}(t, \mathbf{r})\rangle\varphi_\omega^{(\text{est})}(\mathbf{r}')\, d^3x'\, dt.$$

Passando qui anche alle componenti di Fourier rispetto allo spazio e tenendo presente che, in virtù dell'omogeneità del sistema, la media del commutatore dipende unicamente dalla differenza $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, otteniamo

$$\bar{\rho}_{\omega\mathbf{k}} = \alpha(\omega, \mathbf{k})\,\varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(\text{est})}, \tag{84,6}$$

dove

$$\alpha(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^\infty\int e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}\langle\hat{\rho}(t, \mathbf{r})\hat{\rho}(0, 0) - \\ - \hat{\rho}(0, 0)\hat{\rho}(t, \mathbf{r})\rangle\, d^3x\, dt. \tag{84,7}$$

La densità media delle cariche è legata al vettore di polarizzazione del mezzo dalla relazione $\bar{\rho} = -\operatorname{div}\mathbf{P}$ (si veda VIII, § 6). Ne segue che le componenti di Fourier sono

$$\bar{\rho}_{\omega\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\mathbf{P}_{\omega\mathbf{k}} = -i\frac{\varepsilon_l - 1}{4\pi}\mathbf{k}\mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}}.$$

D'altra parte, $\Delta\varphi_{\text{est}} = -4\pi\rho_{\text{est}}$, dove $\rho_{\text{est}}$ è la densità delle cariche che creano il campo collaterale; l'induzione $\mathbf{D}$, invece, è legata a questa densità dall'equazione $\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{est}}$. Da queste due equazioni ricaviamo

$$\varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(\text{est})} = \frac{4\pi}{k^2}\rho_{\omega\mathbf{k}}^{(\text{est})} = \frac{i\varepsilon_l}{k^2}\mathbf{k}\mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}}.$$

Infine, sostituendo queste espressioni nell'(84,6), otteniamo l'espressione cercata della permeabilità dielettrica longitudinale

$$\frac{1}{\varepsilon_l(\omega, \mathbf{k})} = 1 + \frac{4\pi}{k^2}\alpha(\omega, \mathbf{k}). \tag{84,8}$$

Con $\hat{\rho}(t, \mathbf{r})$ nell'(84,7) si deve intendere, a rigore, l'operatore di densità delle cariche di tutte le particelle del sistema: elettroni e nuclei. Tuttavia, in tutto l'intervallo essenziale dei valori di $\omega$ e $\mathbf{k}$ sono di solito soprattutto gli elettroni a contribuire alla permeabi-

lità; pertanto con $\hat{\rho}$ si può intendere $e(\hat{n} - \bar{n})$, dove $\hat{n}$ è l'operatore di densità elettronica e $\bar{n}$ la sua media.

Le formule (84,7-8) si possono trasformare ancora esprimendole mediante gli elementi matriciali delle componenti di Fourier dell'operatore $\hat{\rho}$. A tal fine riscriviamo preliminarmente l'(84,7) nella forma

$$\alpha(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{i}{\hbar V} \int_0^\infty e^{i\omega t} \langle \hat{\rho}_{\mathbf{k}}(t)\, \hat{\rho}_{-\mathbf{k}}(0) - \hat{\rho}_{-\mathbf{k}}(0)\, \hat{\rho}_{\mathbf{k}}(t) \rangle\, dt \qquad (84,9)$$

(essendo $V$ il volume del sistema). Gli elementi matriciali dell'operatore di Heisenberg $\hat{\rho}_{\mathbf{k}}(t)$ si esprimono mediante gli elementi matriciali dell'operatore di Schrödinger come segue:

$$(\rho_{\mathbf{k}}(t))_{mn} = e^{i\omega_{mn} t} (\rho_{\mathbf{k}})_{mn}.$$

Sviluppando il prodotto di operatori secondo la regola di moltiplicazione tra matrici e integrando secondo la (31,21), otteniamo infine

$$\frac{1}{\varepsilon_l(\omega, \mathbf{k})} = 1 + \frac{4\pi}{\hbar k^2 V} \sum_n |(\rho_{\mathbf{k}})_{n0}|^2 \left\{ \frac{1}{\omega - \omega_{n0} + i0} - \frac{1}{\omega + \omega_{n0} + i0} \right\}, \qquad (84,10)$$

dove l'indice 0 si riferisce al dato stato, per il quale si cerca la permeabilità dielettrica.

## § 85. *Plasma degenere*

Consideriamo un plasma completamente ionizzato, in cui gli ioni formano un gas classico (di Boltzmann), mentre la componente elettronica è già degenere. Per questo stato la temperatura deve soddisfare le condizioni

$$\mu_i \ll T \lesssim \mu_e,$$

cioè

$$\hbar^2 n^{2/3}/m_i \ll T \lesssim \hbar^2 n^{2/3}/m_e \qquad (85,1)$$

($\mu_e$, $\mu_i$ sono i potenziali chimici degli elettroni e degli ioni nel plasma; $m_e$, $m_i$ le loro masse; $n$ la densità del numero di particelle; nelle stime non si fa distinzione fra $n_e$ e $n_i$). Al tempo stesso supporremo che il plasma sia solo debolmente non perfetto. Allora l'energia di interazione coulombiana fra due particelle distanti l'una dall'altra $l \sim n^{-1/3}$ deve essere piccola rispetto alla loro energia cinetica media $\varepsilon$. Per gli ioni $\varepsilon \sim T$ e per gli elettroni $\varepsilon \sim \mu_e \sim n^{2/3}\hbar^2/m_e$. Di qui ricaviamo le condizioni

$$m_e e^2/\hbar^2 \ll n^{1/3} \ll T/e^2. \qquad (85,2)$$

Al § 80 del volume V è stato mostrato che per queste ipotesi la sorgente principale di correzioni alle grandezze termodinamiche del plasma (rispetto a valori per un gas perfetto) è l'interazione di scambio fra gli elettroni; l'energia di questa interazione (riferita all'unità di volume del plasma) risulta valere $\sim e^2 n^{4/3}$. La correzione di correlazione (che è fondamentale nel plasma classico) nel plasma degenere è, invece, piccola rispetto a quella di scambio, nel rapporto di $\eta^{1/2}$, dove $\eta = m_e e^2/\hbar^2 n^{1/3} \ll 1$. Cionondimeno, il suo calcolo per il plasma degenere presenta un interesse metodologico e fornisce un'illustrazione istruttiva di applicazione della tecnica dei diagrammi.

L'operatore di interazione coulombiana fra le particelle del plasma si scrive nella forma

$$\hat{V} = \frac{e^2}{2} \sum_{a,\,b} \int \hat{\Psi}^{a+}_{\alpha\alpha} \hat{\Psi}'^{+}_{b\beta} \frac{z_a z_b}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \hat{\Psi}'_{b\beta} \hat{\Psi}_{a\alpha}\, d^3x\, d^3x', \qquad (85,3)$$

dove gli indici $a$, $b$ enumerano le diverse specie di particelle (elettroni e le specie di ioni); $z_a e$ è la carica delle particelle (per gli elettroni $z_e = -1$). Considerando gli operatori $\psi$ nella rappresentazione di Matsubara, otteniamo così anche l'operatore di interazione in questa rappresentazione. La tecnica dei diagrammi per il calcolo della media $\langle \hat{V} \rangle$ (secondo la distribuzione di Gibbs) si costruisce in seguito al solito modo con il passaggio alla rappresentazione dell'interazione per gli operatori di Matsubara; come risultato si ottiene una serie della teoria delle perturbazioni che è lo sviluppo di $\langle \hat{V} \rangle$ in potenze di $e^2$.

L'espressione (85,3) non contiene variabili « libere » (sulle quali non si sarebbe integrato). Nella tecnica dei diagrammi questa circostanza è espressa nel seguente modo: i termini della serie della teoria delle perturbazioni per $\langle V \rangle$ sono rappresentati da diagrammi senza estremità libere. Conveniamo di mettere in corrispondenza alle linee tratteggiate di questi diagrammi (con i quadrimpulsi $Q = (\zeta_s, \mathbf{q})$) i fattori [1])

$$-\varphi(\mathbf{q}) = -\frac{4\pi}{q^2} \qquad (85,4)$$

(non dipendenti da $\zeta_s$) cioè la componente di Fourier cambiata di segno del potenziale $\varphi(\mathbf{r})$ del campo della carica unitaria. Alle curve continue deve essere attribuito (insieme con il quadrimpulso $P = (\zeta_s, \mathbf{p})$) anche l'indice $a$ che distingue le varie specie di particelle;

---

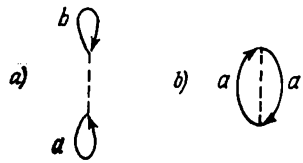
[1]) In seguito poniamo in questo paragrafo $\hbar = 1$, $c = 1$ mentre $e$ esprime la carica elementare ($e > 0$).

a ognuna di queste curve si mette in corrispondenza il fattore $-\mathcal{G}^{(0)}_{\alpha\alpha\beta}(P)$, ossia la funzione di Green cambiata di segno delle particelle libere $a$. Tutte le curve continue del diagramma formano in questo caso dei cappi chiusi, ciascuno dei quali contiene « anelli » con indici $a$ identici. A ogni vertice del diagramma, ossia al punto di intersezione della curva tratteggiata con quelle continue della specie $a$, si mette in corrispondenza il fattore $z_a e$. Ogni cappio di fermioni fornisce un fattore complementare $(-1)$. I diagrammi costruiti secondo queste regole danno i termini dello sviluppo della grandezza

$$-\frac{2}{V}\langle\hat{V}\rangle \tag{85,5}$$

Il fattore $V$ a denominatore rappresenta il volume del sistema; questo fattore è dovuto al fatto che l'espressione integranda in ciascun termine della serie dipende unicamente dalla differenza delle coordinate, e perciò una delle integrazioni in $d^3x$ dà semplicemente il volume $V$. Il segno negativo nell'(85,5) è il risultato della definizione delle linee tratteggiate secondo la regola (85,4), cioè con il segno negativo davanti a $\varphi(\mathbf{q})$. Il fattore 2 è comparso in seguito al trasporto del fattore 1/2 dell'(85,3) a primo membro dell'uguaglianza.

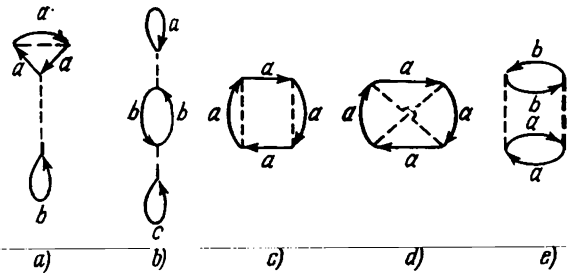
La teoria delle perturbazioni del primo ordine contiene diagrammi di due tipi:




(85,6)

con tutti gli $a$ e $b$ possibili. Diagrammi del tipo (85,6a) si ottengono per convoluzione di operatori $\psi$ considerati in punti uguali dello spazio. Questi diagrammi corrispondono all'interazione coulombiana diretta delle particelle $a$ e $b$, distribuite uniformemente nello spazio: i contributi di questi diagrammi si elidono mutuamente (sommando su tutte le coppie $a$, $b$) essendo il plasma elettricamente neutro. Diagrammi del tipo (85,6b) si ottengono, invece, per convoluzioni di operatori $\psi$ di argomenti distinti e corrispondono all'interazione di scambio delle particelle di una data specie $a$. Il calcolo di questo diagramma conduce ai risultati già ottenuti nel § 80 del volume V.

Nell'ordine che segue compaiono diagrammi dei tipi seguenti:

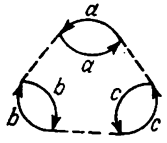



(85,7)

I diagrammi (85,7a-b) rappresentano correzioni al diagramma (85,6a) e per la stessa ragione si elidono mutuamente sommando su tutti gli $a$, $b$, $c$. I diagrammi (85,7 c-d) rappresentano piccole correzioni all'energia dell'interazione di scambio e non presentano qui interesse.

Quanto al diagramma (85,7e), esso risulta essere « grande in modo anomalo » per divergenza dell'integrale corrispondente. Questa divergenza è dovuta al fatto che gli impulsi **q** di ambedue le linee tratteggiate nel diagramma sono identici (come ciò segue con evidenza dalla conservazione dell'impulso nei vertici). Perciò il diagramma contiene l'integrale $\int d^3q/q^4$ divergente per **q** piccoli come $1/q$.

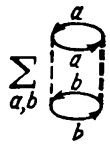
Nelle approssimazioni successive compaiono anche (oltre ai diagrammi dei tipi correttivi) nuovi diagrammi « anulari » con divergenza ancora più forte. Così, il diagramma del terzo ordine




a tre linee tratteggiate con impulsi uguali **q** contiene l'integrale $\int q^{-6}d^3q$ divergente come $q^{-3}$. In generale, un diagramma anulare dell'$n$-esimo ordine, formato da $n$ cappi continui congiunti da $n$ curve tratteggiate, è divergente come $q^{-(2n-3)}$.

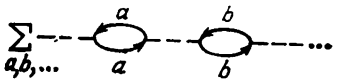
La somma di una successione infinita di diagrammi anulari conduce, come vedremo, al taglio efficace delle divergenze su valori di $q$ dell'ordine di un infinitesimo di $e$; pertanto tutti questi diagrammi danno in $\langle \hat{V} \rangle$ un contributo comune dell'ordine di $(e^2)^n/e^{2n-3} = e^3$. Graficamente questo contributo sarà rappresentato dalla som-

ma (sulle specie di particelle) dei diagrammi a scheletro




(85,8)

dove la linea grassetta tratteggiata rappresenta la somma dell'insieme infinito di diagrammi lineari

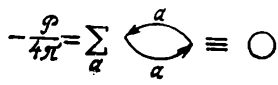



(85,9)

con numeri diversi di cappi continui.

Mentre la linea tratteggiata sottile esprime il potenziale $\varphi$ del campo coulombiano di una carica isolata, quella in grassetto rappresenta il potenziale del campo alterato dalla polarizzazione del plasma circostante; indichiamolo con $\Phi$. Quindi, tutto il contributo (85,8) fornisce la parte di correlazione cercata dell'energia media dell'interazione nel plasma.

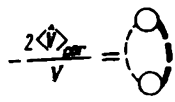
Introduciamo la notazione $-\mathcal{P}(\zeta_s, \mathbf{q})/4\pi$ per la somma dei cappi continui semplici di tutte le specie di particelle ed indicheremo questa grandezza graficamente con un cerchietto chiaro:




(85,10)

Notiamo che l'argomento $\zeta_s$ di questa funzione descrive valori « pari » $\zeta_s = 2s\pi T$ indipendentemente dalla statistica cui ubbidiscono le particelle $a$. Infatti, in virtù della legge di conservazione delle frequenze in un vertice, questo argomento è uguale alla differenza delle frequenze delle due curve continue; questa differenza è « pari » per termini della differenza sia « pari » che « dispari ».

Con la notazione (85,10) la somma (85,8) sarà rappresentata da un diagramma a scheletro



(85,11)

Quanto alla linea tratteggiata in grassetto, essa verifica l'equazione ai diagrammi

(85,12)

(completamente analoga alle equazioni (14,4) e (79,13)). In forma analitica questa equazione dice che

$$-\Phi(\zeta_s, \mathbf{q}) = -\varphi(\mathbf{q}) - \varphi(\mathbf{q}) \frac{\mathcal{P}(\zeta_s, \mathbf{q})}{4\pi} \Phi(\zeta_s, \mathbf{q}),$$

da cui

$$\Phi(\zeta_s, \mathbf{q}) = \frac{4\pi}{q^2 - \mathcal{P}(\zeta_s, \mathbf{q})}. \tag{85,13}$$

Sarebbe utile considerare queste formule da un altro punto di vista per stabilire un legame con i diagrammi del § 79. Il fatto è che l'interazione coulombiana fra le cariche si può considerare come risultato dello scambio di fotoni virtuali. In questo caso, però, è più comodo usare non la trasformazione di gauge (75,1), bensì la cosiddetta trasformazione « coulombiana » (si veda IV, § 77) in cui $-D_{00}$ è uguale esattamente alla componente di Fourier del potenziale coulombiano. La parte spaziale $D_{ik}$ in questa trasformazione di gauge descrive il ritardo e l'interazione magnetica, cosicché la si può trascurare in un plasma non relativistico. Pertanto si può supporre che alle linee tratteggiate del diagramma (85,11) corrisponda $\mathcal{D}_{00}$ di Matsubara, mentre la funzione $\mathcal{P}$ non è altro che la componente $\mathcal{P}_{00}$ dell'operatore di polarizzazione. In accordo con la (79,18) si può scrivere, quindi, $\mathcal{P}(\zeta_s, \mathbf{q}) = -q^2 [\varepsilon_l (i \mid \zeta_s \mid, \mathbf{q}) - 1]$ (è facile vedere che in presenza di dispersione spaziale nella (79,18) entra proprio la permeabilità longitudinale $\varepsilon_l$). Sostituendo questa espressione nell'(85,13), troviamo

$$\Phi(\zeta_s, \mathbf{q}) = \frac{4\pi}{q^2 \varepsilon_l (i \mid \zeta_s \mid, \mathbf{q})}, \tag{85,14}$$

cioè, come deve essere, la componente di Fourier del potenziale della carica unitaria nel mezzo.

Sviluppando il diagramma (85,11) secondo le regole generali della tecnica di Matsubara, troviamo

$$\langle \hat{V} \rangle_{\text{cor}} = -\frac{VT}{2} \sum_s \int \frac{\mathcal{P}^2(\zeta_s, \mathbf{q})}{(4\pi)^2} \varphi(\mathbf{q}) \Phi(\zeta_s, \mathbf{q}) \frac{d^3q}{(2\pi)^3} =$$

$$= -\frac{VT}{2} \sum_s \int \frac{\mathcal{P}^2(\zeta_s, \mathbf{q})}{q^2 [q^2 - \mathcal{P}(\zeta_s, \mathbf{q})]} \frac{d^3q}{(2\pi)^3}. \tag{85,15}$$

Come vedremo più avanti, il ruolo principale nella somma spetta al termine in $s = 0$, mentre il corrispondente integrale è definito dal

dominio degli $\mathbf{q}$ piccoli. Quindi per il calcolo dell'(85,15) è sufficiente di fatto trovare il valore limite $\mathcal{P}(0, \mathbf{q})$ per $\mathbf{q} \to 0$. È facile determinare questa grandezza partendo da considerazioni fisiche semplici, senza ricorrere al calcolo diretto mediante il diagramma (85,10).

Per $\zeta_s = 0$, la funzione $\Phi(0, \mathbf{q})$ rappresenta l'immagine di Fourier del potenziale $\Phi(r)$ del campo elettrostatico della carica unitaria nel plasma. Il potenziale imperturbato $\varphi(r)$ verifica l'equazione di Poisson con la funzione $\delta$ a secondo membro: $\Delta\varphi = -4\pi\delta(\mathbf{r})$. Quanto all'equazione per il potenziale $\Phi$ alterato dalla polarizzazione del plasma, essa si ottiene sommando al secondo membro la variazione $\delta\rho$ della densità di cariche nel plasma sotto l'influsso del campo stesso:

$$\Delta\Phi = -4\pi\,[\delta(\mathbf{r}) + \delta\rho]. \tag{85,16}$$

D'altra parte, per $\mathbf{q} \to 0$ abbiamo a che fare con un campo che varia lentamente lungo il volume del plasma. In questo campo è valida la condizione di equilibrio termodinamico

$$\mu_a + ez_a\Phi = \text{costante} = \mu_a^{(0)}, \tag{85,17}$$

dove $\mu_a$ è il potenziale chimico delle particelle della specie $a$, e $\mu_a^{(0)}$ il valore in assenza di campo. Da questa condizione ricaviamo la variazione della densità di particelle $n_a$,

$$\delta\mu_a = \left(\frac{\partial\mu_a}{\partial n_a}\right)_{T,\,V} \delta n_a = -ez_a\Phi$$

e, in seguito, la variazione della densità di carica:

$$\delta\rho = \sum_a ez_a\delta n_a = -\sum_a (ez_a)^2 \left(\frac{\partial n_a}{\partial\mu_a}\right)_{T,\,V} \Phi.$$

Sostituendo questa espressione nell'(85,16), otteniamo l'equazione

$$\Delta\Phi - \varkappa^2\Phi = -4\pi\delta(\mathbf{r}), \tag{85,18}$$

dove si è introdotta la notazione

$$\varkappa^2 = 4\pi e^2 \sum_a z_a^2 \left(\frac{\partial n_a}{\partial\mu_a}\right)_{T,\,V}. \tag{85,19}$$

Si vede dall'(85,18) che $1/\varkappa$ è il raggio di Debye di schermatura del campo nel plasma (cfr. V, § 78). Infine, calcolando la componente di Fourier in ambedue i membri dell'equazione (85,18), troviamo che

$$\Phi(\mathbf{q}) = \frac{4\pi}{q^2 + \varkappa^2}$$

e il confronto di questa espressione con l'(85,13) dà

$$\mathcal{P}(0, \mathbf{q})|_{\mathbf{q}\to 0} = -\varkappa^2. \tag{85,20}$$

Integrando ora con questo valore di $\mathcal{P}$ nella formula (85,15), troviamo

$$\langle\hat{V}\rangle_{\text{cor}} = -\frac{VT\varkappa^4}{2(2\pi)^3}\int\frac{4\pi q^2\,dq}{q^2(q^2+\varkappa^2)} = -\frac{VT\varkappa^3}{8\pi}. \qquad (85,21)$$

Notiamo innanzitutto che l'integrale è convergente nel limite inferiore e che sono i valori $q \sim \varkappa$ a giocare in esso il ruolo principale. Per la componente ionica non degenere del plasma abbiamo $\partial n_i/\partial\mu_i = n_i/T$, e per gli elettroni $\partial n_e/\partial\mu_e \sim n_e/\mu_e$. È facile vedere che, in virtù delle condizioni (85,2), $\varkappa \leqslant n^{1/3}$ e, quindi, anche $q \ll n^{1/3}$, vale a dire che $1/q$ è grande rispetto alle distanze fra le particelle. Ciò giustifica l'uso della condizione di equilibrio (85,17). Per giustificare, invece, l'omissione di tutti i termini della somma nell'(85,15), tranne quello in $s = 0$, osserviamo che, secondo l'(85,14), la polarizzazione del plasma per frequenze non nulle è descritta dalla permeabilità dielettrica $\varepsilon_l(\omega, \mathbf{q})$. Secondo una nota espressione asintotica per grandi frequenze, $\varepsilon_l(\omega) \approx 1 - 4\pi n_e e^2/m_e\omega^2$ e pertanto

$$\varepsilon_l(i\,|\zeta_s|) = 1 + \frac{4\pi n_e e^2}{m_e\zeta_s^2}$$

(si veda VIII, § 59). In virtù delle condizioni (85,1-2), tutte le frequenze non nulle $\zeta_s = 2s\pi T \gg (n_e e^2/m_e)^{1/2}$ e, quindi, per esse si può già supporre che $\varepsilon(i\,|\,\zeta_s\,|) = 1$, cioè che la polarizzazione del plasma non esista e che $\mathcal{P}$ sia piccolo.

La formula (85,21) è espressa in funzione delle variabili termodinamiche $T$, $V$, $\mu_a$. Perciò il potenziale termodinamico $\Omega$ del plasma può essere ottenuto per integrazione diretta dell'uguaglianza

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial e^2}\right)_{T,\,V,\,\mu_a} = \frac{1}{e^2}\langle\hat{V}\rangle \qquad (85,22)$$

(si veda V (80,4)). Come risultato troviamo per la parte correlativa del potenziale $\Omega$ la seguente espressione (in unità comuni):

$$\Omega_{\text{cor}} = -\frac{VT\varkappa^3}{12\pi} = -\frac{2\sqrt{\pi}\,VTe^3}{3}\left[\sum_a z_a^2\left(\frac{\partial n_a}{\partial\mu_a}\right)_{V,\,T}\right]^{3/2} \qquad (85,23)$$

(*A. A. Vedenov*, 1959). Secondo il teorema generale delle piccole correzioni, questa formula, espressa in funzione delle altre variabili termodinamiche, fornisce la correzione agli altri potenziali termodinamici.

Per un plasma non degenere, tutte le derivate $\partial n_a/\partial\mu_a = n_a/T$, e allora la formula (85,23) diventa

$$F_{\text{cor}} = -\frac{2\sqrt{\pi}\,Ve^3}{3\sqrt{T}}\left(\sum_a z_a^2 n_a\right)^{3/2} \qquad (85,24)$$

e fornisce la correzione all'energia libera, coincidente con l'espressione (78,12) del volume V.

Nel caso di forte degenerazione degli elettroni nel plasma ($T \ll \mu_e$), la derivata $\partial n_e/\partial \mu_e \sim n_e/\mu_e \ll n_e/T$. Nella somma su $a$ nell'(85,23) si può, in generale, trascurare il termine elettronico, e si riottiene la formula (85,24) con la sola differenza che la somma in essa è calcolata soltanto sulle specie di ioni nel plasma. In tal modo, per degenerazione forte gli elettroni, in generale, non incidono sul raggio di schermatura e sulla parte correlativa delle grandezze termodinamiche del plasma.

Capitolo IX

# FLUTTUAZIONI IDRODINAMICHE

## § 86. *Fattore di forma dinamico dei liquidi*

La funzione di correlazione delle fluttuazioni di densità, studiata al § 116 del volume V, rappresenta il caso particolare di una funzione più generale che lega le fluttuazioni della densità non soltanto in vari punti dello spazio, ma anche in diversi istanti. Nella teoria classica questa funzione è definita come la media

$$\bar{n}\sigma(t;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2) = \langle \delta n(t_1,\ \mathbf{r}_1)\ \delta n(t_2,\ \mathbf{r}_2)\rangle, \tag{86,1}$$

dove $t = t_1 - t_2$; alla definizione di $\sigma$ non partecipa il fattore $\bar{n} = N/V$ rappresentante la densità media del numero di particelle. Per un mezzo isotropo e omogeneo (liquido, gas) la funzione (86,1) dipende da $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ soltanto in funzione della distanza $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ fra due punti, ciò che sarà supposto più avanti.

Nella teoria quantistica una funzione analoga è definita mediante il prodotto simmetrizzato degli operatori di densità dipendenti dal tempo (operatori di Heisenberg) nel seguente modo:

$$\bar{n}\tilde{\sigma}(t,\ r) = \frac{1}{2}\langle \delta\hat{n}(t_1,\ \mathbf{r}_1)\ \delta\hat{n}(t_2,\ \mathbf{r}_2) + \delta\hat{n}(t_2,\ \mathbf{r}_2)\ \delta\hat{n}(t_1,\ \mathbf{r}_1)\rangle \tag{86,2}$$

(in accordo con la definizione generale (118,4) del volume V). Tuttavia, qualche vantaggio in questo caso lo fornisce la definizione non simmetrica

$$\bar{n}\sigma(t,\ r) = \langle \delta\hat{n}(t_1,\ \mathbf{r}_1)\ \delta\hat{n}(t_2,\ \mathbf{r}_2)\rangle \tag{86,3}$$

per la quale conserviamo la notazione $\sigma(t,\ r)$ [1]. Contrariamente alla funzione $\tilde{\sigma}(t,\ r)$, la funzione $\sigma(t,\ r)$ non è pari rispetto alla variabile $t$; è evidente che

$$\tilde{\sigma}(t,\ r) = \frac{1}{2}[\sigma(t,\ r) + \sigma(-t,\ r)]. \tag{86,4}$$

[1]) Proprio questa funzione è una grandezza osservabile direttamente, ad esempio, nella diffusione anelastica dei neutroni in un liquido: si veda il problema.

L'immagine di Fourier della funzione $\sigma(t, r)$ rispetto al tempo e alle coordinate

$$\sigma(\omega, \mathbf{k}) \equiv \sigma(\omega, k) = \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega t - \mathbf{kr})} \sigma(t, r)\, dt\, d^3x \qquad (86,5)$$

si chiama *fattore di forma dinamico* del mezzo. Data l'isotropia della funzione $\sigma(t, r)$, esso dipende unicamente dal modulo assoluto del vettore d'onda. Dall'(86,4) segue che l'immagine di Fourier della funzione $\tilde{\sigma}(t, r)$ è

$$\tilde{\sigma}(\omega, k) = \frac{1}{2}[\sigma(\omega, k) + \sigma(-\omega, k)]. \qquad (86,6)$$

La correlazione puramente spaziale delle fluttuazioni di densità del liquido è data dalla funzione (86,1) per $t = 0$: $\sigma(r) = \sigma(t = 0, r) = \tilde{\sigma}(t = 0, r)$. Questa funzione è legata alla funzione $\nu(r)$ introdotta al § 116 del volume V (e utilizzata al § 83) dalla relazione $\sigma(r) = \nu(r) + \delta(\mathbf{r})$; le loro immagini di Fourier sono $\sigma(k) = \nu(k) + 1$. Le funzioni $\sigma(k)$ o $\nu(k)$ si dicono *fattore di forma statico* del liquido. Le funzioni $\sigma(\omega, k)$ e $\sigma(k)$ sono mutuamente legate dalla relazione integrale

$$\sigma(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\omega, k)\, e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}\Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\omega, k) \frac{d\omega}{2\pi}. \qquad (86,7)$$

L'operatore di densità di Schrödinger (indipendente dal tempo) è dato dalla somma

$$\hat{n}(\mathbf{r}) = \sum_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \qquad (86,8)$$

calcolata su tutte le particelle del mezzo; le coordinate delle particelle $\mathbf{r}_a$ fungono da parametri (cfr. la (24,4)). Avremo bisogno più avanti delle componenti dello sviluppo di Fourier di questo operatore nelle coordinate

$$\hat{n}_{\mathbf{k}} = \int \hat{n}(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{kr}}\, d^3x = \sum_a e^{-i\mathbf{kr}_a}. \qquad (86,9)$$

Il passaggio all'operatore di Heisenberg (dipendente dal tempo) si effettua in base alla regola generale

$$\hat{n}(t, \mathbf{r}) = \exp(i\hat{H}t/\hbar)\, \hat{n}(\mathbf{r}) \exp(-i\hat{H}t/\hbar), \qquad (86,10)$$

dove $\hat{H}$ è l'operatore hamiltoniano del sistema. Questo operatore può essere rappresentato dalle espressioni (86,8-9) sostituendovi $\mathbf{r}_a$ con $\hat{\mathbf{r}}_a(t)$, cioè con gli operatori di Heisenberg delle coordinate delle particelle.

Secondo i principi fondamentali della statistica, la media $\langle \ldots \rangle$ si può intendere diversamente, a seconda da quali variabili termodinamiche deve essere espresso il risultato. Così, se la funzione $\sigma$ è definita per energia totale e numero di particelle del sistema dati, la media si calcola secondo un dato stato stazionario ($m$-esimo), cioè considerando il corrispondente elemento diagonale matriciale. Per un sistema omogeneo (liquido) la dipendenza degli elementi matriciali dell'operatore $\delta\hat{n}(t, \mathbf{r})$ dal tempo e dalle coordinate è data dalla formula

$$\langle m \mid \delta\hat{n}(t, \mathbf{r}) \mid l \rangle = \langle m \mid \delta\hat{n}(0) \mid l \rangle \exp\left[i(\omega_{ml} t - \mathbf{k}_{ml}\mathbf{r})\right], \tag{86,11}$$

completamente analoga all'(8,4) (a secondo membro figura l'elemento matriciale dell'operatore di Schrödinger $\delta\hat{n}(\mathbf{r})$ calcolato nel punto $\mathbf{r} = 0$). Tenendo conto di questa formula scriviamo

$$\bar{n}\sigma(t, r) = \sum_l \langle m \mid \delta\hat{n}(t_1, \mathbf{r}_1) \mid l \rangle \langle l \mid \delta\hat{n}(t_2, \mathbf{r}_2) \mid m \rangle =$$

$$= \sum_l \left| \langle m \mid \delta\hat{n}(0) \mid l \rangle \right|^2 \exp\left[i(\omega_{ml} t - \mathbf{k}_{ml}\mathbf{r})\right].$$

L'immagine di Fourier di questa funzione è

$$\bar{n}\sigma(\omega, k) = (2\pi)^4 \sum_l \left| \langle m \mid \delta\hat{n}(0) \mid l \rangle \right|^2 \delta(\omega - \omega_{lm})\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{lm}). \tag{86,12}$$

La sommatoria in queste formule è estesa a tutti gli stati del sistema con numero di particelle ($N_m$) dato (poiché l'operatore $\delta\hat{n}$ non cambia questo numero).

Se vogliamo esprimere il fattore di forma mediante la temperatura e il potenziale chimico del liquido, dobbiamo calcolare ancora la media dell'espressione (86,12) secondo la distribuzione di Gibbs:

$$\bar{n}\sigma(\omega, k) = (2\pi)^4 \sum_{l,\, m} \exp\left(\frac{\Omega - E_m - \mu N_m}{T}\right) \left| \langle m \mid \delta\hat{n}(0) \mid l \rangle \right|^2 \times$$

$$\times\, \delta(\omega - \omega_{lm})\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{lm}) \tag{86,13}$$

(dove in tutti i termini della somma $N_l = N_m$). Scrivendo la stessa formula per $\sigma(-\omega, -\mathbf{k}) \equiv \sigma(-\omega, k)$, permutando in essa gli indici di somma $l$, $m$ e sostituendo nel fattore esponenziale $E_l = E_m + \hbar\omega_{lm} = E_m + \hbar\omega$ (quest'ultima uguaglianza è dovuta alla presenza della funzione $\delta$), otteniamo

$$\sigma(-\omega, k) = \sigma(\omega, k)\, e^{-\hbar\omega/T} \tag{86,14}$$

e in seguito, secondo l'(86,6),

$$\tilde{\sigma}(\omega, k) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-\hbar\omega/T}\right) \sigma(\omega, k). \tag{86,15}$$

È da notare che dall'(86,13) (o dall'86,12)) deriva quanto segue: la funzione $\sigma(\omega, k) \geqslant 0$ per tutti i valori dei suoi argomenti. Dalla relazione (86,14) segue, invece, che alla temperatura zero

$$\sigma(\omega, k) = 0 \quad \text{per} \quad \omega < 0, \; T = 0 \tag{86,16}$$

Nel limite macroscopico ($N$, $V \to \infty$ per un dato rapporto $N/V$) la « palizzata » delle funzioni $\delta$ nell'(86,13) viene smussata trasformandosi in una funzione continua, ma i picchi funzionali $\delta$ in $\sigma(\omega, k)$ rimangono per i valori $\omega = \omega(k)$ corrispondenti a eccitazioni elementari non smorzantisi (come deve essere in accordo con ragionamenti simili a quelli esposti al § 8). Questi picchi compaiono, però, soltanto per eccitazioni che non implicano variazione del numero di particelle [1]).

Mostriamo in che modo il fattore di forma del liquido può essere legato alle grandezze che figurano nella formulazione generale del teorema della fluttuazione dissipativa (*D. Pines*, *Ph. Noziéres*, 1958).

Supponiamo che su ogni particella di liquido agisca un campo esterno che trasmette alla particella l'energia potenziale $U(t, \mathbf{r})$. Allora l'operatore di perturbazione agente sull'intero liquido sarà

$$\hat{V}(t) = \int \hat{n}(t, \mathbf{r})\, U(t, \mathbf{r})\, d^3x \tag{86,17}$$

Sviluppando tutte le grandezze che vi figurano in serie di Fourier nel tempo, rappresentiamo la reazione del sistema (cioè la variazione media della densità causata dalla perturbazione) con un'espressione della forma

$$\delta\bar{n}(\omega, \mathbf{r}_1) = -\int \alpha(\omega, |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)\, U(\omega, \mathbf{r}_2)\, d^3x_2, \tag{86,18}$$

dove la funzione $\alpha(\omega, r)$ funge da suscettività generalizzata. La componente di Fourier nel tempo della funzione di correlazione $\tilde{\sigma}(t, r)$ è, nelle notazioni del teorema della fluttuazione dissipativa,

$$\overline{n\tilde{\sigma}}(\omega, r) = (\delta n(\mathbf{r}_1)\, \delta n(\mathbf{r}_2))_\omega, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

Secondo questo teorema, la detta funzione si esprime attraverso la suscettività generalizzata con la formula

$$\overline{n\tilde{\sigma}}(\omega, r) = \hbar \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T} \operatorname{Im} \alpha(\omega, r). \tag{86,19}$$

---

[1]) Così, nel liquido di Fermi $\sigma(\omega, k)$ ha una singolarità della funzione $\delta$ per $\omega = ku_0$ (essendo $u_0$ la velocità del suono nullo), ma non ha tali singolarità corrispondenti al ramo fermionico dello spettro; si veda il § 91.

Mediante la stessa formula si esprime la componente di Fourier nelle coordinate della $\tilde{\sigma}(\omega, k)$ attraverso $\alpha(\omega, k)$; in seguito, in accordo con l'(86,15), troviamo il fattore di forma dinamico

$$\bar{n}\sigma(\omega, k) = \frac{2\hbar}{1-e^{-\hbar\omega/T}} \operatorname{Im} \alpha(\omega, k). \tag{86,20}$$

L'importanza di queste formule è dovuta soprattutto al fatto che esse consentono di stabilire il legame del fattore di forma con una funzione con proprietà analitiche generali note (nella variabile $\omega$); per la funzione $\alpha(\omega, k)$ queste proprietà sono state descritte al § 123 del volume V. Esse permettono anche di applicare al calcolo del fattore di forma la formula generale (si veda la (75,11)), secondo la quale

$$\alpha(\omega, k) = \frac{i}{\hbar} \int \int_0^\infty e^{i(\omega t - \mathbf{kr})} \langle \hat{n}(t, \mathbf{r})\, \hat{n}(0, 0) - \hat{n}(0, 0)\, \hat{n}(t, \mathbf{r}) \rangle\, dt\, d^3x. \tag{86,21}$$

Esprimendo gli operatori di densità in funzione degli operatori $\psi$ ($n = \hat{\Psi}^+\hat{\Psi}$), si può ridurre questa espressione alla forma di una funzione di Green a due componenti, al calcolo della quale è applicabile la tecnica dei diagrammi.

## PROBLEMA

Esprimere mediante il fattore di forma dinamico la probabilità di diffusione anelastica di neutroni lenti in un liquido composto di atomi identici (*G. Placzek*, 1952).

*Soluzione.* Secondo il metodo dello pseudopotenziale (si veda III, § 151), la diffusione dei neutroni lenti può essere descritta come risultato dell'interazione di energia potenziale

$$U(\mathbf{r}) = \frac{2\pi\hbar^2}{M} a\hat{n}(\mathbf{r}), \tag{1}$$

dove $n(\mathbf{r})$ è l'operatore di densità (86,8); $M$ la massa ridotta dell'atomo e del neutrone; $a$ la lunghezza di diffusione di un neutrone lento su un singolo atomo (cioè il valore limite dell'ampiezza di diffusione preso con il segno opposto). La probabilità di transizione da uno stato iniziale ($i$) del sistema liquido + neutrone in quello finale ($f$) in un certo intervallo $d\nu_f$ è

$$dw_{fi} = \left| \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} U_{fi}(t)\, dt \right|^2 d\nu_f \tag{2}$$

(si veda III (40,5)); per gli elementi matriciali non diagonali $U_{fi}$ nella formula (1) si può scrivere $\delta\hat{n}$ in luogo di $\hat{n}$. Normalizziamo in una particella nel volume $V$ la funzione d'onda dello stato iniziale del neutrone (con impulso $\mathbf{p}$ ed energia $\varepsilon$), mentre normalizziamo in una funzione $\delta$ di $\mathbf{p}/2\pi$ la funzione

d'onda dello stato finale (con impulso $\mathbf{p}'$ ed energia $\varepsilon'$). Allora $dv_f = d^3p'/(2\pi\hbar)^3$ e l'elemento matriciale della perturbazione è

$$U_{fi}(t) = \frac{2\pi\hbar^2 a}{M\sqrt{V}} \int \delta n_{fi}(t, \mathbf{r})\, e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\, d^3x,$$

dove $\hbar\mathbf{k} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$, $\hbar\omega = \varepsilon - \varepsilon'$, e $\delta n_{fi}(t, \mathbf{r})$ è l'elemento matriciale rispetto alle funzioni d'onda del liquido. Sostituendo questa espressione in $dw_{fi}$, sommiamo la probabilità di transizione su tutti gli stati finali possibili del liquido. Inoltre scriviamo il quadrato del modulo dell'integrale in forma di integrale doppio (su $dt\, dt'\, d^3x\, d^3x'$) e osserviamo che

$$\sum_f \delta n_{fi}(t, \mathbf{r})\, \delta n_{fi}(t', \mathbf{r}')^* = \sum_f \delta n_{if}(t', \mathbf{r}')\, \delta n_{fi}(t, \mathbf{r}) =$$

$$= \langle i | \delta\hat{n}(t', \mathbf{r}')\, \delta\hat{n}(t, \mathbf{r}) | i \rangle = \overline{n}\sigma(t'-t, \mathbf{r}'-\mathbf{r})$$

(dove $\sigma$ è espressa in funzione dell'energia totale del liquido nello stato $i$). L'integrazione in $d(t'-t)\, d^3(x'-x)$ dà la funzione $\sigma(\omega, k)$ e un'altra integrazione (in $dt\, d^3x$, ad esempio) dà semplicemente il volume $V$ e l'intervallo totale di tempo $t$. Omettendo il fattore $t$, otteniamo come risultato la probabilità di diffusione nell'unità di tempo

$$w = \frac{4\pi^2\hbar^2}{M^2}\, \overline{n}a^2\sigma(\omega, k)\, \frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{3}$$

Questa espressione resta, ovviamente, valida anche dopo il calcolo della media secondo la distribuzione di Gibbs, cioè per il fattore di forma espresso in funzione della temperatura.

Notiamo che la proprietà del fattore di forma (86,16) nell'applicazione alla diffusione dei neutroni esprime il fatto che per $T = 0$ il liquido è capace soltanto di acquistare energia e non di cederla. La relazione (86,14) esprime, invece, il principio di equilibrio dettagliato, poiché i processi di diffusione accompagnati dalla trasmissione dell'energia e degli impulsi $(\omega, \mathbf{k})$ e $(-\omega, -\mathbf{k})$ sono mutuamente inversi.

## § 87. *Regole delle somme per il fattore di forma*

Il fattore di forma dinamico soddisfa a certe relazioni integrali (nelle frequenze $\omega$): le *regole delle somme*.

La deduzione di una di esse è basata sulla regola di commutazione fra gli operatori $\hat{n}_{\mathbf{k}}(t)$ e $\dot{\hat{n}}_{\mathbf{k}}(t)$. Il commutatore fra gli operatori di Heisenberg calcolati in un medesimo istante coincide con quello fra gli operatori di Schrödinger $\hat{n}_{\mathbf{k}}$ e $\dot{\hat{n}}_{\mathbf{k}}$. L'operatore $\hat{n}_{\mathbf{k}}$ è definito dall'espressione (86,9), mentre il commutatore richiesto è dato dalla formula

$$\dot{\hat{n}}_{\mathbf{k}}\hat{n}_{\mathbf{k}}^{+} - \hat{n}_{\mathbf{k}}^{+}\dot{n}_{\mathbf{k}} = -\frac{i\hbar}{m}k^2N, \tag{87,1}$$

dove $m$ è la massa di una particella del liquido [1]).

[1]) Il calcolo di questo commutatore coincide con il calcolo eseguito al § 149 del volume III in relazione alla deduzione della regola delle somme (149,5); al posto del numero di elettroni $Z$ ora abbiamo il numero totale $N$ di particelle nel liquido.

Partiamo dall'espressione della componente dello sviluppo di Fourier della funzione $\sigma(t, r)$ soltanto nelle coordinate

$$\overline{n}\sigma(t, k) = \int e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)} \langle \delta\hat{n}(t_1, \mathbf{r}_1)\, \delta\hat{n}(t_2, \mathbf{r}_2)\rangle\, d^3(x_1 - x_2).$$

Tenendo presente che l'espressione integranda dipende unicamente dalla differenza $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, sostituiamo all'integrazione in $d^3(x_1-x_2)$ quella in $d^3x_1\, d^3x_2/V$; effettuandola sotto il segno di media otteniamo

$$\sigma(t, k) = \frac{1}{N} \langle \delta\hat{n}_{\mathbf{k}}(t_1)\, \delta\hat{n}_{-\mathbf{k}}(t_2)\rangle. \tag{87,2}$$

Calcoliamo la derivata $\partial\sigma(t, k)/\partial t$ per $t = 0$. Poiché $\sigma(t, k)$ dipende esclusivamente dalla differenza $t = t_1 - t_2$, allora

$$\frac{\partial\sigma(t, k)}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t_1} - \frac{\partial\sigma}{\partial t_2}\right)$$

e, sostituendovi l'(87,2) abbiamo

$$\frac{\partial\sigma(t, k)}{\partial t} = \frac{1}{2N} \langle \delta\dot{\hat{n}}_{\mathbf{k}}(t_1)\, \delta\hat{n}_{-\mathbf{k}}(t_2) - \delta\hat{n}_{\mathbf{k}}(t_1)\, \delta\dot{\hat{n}}_{-\mathbf{k}}(t_2)\rangle.$$

Ciascuno dei due termini in questa espressione dipende soltanto dal valore assoluto del vettore $\mathbf{k}$; tenendone conto sostituiamo nel secondo termine $\mathbf{k}$ con $-\mathbf{k}$. Ponendo in seguito $t_1 = t_2$ e osservando che $\hat{n}_{-\mathbf{k}} = \hat{n}^+_{\mathbf{k}}$, troviamo che la differenza fra parentesi quadra coincide con il commutatore (87,1). In tal modo abbiamo

$$\left.\frac{\partial\sigma(t, k)}{\partial t}\right|_{t=0} = -\frac{i\hbar}{2m} k^2.$$

D'altra parte, rappresentando la funzione $\sigma(t, k)$ sotto forma di integrale di Fourier nelle frequenze, otteniamo

$$\left.\frac{\partial\sigma(t, k)}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\sigma(\omega\ \ k) \frac{d\omega}{2\pi}\Bigg|_{t=0} = -i \int_{-\infty}^{\infty} \omega\sigma(\omega, k) \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Confrontando le due espressioni della derivata, otteniamo la relazione cercata

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega\sigma(\omega, k) \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{\hbar k^2}{2m} \tag{87,3}$$

(*G, Placzek*, 1952). Sottolineiamo che essa sussiste per ogni $k$. Per passare in questa relazione al limite classico ($\hbar \to 0$), si deve scrivere l'integrale al suo primo membro nella forma

$$\int_0^\infty \omega [\sigma(\omega, k) - \sigma(-\omega, k)] \frac{d\omega}{2\pi}$$

e, in accordo con l'(86,14), sostituire in esso

$$\sigma(\omega, k) - \sigma(-\omega, k) \approx \frac{\hbar\omega}{T} \sigma(\omega, k).$$

Dopo questa sostituzione i fattori $\hbar$ in ambedue i membri dell'uguaglianza si elidono e resta

$$\int_0^\infty \omega^2 \sigma(\omega, k) \frac{d\omega}{2\pi} = T \frac{k^2}{2m}.$$

Applichiamo la formula (87,3) al liquido di Bose per $T = 0$ e consideriamo il dominio dei $k$ piccoli. Per $k \to 0$ il contributo principale nell'integrale proviene dal picco funzionale $\delta$ del fattore di forma $\sigma(\omega, k)$ che compare nell'(86,13) per transizioni accompagnate dalla generazione di un fonone (poiché nello stato fondamentale del liquido i fononi non esistono, allora non ci sono transizioni accompagnate dall'annichilazione di un fonone per $T = 0$). Questo termine ha la forma $A\delta(\omega - uk)$, dove $\hbar uk$ è l'energia del fonone ($u$ è la velocità del suono). Sostituendo questo termine al posto di $\sigma(\omega, k)$ nell'(87,3), determiniamo il coefficiente $A$ e, infine, troviamo

$$\sigma(\omega, k) = \frac{\pi\hbar k}{mu} \delta(\omega - uk). \tag{87,4}$$

L'integrazione di questa espressione mediante la formula (86,7) fornisce il fattore di forma statico

$$\sigma(k) = \frac{\hbar k}{2mu} \tag{87,5}$$

(*R. P. Feynman*, 1954) [1]. Poiché questa formula si riferisce al domi-

[1]) La formula (87,5), scritta nella forma $\sigma(k) = \hbar^2 k^2 / 2m\varepsilon(k)$, dove $\varepsilon(k)$ è l'energia della quasi-particella, sussiste rigorosamente soltanto per $k \to 0$. All'aumentare di $k$ un ruolo sempre più rilevante cominciano a giocarlo i contributi in $\sigma(k)$, provenienti dalle transizioni accompagnate dalla generazione di più quasi-particelle. A prescindere da questi contributi si può supporre che la detta formula stabilisca un legame fra il fattore di forma e l'energia delle quasi-particelle nel liquido di Bose. In questo caso, al massimo di $\sigma$ per $k \sim 1/a$ ($a$ sono le distanze interatomiche nel liquido) corrisponde il minimo « rotonico » sulla curva $\varepsilon(k)$.

nio dei $k$ piccoli, la sua componente di Fourier dà l'espressione asintotica seguente della funzione di correlazione per grandi $r$:

$$\nu(r) = -\frac{\hbar}{2\pi^2 m u r^4} \tag{87,6}$$

(per la verifica di questa formula si veda l'integrale dato nella nota alla pag. 423). Per $T = 0$ la formula (87,6) è valida a distanze grandi a piacere. A temperature basse ma finite la formula è valida fino a distanze $r \sim \hbar u/T$, alle quali le fluttuazioni cessano di essere puramente quantistiche. A distanze ancora più grandi la legge (87,6) cede il posto alla decrescenza esponenziale (se si trascura il contributo delle forze di Van der Waals; si veda il § 83) [1]).

Si può ricavare ancora una regola delle somme dalla relazione stabilita al § 86 fra il fattore di forma e una certa suscettività generalizzata $\alpha(\omega, k)$. Questa relazione è data dalla formula (86,20), la quale per $T = 0$ si riduce (se $\omega > 0$) a

$$\bar{n}\sigma(\omega, k) = 2\hbar \operatorname{Im} \alpha(\omega, k). \tag{87,7}$$

In accordo con le formule di Kramers-Kronig (si veda **V (123,15)**)

$$\operatorname{Re} \alpha(\omega, k) = \frac{1}{\pi} \mathrm{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \alpha(\omega', k)}{\omega' - \omega} d\omega'.$$

Ponendo $\omega = 0$ e tenendo conto che la grandezza $\alpha(0, k)$ è reale [2]), scriviamo

$$\alpha(0, k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \alpha(\omega, k) \frac{d\omega}{2\pi}. \tag{87,8}$$

Nel limite $k \to 0$ si verifica la relazione

$$\alpha(0, k \to 0) = \left(\frac{\partial \bar{n}}{\partial \mu}\right)_{T=0} = \bar{n} \left(\frac{\partial \bar{n}}{\partial P}\right)_{T=0}. \tag{87,9}$$

Essa deriva dal fatto che in un campo statico debole $U$, lentamente variabile nello spazio, è soddisfatta la condizione $\mu + U =$ costante, cosicché l'applicazione del campo esterno equivale alla variazione

---

[1]) La funzione di correlazione (87,6) è negativa (il che corrisponde alla repulsione fra le particelle) contrariamente alla funzione di correlazione del gas di Bose perfetto in cui essa è positiva (si veda V, § 117). A questo proposito ricordiamo (§ 25) che in un gas di Bose debolmente non perfetto lo spettro energetico ha la forma fononica soltanto per $k \ll mu/\hbar$ (dove $\hbar/mu \gg a$). Le distanze corrispondenti sono $r \sim 1/k \gg \hbar/mu$, in modo che, passando a un gas perfetto ($u \to 0$), il dominio di applicabilità della formula (87,6) si sposta all'infinito.

[2]) La grandezza $\alpha(\omega = 0, \mathbf{r})$ è reale in virtù delle proprietà generali della suscettività generalizzata. Di qui deriva il carattere reale della componente di Fourier $\alpha(\omega = 0, \mathbf{k})$, poiché la funzione $\alpha(\omega, \mathbf{r})$ è pari in $\mathbf{r}$.

del potenziale chimico di $-U$. Pertanto, nel limite $k \to 0$, la formula (86,18) dà

$$\delta\bar{n} = -\frac{\partial\bar{n}}{\partial\mu} U \approx -U \int \alpha(0, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\, d^3(x_1 - x_2) = -U\alpha(0, k=0),$$

da cui proviene l'espressione (87,9).

Riunendo le formule (87,7-9) così ottenute, troviamo quindi la seguente regola delle somme per il fattore di forma del liquido per $T = 0$:

$$\frac{1}{\pi\hbar} \int_0^\infty \sigma(\omega, k \to 0) \frac{d\omega}{\omega} = \frac{\partial\bar{n}}{\partial P} \tag{87,10}$$

(*D. Pines, Ph. Noziéres*, 1958).

## PROBLEMI

**1.** Trovare la funzione di correlazione $\nu(r)$ per il liquido di Bose a distanze $r \gtrsim \hbar u/T$ e temperature $T \ll T_\lambda$.

*Soluzione.* La funzione di correlazione cercata è definita dal fattore di forma per valori $k \sim 1/r \lesssim T/\hbar u \ll 1/a$, per i quali lo spettro energetico del liquido è fononico. Per $T \neq 0$, $\sigma(\omega, k)$, oltre a un termine in $\delta(\omega - ku)$ corrispondente all'emissione di un fonone, contiene un termine in $\delta(\omega + ku)$ corrispondente all'assorbimento di un fonone. I coefficienti di questi termini si possono determinare mediante le formule (86,14) e (87,3):

$$\sigma(\omega, k) = \frac{\pi\hbar k}{mu} [1 - e^{-\hbar ku/T}]^{-1} \{\delta(\omega - ku) + e^{-\hbar ku/T} \delta(\omega + ku)\}. \tag{1}$$

Integrando questa espressione troviamo che

$$\sigma(k) = \frac{\hbar k}{2mu} \operatorname{cth} \frac{\hbar ku}{2T} \tag{2}$$

e, in seguito, che

$$\nu(r) = \int e^{i\mathbf{kr}} \sigma(k) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \frac{\hbar}{8\pi^2 imur} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikr} k^2 \operatorname{cth} \frac{\hbar ku}{2T}\, dk.$$

Chiudendo il cammino di integrazione in $dk$ con una semicirconferenza indefinitamente lontana nel semipiano superiore della variabile complessa $k$, riduciamo l'integrale alla somma dei residui nei poli (disposti sull'asse immaginario). Per $r \gg \hbar u/T$ il contributo principale nell'integrale proviene dal residuo nel polo per $\hbar ku/2T = i\pi$:

$$\nu(r) = -\frac{2\pi T^3}{mu^4\hbar^2 r} \exp\left(-\frac{2\pi T}{\hbar u} r\right). \tag{3}$$

Per la condizione $aT/\hbar u \ll 1$, la distanza di smorzamento caratteristica della funzione $\nu(r)$ risulta essere di gran lunga superiore alle distanze interatomiche, alle quali decrescono gli effetti dovuti all'interazione diretta fra gli atomi. In questo caso, nella formula (3) riveste un'importanza rilevante $\hbar$, in modo che la correlazione da essa descritta è di carattere quantistico. È da

notare che nella deduzione abbiamo trascurato il contributo delle forze di Van der Waals. Come segue dai risultati del § 83, questo contributo ha un carattere di potenza ed è fondamentale a distanze sufficientemente grandi. Le distanze, alle quali si realizza il passaggio dalla formula (3) a quella (83,16), dipendono dalla relazione concreta fra i coefficienti, ma il dominio di applicabilità della formula (3) esiste sempre per temperature sufficientemente basse, poiché sulla frontiera del dominio di applicabilità per $r \sim \hbar u/T$ si ha, secondo la (3), $\nu \backsim T^4$ e, secondo l'(83,16), $\nu \backsim T^7$.

2. Trovare la forma limite (alle grandi distanze) della funzione di correlazione delle fluttuazioni della funzione d'onda condensata nel liquido di Bose superfluido (*P. C. Hohenberg, P. C. Martin*, 1965).

*Soluzione.* Nel limite ad onde lunghe è la fase $\Phi$ della funzione d'onda che sopporta le fluttuazioni più forti, poiché esse sono legate solo da un'energia del moto macroscopico superfluido abbastanza piccola. Il corrispondente contributo nel potenziale total etermodinamico $\Omega$ del liquido (nel volume $V$ con $T$ e $\mu$ dati) è

$$\delta\Omega = \frac{1}{2}\int \rho_s \mathbf{v}_s^2 dV = \frac{\hbar^2\rho_s}{2m^2}\int (\nabla\Phi)^2\, dV.$$

Esprimendo $\delta\Phi$ in sviluppo di Fourier

$$\delta\Phi = \sum_{\mathbf{k}} \delta\Phi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}, \qquad \delta\Phi_{-\mathbf{k}} = \delta\Phi_{\mathbf{k}}^*,$$

otteniamo

$$\delta\Omega = \frac{\hbar^2}{2m^2}\rho_s V \sum_{\mathbf{k}} k^2 |\delta\Phi_{\mathbf{k}}|^2$$

e di conseguenza per il quadrato medio delle fluttuazioni

$$\langle |\delta\Phi_{\mathbf{k}}|^2\rangle = Tm^2/V\hbar^2\rho_s k^2; \tag{4}$$

i calcoli sono assolutamente identici a quelli fatti nel volume V, § 146. Il contributo di queste fluttuazioni nella funzione di correlazione simultanea

$$G(r) = \langle \delta\Xi(0)\,\delta\Xi(\mathbf{r})\rangle$$

è

$$G(r) \approx n_0 \langle \delta\Phi(0)\,\delta\Phi(\mathbf{r})\rangle = Tn_0 m^2/4\pi\hbar^2\rho_s r. \tag{5}$$

In questo modo, $G(r)$ decresce alle grandi distanze secondo la legge di potenza. Il contributo, invece, dalle fluttuazioni di densità del condensato $n_0$ decresce in questo dominio esponenzialmente. Ambedue i contributi si raffrontano per $r \sim r_c$; alle distanze $r \ll r_c$ essi seguono insieme la legge (alle temperature vicine a $\lambda$-punto)

$$G(r) \backsim r^{-(1+\zeta)}, \tag{6}$$

dove $\zeta$ è il corrispondente indice critico. Il raggio di correlazione $r_c$ può essere determinato come la distanza, alla quale la legge asintotica (5) diventa (6):

$$r_c^{\zeta} \backsim \rho_s/n_0.$$

Introducendo gli indici critici $\beta$ e $\nu$, che determinano le dipendenze di temperatura $n_0$ e $r_c$, in accordo con le (28,1) e (28,3), troviamo che

$$\rho_s \backsim (T_\lambda - T)^{2\beta-\nu\zeta}.$$

Usando i rapporti noti tra gli indici $\alpha$, $\beta$, $\nu$, $\zeta$ (si veda V, §§ 148, 149) è facile convincersi che questo risultato concorda con la (28,4).

## § 88. *Fluttuazioni idrodinamiche*

Nei paragrafi precedenti abbiamo considerato le fluttuazioni della densità del liquido per frequenze $\omega$ e vettori d'onda $\mathbf{k}$ qualsiasi. È ovvio che era impossibile trovare la forma concreta della funzione di correlazione per il caso generale. Ciò si può ottenere, tuttavia, nel limite idrodinamico quando la lunghezza d'onda delle fluttuazioni è grande rispetto alle dimensioni microscopiche caratteristiche (cioè rispetto alle distanze interatomiche nel liquido e alla lunghezza del cammino libero nel gas).

Il calcolo delle funzioni di correlazione simultanee delle fluttuazioni di densità, temperatura, velocità ecc. in un liquido immobile non richiede uno studio particolare: queste fluttuazioni (nel limite classico, cioè non quantistico) sono descritte da formule termodinamiche comuni che sono valide per qualsiasi mezzo in equilibrio termico. Le correlazioni fra fluttuazioni contemporanee in diversi punti dello spazio si estendono a lunghezze dell'ordine di grandezza delle distanze interatomiche (inoltre si trascurano le forze deboli di Van der Waals a grande raggio d'azione). Ma queste distanze sono supposte infinitesime in idrodinamica. Pertanto nel limite idrodinamico le fluttuazioni contemporanee in punti diversi non sono correlate. Formalmente questa affermazione deriva dall'additività della grandezza termodinamica, il lavoro minimo $R_{\min}$, necessario per la realizzazione della fluttuazione. Poiché la probabilità di fluttuazione è proporzionale a $\exp(-R_{\min}/T)$, allora, rappresentando $R_{\min}$ in forma di una somma di termini riferiti a singoli volumi fisicamente infinitesimali, troviamo che le probabilità di fluttuazioni in questi volumi sono mutuamente indipendenti.

Tenendo presente la detta indipendenza, si possono riscrivere immediatamente le note formule per i quadrati medi delle fluttuazioni delle grandezze termodinamiche in un punto dato dello spazio (si veda V, § 112) sotto forma di espressioni per le funzioni di correlazione. Così, secondo la formula

$$\langle(\delta T)^2\rangle = \frac{T^2}{\rho c_v V},$$

esprimente le fluttuazioni della temperatura nel volume $V$ ($\rho$ è la densità; $c_v$ il calore specifico riferito all'unità di massa del mezzo), scriviamo dapprima

$$\langle\delta T(\mathbf{r}_a)\,\delta T(\mathbf{r}_b)\rangle = \frac{T^2}{\rho c_v V_a}\,\delta_{ab},$$

dove le fluttuazioni si riferiscono a due piccoli volumi, $V_a$ e $V_b$. In seguito, facendo tendere i volumi a zero, otteniamo [1])

$$\langle \delta T(\mathbf{r}_1)\,\delta T(\mathbf{r}_2)\rangle = \frac{T^2}{\rho c_v}\,\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2). \tag{88,1}$$

Analogamente si scrivono le formule per le fluttuazioni delle altre grandezze termodinamiche:

$$\langle \delta\rho(\mathbf{r}_1)\,\delta\rho(\mathbf{r}_2)\rangle = \rho T\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2), \tag{88,2}$$

$$\langle \delta P(\mathbf{r}_1)\,\delta P(\mathbf{r}_2)\rangle = \rho T\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_S \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) = \rho T u^2 \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2), \tag{88,3}$$

$$\langle \delta s(\mathbf{r}_1)\,\delta s(\mathbf{r}_2)\rangle = \frac{c_p}{\rho}\,\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) \tag{88,4}$$

($P$ è la pressione; $s$ l'entropia dell'unità di massa del mezzo); in questo caso, le fluttuazioni delle coppie di grandezze $\rho$, $T$ e $P$, $s$ sono indipendenti. Scriviamo anche la formula per le fluttuazioni della velocità macroscopica $\mathbf{v}$ del liquido (nulla in equilibrio):

$$\langle \delta v_i(\mathbf{r}_1)\,\delta v_k(\mathbf{r}_2)\rangle = \frac{T}{\rho}\,\delta_{ik}\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2). \tag{88,5}$$

Per l'idrodinamica è specifica la questione delle correlazioni temporali fra le fluttuazioni, nonché la questione delle fluttuazioni in un liquido in moto. La soluzione di questi problemi richiede che si tenga conto dei processi dissipativi nel liquido, ossia della viscosità e della conduzione termica.

La costruzione della teoria generale dei fenomeni di fluttuazione in idrodinamica si riduce alla costruzione delle « equazioni del moto » per le grandezze fluttuanti. Ciò può essere realizzato mediante l'introduzione dei corrispondenti termini addizionali nelle equazioni idrodinamiche (*L. D. Landau*, *E. M. Lifšits*, 1957).

Le equazioni idrodinamiche scritte nella forma

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0, \tag{88,6}$$

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k}, \tag{88,7}$$

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla s\right) = \frac{1}{2}\sigma'_{ik}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) - \operatorname{div}\mathbf{q}, \tag{88,8}$$

[1]) Questa e le formule successive per le correlazioni contemporanee nel caso dei gas sono valide per fluttuazioni di lunghezze d'onda grandi soltanto rispetto alle distanze intermolecolari, ma non necessariamente grandi rispetto alla lunghezza del cammino libero. L'ultima condizione è necessaria, però, per le funzioni di correlazione non contemporanee nell'approssimazione idrodinamica (poiché il meccanismo microscopico di propagazione delle perturbazioni nei gas è definito appunto dalla lunghezza del cammino libero delle particelle).

senza specificare la forma del tensore degli sforzi $\sigma'_{ik}$ e del vettore del flusso di calore $\mathbf{q}$, non esprimono altro che la conservazione della massa, dell'impulso e dell'energia. Quindi, in questa forma esse sono valide per qualsiasi moto, comprese le variazioni fluttuazionali dello stato del liquido. In questo caso, con $\rho$, $P$, $\mathbf{v}$ si deve intendere la somma dei valori delle grandezze $\rho_0$, $P_0$, $\mathbf{v}_0$ ... nel moto fondamentale e delle loro oscillazioni dovute a fluttuazioni $\delta\rho$, $\delta P$, $\delta\mathbf{v}$, ... (rispetto a queste ultime le equazioni, ovviamente, possono sempre essere linearizzate).

Le espressioni ordinarie per il tensore degli sforzi e il flusso di calore stabiliscono il loro legame rispettivamente con il gradiente della velocità e il gradiente della temperatura. Nel caso di fluttuazioni nel liquido compaiono anche sforzi spontanei locali a flussi di calore non legati ai suddetti gradienti; indichiamoli con $s_{ik}$ e $\mathbf{g}$ e li chiameremo « casuali ». Scriviamo così

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}\right) + \zeta\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v} + s_{ik}, \qquad (88,9)$$

$$\mathbf{q} = -\varkappa\nabla T + \mathbf{g} \qquad (88,10)$$

($\eta$, $\zeta$ sono i coefficienti di viscosità; $\varkappa$ il coefficiente di conducibilità termica).

Il problema consiste ora nello stabilire le proprietà di $s_{ik}$ e $\mathbf{g}$, cioè nel definirne le funzioni di correlazione. Per semplicità, condurremo tutte le considerazioni per il caso di fluttuazioni non quantistiche, naturale in idrodinamica; ciò significa che le frequenze delle oscillazioni di fluttuazione sono supposte soddisfare la condizione $\hbar\omega \ll T$. Supporremo, inoltre, che i coefficienti di viscosità e di conducibilità termica siano non dispersivi, cioè indipendenti dalla frequenza delle oscillazioni.

La teoria generale delle fluttuazioni (esposta ai §§ 119-122 del volume V) tratta una serie discreta di grandezze fluttuanti $x_1$, $x_2$, ... mentre nel caso in questione abbiamo a che fare con una serie continua (i valori di $\rho$, $P$, ... in ogni punto del liquido). Supereremo questa difficoltà inessenziale dividendo il volume del corpo in elementi piccoli ma finiti $\Delta V$ e considerando alcuni valori medi delle grandezze in ciascuno di questi elementi; nelle formule definitive realizzeremo il passaggio ad elementi infinitesimali.

Considereremo le formule (88,9-10) come equazioni

$$\dot{x}_a = -\sum_b \gamma_{ab} X_b + y_b \qquad (88,11)$$

della teoria generale delle fluttuazioni quasi-stazionarie (si veda V (122,20)); fra l'altro, come grandezze $\dot{x}_a$ considereremo i valori delle

componenti del tensore $\sigma'_{ik}$ e del vettore $\mathbf{q}$ in ciascuno degli elementi $\Delta V$; allora le grandezze $y_a$ sono $s_{ik}$ e $\mathbf{g}$:

$$\dot{x}_a \to \sigma'_{ik},\ q_i, \qquad (88,12)$$
$$y_a \to s_{ik},\ g_i.$$

Il significato delle grandezze termodinamicamente reciproche $X_a$ può essere specificato mediante la formula esprimente la velocità di variazione dell'entropia totale del liquido $S$. Con un procedimento comune (si veda VI, § 49) e mediante le formule (88,8-10) troviamo

$$\dot{S} = \int \left\{ \frac{\sigma'_{ik}}{2T} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) - \frac{\mathbf{q}\nabla T}{T^2} \right\} dV. \qquad (88,13)$$

Sostituendo questo integrale con la somma estesa agli elementi $\Delta V$ e confrontando in seguito il risultato così ottenuto con l'espressione

$$\dot{S} = -\sum_a \dot{x}_a X_a,$$

troviamo che

$$X_a \to -\frac{1}{2T} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \Delta V, \quad \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_i} \Delta V. \qquad (88,14)$$

Ora è facile trovare i coefficienti $\gamma_{ab}$ che definiscono direttamente le correlazioni cercate secondo le formule

$$\langle y_a (t_1)\, y_b (t_2) \rangle = (\gamma_{ab} + \gamma_{ba})\, \delta(t_1 - t_2) \qquad (88,15)$$

(cfr. V (122,21a)).

Prima di tutto osserviamo che le formule (88,9-10) non hanno termini che potrebbero legare $\sigma'_{ik}$ al gradiente della temperatura e $\mathbf{q}$ ai gradienti delle velocità. Ciò vuol dire che i coefficienti corrispondenti $\gamma_{ab}$ sono nulli e, in virtù dell'(88,15), abbiamo

$$\langle s_{ik} (t_1, \mathbf{r}_1)\, g_l (t_2, \mathbf{r}_2) \rangle = 0, \qquad (88,16)$$

vale a dire che $s_{ik}$ e $\mathbf{g}$ non sono, in generale, correlati tra loro.

Inoltre, i coefficienti che legano i valori $q_i$ ai valori $(\Delta V/T^2)\partial T/\partial x_i$ sono nulli se queste grandezze sono prese in $\Delta V$ distinti, e sono uguali a $\gamma_{ik} = \varkappa T^2 \delta_{ik}/\Delta V$ se prese nel medesimo elemento. Dopo il passaggio al limite $\Delta V \to 0$, questi valori di $\gamma_{ab}$ permettono di ottenere mediante la formula (88,15)

$$\langle g_i (t_1, \mathbf{r}_1)\, g_k (t_2, \mathbf{r}_2) \rangle = 2\varkappa T^2 \delta_{ik} \delta (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\, \delta (t_1 - t_2). \qquad (88,17)$$

Analogamente si ottengono le formule per le funzioni di correlazione del tensore degli sforzi casuale

$$\langle s_{ik}(t_1, \mathbf{r}_1)\, s_{lm}(t_2, \mathbf{r}_2)\rangle =$$
$$= 2T\left[\eta(\delta_{il}\delta_{km}+\delta_{im}\delta_{kl})+\left(\zeta-\frac{2\eta}{3}\right)\delta_{ik}\delta_{lm}\right]\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\,\delta(t_1-t_2). \tag{88,18}$$

Le formule (88,16-18) risolvono, in principio, la suddetta questione del calcolo delle fluttuazioni idrodinamiche in qualsiasi caso concreto. Il cammino di risoluzione del problema è il seguente. Considerando $s_{ik}$ e $\mathbf{g}$ come funzioni date delle coordinate e del tempo, risolviamo formalmente le equazioni linearizzate (88,6-8) rispetto alle grandezze $\delta\rho$, $\delta\mathbf{v}$, . . ., tenendo conto delle condizioni al contorno idrodinamiche necessarie. Come risultato otterremo queste grandezze in forma di funzionali lineari di $s_{ik}$, $\mathbf{g}$. Corrispondentemente, ogni grandezza quadratica in $\delta\rho$, $\delta\mathbf{v}$, . . . si esprime mediante funzionali quadratici di $s_{ik}$, $\mathbf{g}$; in seguito, le loro medie si calcolano mediante le formule (88,16-18), mentre le grandezze ausiliarie $s_{ik}$, $\mathbf{g}$ scompaiono dalla risposta.

Scriviamo le formule (88,16-18) anche nelle componenti di Fourier nelle frequenze e lo facciamo immediatamente nella forma che generalizza le formule al caso di fluttuazioni quantistiche. Secondo le regole generali del teorema della fluttuazione dissipativa, questa generalizzazione si ottiene introducendo il fattore ausiliario $(\hbar\omega/2T)\operatorname{cth}(\hbar\omega/2T)$ che si riduce a 1 nel caso classico ($\hbar\omega \ll T$). In presenza di dispersione della viscosità e della conduzione termica le grandezze $\eta$, $\zeta$, $\varkappa$ sono funzioni complesse della frequenza; in questo caso, nelle formule esprimenti le fluttuazioni le grandezze $\eta$, $\zeta$, $\varkappa$ vanno sostituite dalle parti reali di queste funzioni:

$$(s_{ik}^{(1)} g_l^{(2)})_\omega = 0, \tag{88,19}$$

$$(g_i^{(1)} g_k^{(2)})_\omega = \delta_{ik}\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\,\hbar\omega T \operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}\cdot \operatorname{Re}\varkappa(\omega), \tag{88,20}$$

$$(s_{ik}^{(1)} s_{lm}^{(2)})_\omega = \hbar\omega\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}\times$$
$$\times\left[\left(\delta_{il}\delta_{km}+\delta_{im}\delta_{kl}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\delta_{lm}\right)\operatorname{Re}\eta(\omega)+\delta_{ik}\delta_{lm}\operatorname{Re}\zeta(\omega)\right]. \tag{88,21}$$

## § 89. *Fluttuazioni idrodinamiche in un mezzo illimitato*

**In questo paragrafo tratteremo le fluttuazioni idrodinamiche in un liquido immobile illimitato. Questo problema potrebbe essere**

risolto, ovviamente, con il metodo esposto al paragrafo precedente. Tuttavia, ci proporremo di risolverlo qui in un altro modo per illustrare così un metodo alternativo di risoluzione dei problemi delle fluttuazioni idrodinamiche.

Questo metodo parte dalla teoria generale delle fluttuazioni quasi-stazionarie al suo stadio iniziale, cioè prima dell'introduzione delle forze casuali. Ricordiamo in proposito le formule generali (si veda V, § 122). Siano

$$\dot{x}_a = -\sum_b \lambda_{ab} x_b \tag{89,1}$$

le « equazioni del moto » macroscopiche per un insieme di grandezze $x_a(t)$ descriventi lo stato non in equilibrio del sistema (in equilibrio sono tutte le $x_a = 0$); queste equazioni sono valide se le grandezze $x_a$ sono grandi rispetto alle loro fluttuazioni medie (ma, al tempo stesso, così piccole che sia ammissibile la linearizzazione delle equazioni del moto). Allora si può affermare che le stesse equazioni sono soddisfatte (per $t > 0$) dalle funzioni di correlazione delle fluttuazioni

$$\frac{d}{dt}\langle x_a(t)\, x_c(0)\rangle = -\sum_b \lambda_{ab} \langle x_b(t)\, x_c(0)\rangle, \quad t > 0. \tag{89,2}$$

Come condizioni iniziali per queste equazioni servono le uguaglianze

$$\langle x_a(t)\, x_c(0)\rangle\,|_{t=+0} = \langle x_a x_c\rangle, \tag{89,3}$$

dove $\langle x_a x_c\rangle$ è una funzione di correlazione simultanea supposta nota. Le funzioni di correlazione si prolungano al dominio $t < 0$ secondo la regola

$$\langle x_a(t)\, x_c(0)\rangle = \pm\langle x_a(-t)\, x_c(0)\rangle, \tag{89,4}$$

dove il segno superiore riguarda il caso in cui le due grandezze $x_a$ e $x_c$ sono pari (o ambedue dispari) rispetto all'inversione del tempo, e quello inferiore si riferisce al caso in cui una è pari e l'altra dispari. La soluzione dell'equazione (89,2) con la condizione (89,3) si ottiene mediante la trasformazione di Fourier unilaterale: moltiplicando l'equazione per $e^{i\omega t}$ e integrando su $t$ nei limiti da 0 a $\infty$ (inoltre, l'integrale a primo membro dell'equazione si trasforma per parti), otteniamo il sistema di equazioni

$$-i\omega\,(x_a x_c)_\omega^{(+)} = -\sum_b \lambda_{ab}\,(x_b x_c)_\omega^{(+)} + \langle x_a x_c\rangle \tag{89,5}$$

~~per le grandezze~~ (funzioni della frequenza)

$$(x_a x_b)_\omega^{(+)} = \int_0^\infty e^{i\omega t} \langle x_a(t)\, x_b(0)\rangle\, dt. \tag{89,6}$$

Quanto alle componenti di Fourier comuni della funzione di correlazione, esse si esprimono mediante le grandezze (89,6) come segue:

$$(x_a x_b)_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \langle x_a(t)\, x_b(0)\rangle\, dt =$$
$$= (x_a x_b)_\omega^{(+)} \pm [(x_a x_b)_\omega^{(+)}]^* = (x_a x_b)_\omega^{(+)} + (x_b x_a)_{-\omega}^{(+)}, \tag{89,7}$$

dove i segni $\pm$ corrispondono ai segni nell'(89,4).

Passando ora al problema posto delle fluttuazioni in un liquido immobile, prima di tutto linearizziamo le equazioni idrodinamiche (88,6-8) con $\sigma'_{ik}$ e $\mathbf{q}$ ottenuti dalle espressioni (88,9-10) (senza gli ultimi termini). Ponendo $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, $\mathbf{v} = \delta\mathbf{v}$, . . . e rigettando i termini non lineari, otteniamo

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{89,8}$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \delta P + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}, \tag{89,9}$$

$$\frac{\partial \delta s}{\partial t} = \frac{\varkappa}{\rho T} \Delta \delta T \tag{89,10}$$

(dopo la linearizzazione omettiamo l'indice 0 delle grandezze costanti $\rho_0$, . . .). Nelle equazioni (89,8-10) è comodo dividere immediatamente la velocità nella parte potenziale (« longitudinale ») $\mathbf{v}^{(l)}$ e rotazionale (« trasversale ») $\mathbf{v}^{(t)}$ secondo la definizione

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(l)} + \mathbf{v}^{(t)}, \tag{89,11}$$
$$\operatorname{div} \mathbf{v}^{(t)} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v}^{(l)} = 0.$$

Nell'(89,8) resta la sola velocità longitudinale

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}^{(l)} = 0, \tag{89,12}$$

mentre l'(89,9) si scinde in due equazioni

$$\frac{\partial \mathbf{v}^{(t)}}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}^{(t)}, \tag{89,13}$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}^{(l)}}{\partial t} = -\nabla \delta P + \left(\zeta + \frac{4\eta}{3}\right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}^{(l)}. \tag{89,14}$$

L'equazione per la velocità trasversale è indipendente dalle altre equazioni. Rispettivamente, anche per la funzione di correlazione delle sue fluttuazioni abbiamo una sola equazione

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle v_i^{(t)}(t, \mathbf{r})\, v_k^{(t)}(0, 0)\rangle - \nu\Delta\langle v_i^{(t)}(t, \mathbf{r})\, v_k^{(t)}(0, 0)\rangle = 0, \quad (89,15)$$

dove $\nu = \eta/\rho$ è la viscosità cinematica. Sottoponendola alla trasformazione di Fourier unilaterale, otteniamo

$$-i\omega\,(v_i^{(t)}(\mathbf{r})\, v_k^{(t)}(0))_\omega^{(+)} - \nu\Delta\,(v_i^{(t)}(\mathbf{r})\, v_k^{(t)}(0))_\omega^{(+)} = \langle v_i^{(t)}(\mathbf{r})\, v_k^{(t)}(0)\rangle$$

(dove a secondo membro figura la funzione di correlazione simultanea) oppure, passando alle componenti di Fourier nelle coordinate,

$$(v_i^{(t)} v_k^{(t)})_{\omega\mathbf{k}} = \frac{(v_i^{(t)} v_k^{(t)})_{\mathbf{k}}}{\nu k^2 - i\omega}.$$

La funzione di correlazione simultanea della velocità è data dalla formula (88,5); passando alle componenti di Fourier e separando la parte trasversale, abbiamo

$$(v_i^{(t)} v_k^{(t)})_{\mathbf{k}} = \frac{T}{\rho}\left(\delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{k^2}\right). \quad (89,16)$$

Sostituendo questa espressione in quella precedente, otteniamo finalmente [1])

$$(v_i^{(t)} v_k^{(t)})_{\omega\mathbf{k}} = 2\,\mathrm{Re}\,(v_i^{(t)} v_k^{(t)})_{\omega\mathbf{k}}^{(+)} = \frac{2T}{\rho}\left(\delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{k^2}\right)\frac{\nu k^2}{\omega^2 + \nu^2 k^4}. \quad (89,17)$$

Per le altre variabili abbiamo il sistema di equazioni mutuamente connesse (89,10), (89,12), (89,14). Tuttavia, questo sistema si rende più semplice nei casi limite di frequenze grandi o piccole. Il fatto è che le perturbazioni della velocità longitudinale e della pressione si propagano nel liquido alla velocità del suono $u$, mentre le perturbazioni dell'entropia seguono l'equazione della conducibilità termica. Quest'ultimo meccanismo richiede un tempo $\sim 1/\chi k^2$, perché la perturbazione si propaghi a distanza $\sim 1/k$ ($\chi = \varkappa/\rho c_p$ è la conducibilità di temperatura del mezzo). Quindi, per le frequenze che soddisfano (per un dato valore del vettore d'onda) la condizione

$$\chi k^2 \ll \omega \sim ku \quad (89,18)$$

si può supporre che fluttuino soltanto $\mathbf{v}^{(l)}$ e $P$ a entropia costante. Contrariamente, per

$$\chi k^2 \sim \omega \ll ku \quad (89,19)$$

avvengono fluttuazioni isobare dell'entropia [2]).

---

[1]) È facile vedere che integrando l'espressione (89,17) in $d\omega/2\pi$, riotteniamo, come deve essere, la funzione di correlazione simultanea.

[2]) La disuguaglianza $\chi k^2 \ll ku$ si verifica sempre nel dominio idrodinamico. Così, nei gas abbiamo $u \sim v_T$ e $\chi \sim v_T\, l$, dove $v_T$ è la velocità termica media delle particelle e $l$ la lunghezza del loro cammino libero medio. Pertanto la disuguaglianza $\chi k \ll u$ è equivalente alla condizione obbligatoria $kl \ll 1$.

Consideriamo anzitutto il primo dominio delle alte frequenze (89,18) e definiamo, ad esempio, le fluttuazioni della pressione. L'equazione (89,14) riscritta per le funzioni di correlazione ha la forma

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \mathbf{v}^{(l)}(t, \mathbf{r})\,\delta P(0, 0)\rangle = -\operatorname{grad}\langle \delta P(t, \mathbf{r})\,\delta P(0, 0)\rangle + \\ + \left(\zeta + \frac{4\eta}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\langle \mathbf{v}^{(l)}(t, \mathbf{r})\,\delta P(0, 0)\rangle$$

e come condizione iniziale serve l'annullamento della correlazione simultanea fra $\mathbf{v}^{(l)}$ e $\delta P$. Applicando la trasformazione di Fourier unilaterale nel tempo e una trasformazione totale nelle coordinate, ricaviamo

$$-i\omega\rho\,(\mathbf{v}^{(l)}\delta P)^{(+)}_{\omega\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\,(\delta P^2)^{(+)}_{\omega\mathbf{k}} - \left(\zeta + \frac{4\eta}{3}\right)\mathbf{k}\,(\mathbf{k}\mathbf{v}^{(l)}\delta P)^{(+)}_{\omega\mathbf{k}}. \qquad (89,20)$$

In seguito, nell'equazione (89,12) scriviamo

$$\delta\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_s \delta P + \left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_P \delta s = \frac{1}{u^2}\,\delta P - \rho^2\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s \delta s,$$

ed esprimiamo la derivata $\partial\delta s/\partial t$ mediante l'equazione (89,10) scritta nella forma

$$\frac{\partial\delta s}{\partial t} = \frac{\varkappa}{\rho T}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s \Delta\delta P$$

(in virtù della condizione $\chi k^2 \ll \omega$ trascuriamo a secondo membro il termine in $\Delta\delta s$ rispetto a $\partial\delta s/\partial t$). Ciò conduce all'equazione

$$\frac{1}{u^2}\frac{\partial\delta P}{\partial t} - \frac{\varkappa\rho}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)^2_s \Delta\delta P + \rho\operatorname{div}\mathbf{v}^{(l)} = 0.$$

L'equazione corrispondente per le funzioni di correlazione si ottiene di nuovo di qui sostituendo $\delta P$ e $\mathbf{v}^{(l)}$ rispettivamente con $\langle\delta P(t, \mathbf{r})\,\delta P(0, 0)\rangle$ e $\langle\mathbf{v}^{(l)}(t, \mathbf{r})\,\delta P(0, 0)\rangle$, mentre l'(88,3) serve come condizione iniziale. Dopo l'applicazione della trasformazione di Fourier questa equazione dà

$$\left[-\frac{i\omega}{u^2} + \frac{k^2\varkappa\rho}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)^2_s\right](\delta P^2)^{(+)}_{\omega\mathbf{k}} + i\rho\,(\mathbf{k}\mathbf{v}^{(l)}\delta P)^{(+)}_{\omega\mathbf{k}} = \rho T \qquad (89,21)$$

Dalle due equazioni (89,20-21) ricaviamo dopo alcune trasformazioni

$$(\delta P^2)_{\omega\mathbf{k}} = 2\operatorname{Re}(\delta P^2)^{(+)}_{\omega\mathbf{k}} = 2\operatorname{Re}\frac{k^2\rho T u^4\,(i + 2\gamma_T\omega/uk^2)}{\omega\,(\omega^2 - k^2u^2 + 2i\omega u\gamma)}. \qquad (89,22)$$

dove

$$\gamma = \frac{k^2}{2\rho u}\left[\zeta + \frac{4\eta}{3} + \frac{\varkappa u^2\rho^2}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)^2_s\right] \qquad (89,23)$$

è il coefficiente di assorbimento del suono nel mezzo (si veda VI, § 77) e $\gamma_T$ la sua parte legata alla conducibilità termica. Scriviamo la risposta finale per il dominio di frequenze in prossimità dei valori $\omega = \pm ku$, dove le fluttuazioni sono particolarmente grandi:

$$(\delta P^2)_{\omega \mathbf{k}} = \frac{\rho T u^3 \gamma}{(\omega \mp ku)^2 + u^2 \gamma^2}. \tag{89,24}$$

Questa formula è valida per $|\omega \mp ku| \lesssim u\gamma$ [1].

Nel dominio delle basse frequenze (89,19) è sufficiente considerare, come è stato detto, le fluttuazioni dell'entropia a prescindere da quelle della pressione. Ciò vuol dire che nell'equazione (89,10) si può porre

$$\delta T \approx \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_P \delta s = \frac{T}{c_p} \delta s$$

(il calore specifico $c_p$ si riferisce all'unità di massa). Quindi, per la funzione di correlazione cercata abbiamo un'equazione dello stesso tipo dell'(89,15), mentre la condizione iniziale è data dall'espressione (88,4). Come risultato otteniamo

$$(\delta s^2)_{\omega \mathbf{k}} = \frac{2c_p}{\rho} \frac{\chi k^2}{\omega^2 + \chi^2 k^4}. \tag{89,25}$$

## PROBLEMI

1. Trovare la funzione di correlazione per le fluttuazioni del numero di particelle disciolte in una soluzione debole.

*Soluzione.* La densità $n$ del numero di particelle disciolte verifica l'equazione di diffusione

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n$$

$D$ è il coefficiente di diffusione). In una soluzione debole i valori contemporanei della densità in punti distinti dello spazio non sono correlati tra loro (così come per la densità di un gas perfetto non esiste correlazione simultanea); pertanto la funzione di correlazione simultanea è

$$\langle \delta n(\mathbf{r}_1)\, \delta n(\mathbf{r}_2) \rangle = \bar{n} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

Analogamente alla formula (89,25) troviamo

$$(\delta n^2)_{\omega \mathbf{k}} = \frac{2\bar{n} k^2 D}{\omega^2 + k^4 D}.$$

In questa soluzione trascuriamo la diffusione termica, per cui le fluttuazioni di $n$ si possono considerare indipendentemente dalle fluttuazioni della temperatura.

2. Trovare la funzione di correlazione per le fluttuazioni di pressione in un liquido che ha grande viscosità seconda dispersiva, $\zeta(\omega)$, dovuta al rilassamento lento di un certo parametro.

[1]) Ricordiamo (si veda VI, § 77) che il coefficiente idrodinamico di assorbimento del suono è sempre piccolo nei gas (la disuguaglianza $\gamma \ll k$ segue automaticamente dalla condizione $kl \ll 1$); esso è piccolo nei liquidi in cui non esiste dispersione rilevante del suono.

*Soluzione.* L'esistenza di processi lenti di rilassamento implica la comparsa di una viscosità seconda della forma

$$\zeta(\omega)=\frac{\tau\rho}{1-i\omega\tau}(u_\infty^2-u_0^2),$$

dove $\tau$ è il tempo di rilassamento; $u_0$ la velocità d'equilibrio del suono; $u_\infty$ la velocità del suono per valore costante del parametro di rilassamento (si veda VI, § 78). Le equazioni (89,20-21) e con esse l'(89,22) sono ugualmente valide in presenza di dispersione. Ponendo $\zeta=\zeta(\omega)$ e trascurando i termini provenienti da $\eta$ e $\varkappa$, otteniamo dopo il calcolo

$$(\delta P^2)_{\omega\mathbf{k}}=\frac{2T\tau\rho u_0^4(u_\infty^2-u_0^2)}{(u_0^2-\omega^2/k^2)^2+\omega^2\tau^2(u_\infty^2-\omega^2/k^2)^2}.$$

## § 90. *Espressioni operatoriali per i coefficienti cinetici*

Alle formule (88,20-21) dedotte al § 88 si può conferire un aspetto nuovo leggendole « da destra a sinistra », cioè considerandole come espressioni per i coefficienti di conducibilità termica e di viscosità. In questo caso, le funzioni di correlazione ai primi membri delle uguaglianze si possono esprimere, per loro definizione, mediante gli operatori di alcune grandezze aventi significato microscopico; come risultato, questi operatori consentono di esprimere i coefficienti cinetici del liquido.

Prima di tutto bisogna tener presente che la mancanza di correlazione fra le fluttuazioni dei flussi « casuali » di energia e di impulso in punti diversi dello spazio (l'esistenza della funzione $\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$ nelle formule (88,20-21)) è una conseguenza dell'approssimazione idrodinamica; quest'ultima è valida soltanto per valori piccoli del vettore d'onda. Per esprimere questa condizione in forma esplicita, scriviamo le formule nelle componenti dello sviluppo di Fourier rispetto alle coordinate spaziali (il che si riduce alla sostituzione dei fattori $\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$ con 1) e passiamo al limite $\mathbf{k}\to 0$. Così, la formula (88,20), alla quale è applicata una convoluzione sulla coppia di indici $i$, $k$

$$(\mathbf{g}^{(1)}\mathbf{g}^{(2)})_\omega=3\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\,\hbar\omega T\,\mathrm{cth}\,\frac{\hbar\omega}{2T}\cdot\mathrm{Re}\,\varkappa(\omega),$$

la scriveremo nella forma

$$\mathrm{Re}\,\varkappa(\omega)=\frac{1}{3\hbar\omega T}\,\mathrm{th}\,\frac{\hbar\omega}{2T}\lim_{\mathbf{k}\to 0}(\mathbf{g}^2)_{\omega\mathbf{k}}. \qquad (90,1)$$

È facile vedere che, con questa scrittura, nella detta formula si può sostituire il flusso « casuale » di calore $\mathbf{g}$ con il flusso totale di energia, che indichiamo con $\mathbf{Q}$. Quest'ultimo, come è noto dal-

l'idrodinamica, rappresenta la somma del flusso di trasporto convettivo di energia e del flusso di calore q:

$$\mathbf{Q} = \left(\frac{v^2}{2} + w\right)\rho\mathbf{v} + \mathbf{q} \approx \rho w\mathbf{v} - \varkappa\nabla T + \mathbf{g} \qquad (90,2)$$

($w$ è la funzione termica dell'unità di massa di liquido; nell'ultima espressione è omesso il termine contenente la potenza più elevata della velocità di fluttuazione $\mathbf{v}$). Ma per $\mathbf{k}$ piccoli le fluttuazioni delle grandezze fisiche reali ($\mathbf{v}$, $T$, $\rho$ ecc.), a differenza delle fluttuazioni dei flussi casuali, contengono una potenza superflua di $\mathbf{k}$ per cui, nel limite $\mathbf{k} \to 0$, le fluttuazioni di $\mathbf{g}$ coincidono con quelle di $\mathbf{Q}$. Questa conclusione è già evidente dal fatto che i flussi $\mathbf{g}$ e $s_{ik}$ entrano nelle equazioni del moto delle fluttuazioni idrodinamiche (88,6-8) soltanto sotto il segno delle derivate spaziali, mentre le suddette grandezze fisiche vi figurano anche sotto forma di derivate temporali; quindi, dopo il passaggio alle componenti di Fourier, le derivate temporali risultano essere dell'ordine di $k/\omega$ rispetto alle derivate spaziali.

A differenza di $\mathbf{g}$, il flusso totale di energia $\mathbf{Q}$ è una grandezza avente un significato meccanico diretto e le corrisponde l'operatore quantomeccanico $\hat{\mathbf{Q}}(t, \mathbf{r})$ che viene espresso mediante gli operatori delle variabili dinamiche delle particelle del mezzo. Ricordando la definizione della funzione di correlazione attraverso gli operatori (di Heisenberg) della grandezza corrispondente, arriviamo così alla formula

$$\operatorname{Re}\varkappa(\omega) = \frac{1}{6\hbar\omega T}\operatorname{th}\frac{\hbar\omega}{2T} \times$$

$$\times \lim_{\mathbf{k}\to 0}\int\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}\langle\hat{\mathbf{Q}}(t, \mathbf{r})\,\hat{\mathbf{Q}}(0, 0) + \hat{\mathbf{Q}}(0, 0)\,\hat{\mathbf{Q}}(t, \mathbf{r})\rangle\, dt\, d^3x \qquad (90,3)$$

(*M. S. Green*, 1954).

Tuttavia, si può ottenere una rappresentazione ancora più comoda della funzione $\varkappa(\omega)$ ricorrendo alla formula che esprime la funzione di correlazione mediante il commutatore degli operatori corrispondenti.

Se $x_a(\mathbf{r})$ e $x_b(\mathbf{r})$ sono due grandezze fluttuanti (che sono nulle in equilibrio e che si comportano allo stesso modo nei confronti dell'inversione del tempo), la loro funzione di correlazione, in accordo con le formule (76,1) e (75,11), può essere rappresentata nella forma

$$(x_a^{(1)} x_b^{(2)})_\omega = \operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}\operatorname{Re}\int_0^\infty e^{i\omega t}\langle\{\hat{x}_a(t, \mathbf{r}_1), \hat{x}_b(0, \mathbf{r}_2)\}\rangle\, dt,$$

dove la parentesi $\{\ldots\}$ indica il commutatore. Passando allo sviluppo di Fourier nelle coordinate $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, otteniamo la formula

$$(x_a x_b)_{\omega\mathbf{k}} = \operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}\cdot \operatorname{Re}\int\int_0^\infty e^{i(\omega t-\mathbf{kr})}\langle\{\hat{x}_a(t,\mathbf{r}),\hat{x}_b(0,0)\}\rangle\, dt\, d^3x. \quad (90,4)$$

Applicando questa formula alla funzione di correlazione $(\mathbf{Q}^2)_{\omega\mathbf{k}}$ e sostituendo il risultato nella (90,1), otteniamo

$$\operatorname{Re}\varkappa(\omega) = \frac{1}{3\omega T}\lim_{\mathbf{k}\to 0}\operatorname{Re}\int\int_0^\infty e^{i(\omega t-\mathbf{kr})}\langle\{\hat{\mathbf{Q}}(t,\mathbf{r}),\hat{\mathbf{Q}}(0,0)\}\rangle\, dt\, d^3x.$$

In ambedue i membri di questa formula sotto il segno Re figurano funzioni di $\omega$ che tendono a zero per $\omega \to \infty$ e sono prive di qualche singolarità nel semipiano superiore della variabile complessa $\omega$. Dall'uguaglianza delle parti reali di queste funzioni sull'asse reale $\omega$ deriva che le funzioni sono anch'esse uguali, e noi otteniamo così la formula finale seguente:

$$\varkappa(\omega) = \frac{1}{3\omega T}\lim_{\mathbf{k}\to 0}\int\int_0^\infty e^{i(\omega t-\mathbf{kr})}\langle\{\hat{\mathbf{Q}}(t,\mathbf{r}),\hat{\mathbf{Q}}(0\ \ 0)\}\rangle\, dt\, d^3x. \quad (90,5)$$

Per ottenere il valore statico del coefficiente di conducibilità termica, occorre in seguito passare al limite $\omega \to 0$.

Analogamente si può trasformare la formula (88,21) ed ottenere un'espressione operatoriale per i coefficienti di viscosità.

Se introduciamo il flusso totale dell'impulso, $\sigma_{ik} = -P\delta_{ik} + \sigma'_{ik}$ (dove $\sigma_{ik}$ è preso dall'(88,9)), allora nel limite $\mathbf{k} \to 0$ le fluttuazioni di tutti i termini, tranne $s_{ik}$, si annullano, cosicché in questo limite si può sostituire la funzione di correlazione $(s_{ik}s_{lm})_{\omega\mathbf{k}}$ con $(\sigma_{ik}\sigma_{lm})_{\omega\mathbf{k}}$. Infine otteniamo la formula

$$\eta(\omega)\left(\delta_{il}\delta_{km}+\delta_{im}\delta_{kl}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\delta_{lm}\right)+\zeta(\omega)\,\delta_{ik}\delta_{lm} =$$

$$= \frac{1}{\omega}\lim_{\mathbf{k}\to 0}\int\int_0^\infty e^{i(\omega t-\mathbf{kr})}\langle\{\hat{\sigma}_{ik}(t,\mathbf{r}),\hat{\sigma}_{lm}(0,0)\}\rangle\, dt\, d^3x, \quad (90,6)$$

dove $\hat{\sigma}_{ik}(t,\mathbf{r})$ è l'operatore di densità di flusso dell'impulso (*H. Mori*, 1958). Applicando a questa uguaglianza la convoluzione sulle coppie di indici $i$, $k$ e $l$, $m$ oppure $i$, $l$ e $k$, $m$, otteniamo espressioni distinte rispettivamente per $9\zeta$ o $10\eta + 3\zeta$.

## § 91. *Fattore di forma dinamico del liquido di Fermi*

A un liquido di Fermi sono inapplicabili le formule (87,4-6) esprimenti il fattore di forma per $T = 0$, poiché la loro deduzione è basata sull'ipotesi che (per $\omega$ e $\mathbf{k}$ piccoli) esista soltanto il ramo fononico dello spettro delle eccitazioni elementari. Neanche la teoria idrodinamica delle fluttuazioni sviluppata ai §§ 88, 89 è applicabile al liquido di Fermi. Questa teoria richiede che sia soddisfatta la condizione $kl \ll 1$ (essendo $l$ la lunghezza del cammino libero medio delle quasi-particelle) che è evidentemente violata nel liquido di Fermi, poiché $l \sim T^{-2}$, e tende all'infinito per $T \to 0$. Quindi, per calcolare il fattore di forma del liquido di Fermi si deve ricorrere a un'equazione cinetica.

In questo caso è comodo partire dalle formule (86,17-20) che stabiliscono un legame fra il fattore di forma e la suscettività generalizzata rispetto all'influsso sul liquido di un certo campo $U(t, \mathbf{r})$. Nelle componenti di Fourier anche nelle coordinate la definizione (86,18) si scrive come segue:

$$\delta\bar{n}(\omega, \mathbf{k}) = -\alpha(\omega, \mathbf{k})\, U_{\omega\mathbf{k}}. \tag{91,1}$$

Ci limitiamo al caso $T = 0$. Allora il fattore di forma dinamico si esprime mediante $\alpha(\omega, \mathbf{k})$ secondo la regola

$$\bar{n}\sigma(\omega, \mathbf{k}) = \begin{cases} 2\hbar \operatorname{Im} \alpha(\omega, \mathbf{k}), & \omega > 0, \\ 0 & , \ \omega < 0. \end{cases} \tag{91,2}$$

Quanto alla perturbazione della densità $\delta\bar{n}(\omega, \mathbf{k})$, essa si calcola mediante un'equazione cinetica, e in essa si può trascurare (per $T \to 0$) l'integrale degli urti. Questi calcoli differiscono da quelli effettuati al § 4 per il suono nullo solo per il fatto che all'energia della quasi-particella si aggiunge il termine

$$U(t, \mathbf{r}) = U_{\omega\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}.$$

Rispettivamente alla derivata $\partial\varepsilon/\partial\mathbf{r}$ nella (4,3) si aggiunge il termine $\partial U/\partial\mathbf{r} = i\mathbf{k}U$, e al primo membro dell'equazione cinetica (4,8) il termine

$$-i\mathbf{k}U \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} = i\mathbf{kv}U\delta(\varepsilon - \varepsilon_F).$$

Cerchiamo la soluzione dell'equazione cinetica nella forma

$$\begin{gathered} \delta n(\mathbf{p}) = \delta n_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{p})\, e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}, \\ \delta n_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = -\delta(\varepsilon - \varepsilon_F) \frac{\pi^2\hbar^2}{2m^* p_F} \chi(\mathbf{n}), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}}{p}. \end{gathered} \tag{91,3}$$

È la componente di Fourier della perturbazione della distribuzione dell'impulso delle quasi-particelle. La variazione cercata della densi-

tà del numero totale di quasi-particelle (coincidente con la densità del numero di particelle autentiche) è data dall'integrale

$$\delta\bar{n}(\omega, \mathbf{k}) = \int \delta n_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{p}) \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = -\frac{1}{2\hbar} \int \chi(\mathbf{n}) \frac{do}{4\pi} \cdot U_{\omega\mathbf{k}}.$$

La definizione della funzione $\chi(\mathbf{n})$ nella (91,3) differisce dalla definizione di $\nu(\mathbf{n})$ nella (4,9) per la normalizzazione, che è fatta in modo tale che la formula (91,2) diventi

$$\bar{n}\sigma(\omega, \mathbf{k}) = \operatorname{Im} \int \chi(\mathbf{n}) \frac{do}{4\pi}, \quad \omega > 0. \tag{91,4}$$

Per la funzione stessa $\chi(\mathbf{n})$ otteniamo così l'equazione

$$(\omega - v_F\mathbf{kn})\chi(\mathbf{n}) - v_F\mathbf{kn} \int F(\vartheta)\chi(\mathbf{n}') \frac{do'}{4\pi} = -\mathbf{kn} \frac{2p_F^2}{\pi^2\hbar^2}, \tag{91,5}$$

che differisce dalla (4,11) per il suo secondo membro.

L'equazione (91,5) non contiene in forma esplicita grandezze immaginarie. La comparsa della parte immaginaria nella sua soluzione $\chi(\mathbf{n})$ è dovuta quindi soltanto all'aggiramento dei poli negli integrali che compaiono nel corso della risoluzione. Le regole di questi aggiramenti sono date dalla condizione che il campo imposto al sistema $U \sim e^{-i\omega t}$ sia incluso adiabaticamente a partire da $t = -\infty$; a tal fine è necessario sostituirne la frequenza $\omega \to \omega + i0$.

La forma concreta della soluzione dipende dalla forma della funzione di interazione delle quasi-particelle $F(\vartheta)$. Mostriamo l'andamento della soluzione e le sue proprietà sull'esempio più semplice della funzione $F = \text{costante} \equiv F_0$.

In questo caso la soluzione dell'equazione (91,5) ha la forma

$$\chi(\mathbf{n}) = C \frac{v_F\mathbf{kn}}{v_F\mathbf{kn} - \omega - i0}, \tag{91,6}$$

dove $C$ è una costante, che può essere definita con la sostituzione inversa della (91,6) nella (91,5), il che dà

$$C(1 + I) = \frac{2m^* p_F}{\pi^2\hbar^2}, \tag{91,7}$$

dove

$$I = \int \frac{\mathbf{kn}' v_F}{\mathbf{kn}' v_F - \omega - i0} \frac{do'}{4\pi}.$$

L'espressione integranda dipende unicamente dall'angolo fra $\mathbf{n}'$ e $\mathbf{k}$ e dopo una sostituzione evidente troviamo

$$I(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{x - s - i0} = 1 - \frac{s}{2} \ln\left|\frac{s+1}{s-1}\right| + \begin{cases} is\pi/2, & s < 1, \\ 0, & s > 1, \end{cases} \tag{91,8}$$

dove $s = \omega/kv_F$ (la parte immaginaria dell'integrale si separa secondo la regola (8,11)).

Sostituendo la funzione $\chi$ (n) dalle (91,6-8) nella (91,4), otteniamo il fattore di forma dinamico

$$\bar{n}\sigma(\omega, k) = \frac{2m^* p_F}{\pi^2\hbar^2} \operatorname{Im} \frac{I(s)}{1 + F_0 I(s)} \tag{91,9}$$

(*A. A. Abrikosov, I. M. Chalatnikov*, 1958). In virtù della (91,8) esso è diverso da zero per $s < 1$, cioè per tutti i valori di $\omega < kv_F$.

Se $F_0 > 0$, allora in un liquido di Fermi è possibile la propagazione del suono nullo a velocità $u_0$ definita dall'equazione (4,15):

$$1 + F_0 I(s_0) = 0, \quad s_0 = u_0/v_F.$$

Per i valori di $s$ nell'intorno di $s_0$ l'espressione (91,9) diventa

$$\text{costante} \cdot \operatorname{Im} \frac{1}{s - s_0},$$

dove, in accordo con quanto detto sopra, con $s = \omega/kv_F$ si deve intendere $s + i0$. Ciò vuol dire che in $\sigma(\omega, k)$ compare ancora un termine funzionale $\delta$ della forma costante$\cdot\delta(s - s_0)$, oppure

$$\sigma(\omega, k) = \text{costante} \cdot k\delta(\omega - ku_0) \tag{91,10}$$

Questo termine rappresenta il contributo nel fattore di forma proveniente dal ramo del suono nullo dello spettro energetico del liquido di Fermi; esso è completamente analogo al contributo fononico (87,4) nel fattore di forma del liquido di Bose.

L'esistenza di questo termine non è legata, ovviamente, all'ipotesi $F$ = costante e rappresenta una proprietà generale del liquido di Fermi, in cui è possibile la propagazione del suono nullo; dalla legge di interazione delle quasi-particelle dipende soltanto il valore del coefficiente nella (91,10). Senza membro destro l'equazione (91,5) coincide con l'equazione del suono nullo; perciò la soluzione dell'equazione non omogenea ha un polo per $\omega/k = u_0$.

Dalla forma dell'equazione (91,5) risulta con chiarezza che la sua soluzione dipende dai parametri $\omega$ e $k$ soltanto sotto forma di rapporto $\omega/k$. Quindi, il fattore di forma dinamico sarà anch'esso funzione di questo rapporto. Il fattore di forma statico, invece,

$$\sigma(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\omega, k) \frac{d\omega}{2\pi}$$

avrà, quindi, la forma

$$\sigma(k) = \text{costante} \cdot k. \tag{91,11}$$

Ciò significa che la funzione di correlazione spaziale simultanea delle fluttuazioni di densità per $T = 0$ nel liquido di Fermi (così come in quello di Bose) segue la legge $\nu(r) \sim r^{-4}$.

È da notare, infine, che il fattore di forma dinamico per il gas di Fermi perfetto può essere ricavato dalla (91,9) mediante il passaggio al limite $F_0 \to 0$:

$$\sigma(\omega, k) = \frac{m^2\omega}{\pi\hbar^2\bar{n}k}, \qquad 0 < \omega < kv_F.$$

In questo caso il fattore di forma statico è

$$\sigma(k) = \int_0^{kv_F} \sigma(\omega, k)\frac{d\omega}{2\pi} = \frac{p_F^2 k}{(2\pi\hbar)^2\bar{n}}$$

(in accordo con i risultati del problema 1 al § 117 del volume V).

# INDICE ANALITICO [1]


Anelli vorticosi, 148
Assorbimento del suono nei metalli, 332

Campo critico, 224, 225
di una sfera, 239
di una pellicola, 228
inferiore e superiore, 246
terzo, 238
Carattere asintotico della funzione di correlazione, 423, 443, 444, 461
Caso dei London, 220
di Pippard, 220
Condensato, 129, 134, 152
Correzione correlativa in un plasma, 427, 433
Costante di rinormalizzazione, 58, 112
Curve di vortice nei superconduttori, 240, 247

Diagramma a scheletro, 78, 89
Diffusione dei neutroni in un liquido, 439
Dispersione spaziale, 423
Domini diamagnetici, 325

Eccitoni, 333, 335
Effetto Cooper, 193, 269
Meissner, 218
Elettroni di conduzione, 308
Elettroni e buche nei dielettrici, 334, 335
Energia magnetostatica, 354
Equazione di Dyson, 84, 85
dei London, 218

Fattore di forma dinamico, 433
statico, 436
Fessura superconduttrice, 198, 210
Flussi casuali, 448
Fluttuazioni della concentrazione nelle soluzioni, 455
del momento magnetico, 363
Forza d'attrito reciproco, 148
Funzione di interazione delle quasiparticelle, 21, 27, 34, 43
d'onda di coppie superconduttrici, 207, 216 217, 229, 273
Funzioni di Green anomale, 156, 226
fononiche, 158, 326
ritardate, 179-181, 188, 380

Impurità nei liquidi superfluidi, 124
Integrali di scambio, 364
Interazione degli atomi con una superficie metallica, 419
Invarianza di gauge, 99, 217, 225, 255, 285, 380

Lunghezza di diffusione, 38, 130, 194, 197

Magnetizzazione di un paramagnete, 369
nominale, 359
Massa ciclotronica, 291, 321
efficace, 19, 20, 24, 44, 122
Matrice di densità, 50, 51, 136
Metalli compensati, 310


[1]) Questo indice analitico completa quello generale del volume, senza però ripeterlo. Esso contiene termini e concetti che non entrano nell'indice generale.

Operatore hamiltoniano di Heisenberg, 364
Operatore di massa, 77
Operatore di polarizzazione, 398, 430
Operatori di Matsubara, 185

Parametro di Ginzburg-Landau, 227, 234
Parti normale e superfluida, 120, 121, 122, 203, 216
Permeabilità longitudinale e trasversale, 424
Potenziali di deformazione, 325
Profondità di penetrazione, 219, 220, 227, 265
Punto λ, 122, 142-144

Quantizzazione del flusso magnetico, 221
Quasi-impulso, 276
generalizzato, 286

Rinormalizzazione della lunghezza di diffusione, 38, 130, 197
Risonanza antiferromagnetica, 379
ferromagnetica, 356
Rotazione potenziale, 144
Rotoni, 116
Rottura magnetica, 290, 293, 296

Semiconduttori senza fessura, 344
Semimetalli, 310
Sezioni estremali della superficie di Fermi, 321
Smorzamento delle eccitazioni di Bose, 169-172
di Fermi, 18, 19, 57, 111, 112, 329
Sottoreticoli magnetici, 375
Sottozone di Landau, 295
Stabilità del liquido di Fermi, 24, 25, 98
Superconduttori senza fessura, 269
Superfici di Fermi, 308
elettroniche e di buche, 309
Suscettività di un paramagnete, 367, 368

Tensione superficiale dell'elio liquido, 123
Teorema della fluttuazione dissipativa, 386, 394, 438, 450
di Luttinger, 310
di Wick, 68, 75, 76, 160, 190
Traiettorie di elettroni e di buche, 292
della superficie di Fermi, 309
Trasformazioni di Galileo, 23, 102, 119

Velocità critica, 148
Vertici incompleti, 160
Vibrazioni di una linea di vortice, 150

Zone energetiche, 275
nel caso unidimensionale, 280-284

Finito di stampare nel mese di settembre 1997
per conto degli Editori Riuniti
dalla Lito - tipografia Tonygraf - Roma